
算子代数

现代数学基础丛书

算子代数

李炳仁 著

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书叙述算子代数的基本理论. 关于 von Neumann 代数(W^*-代数)介绍了基本概念、拓扑方面的分析、分类理论、因子理论、Tomita-Takesaki 理论、von Neumann 代数的 Borel 空间以及约化理论等. 关于 C^*-代数介绍了基本概念、GNS 构造、* 表示理论、公理的理论、张量积理论以及(AF)代数等.

本书可供数学专业的研究生、大学教师以及研究工作者阅读和参考.

现代数学基础丛书

算 子 代 数

李炳仁 著

责任编辑 张启男

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年6月第一版 开本:850×1168 1/32

1998年8月第二次印刷 印张:16

印数:4 301—6 300 字数:417 000

ISBN 7-03-006857-2/O·1030

定价:32.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(新欣))

序

算子代数，确切地说，是指由 Hilbert 空间中有界线性算子组成的 * 代数，也就是 $B(\mathscr{H})$ 的 * 子代数. 这里 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间，$B(\mathscr{H})$ 是 $\mathscr{H}$ 中有界线性算子的全体. 由于这是无穷维的，为了能够着手研究起见，我们自然要求这样的算子代数在一定的拓扑下是封闭的. 当在 $B(\mathscr{H})$ 中引进通常的线性拓扑后，我们发现所要研究的算子代数只有两类：一致闭的算子代数（c^*-代数）和弱闭的算子代数（von Neumann 代数或 w^*-代数）.

J. von Neumann 在研究 Hilbert 空间中算子谱理论以及奠定量子力学数学基础的同时，认识并且预见到：研究物理世界中无穷自由度的系统，还需要新的数学工具. 1929 年，他引入了弱闭算子环的概念. 他指出了这类代数的两个本质的特点：1）代数必须是自伴的；2）代数是弱算子闭的，这使得代数包含它任意自伴元的谱族. 由此，J. von Neumann 开辟了一个重要的数学领域. 后来，J. Dixmier 重新命名这个数学领域为 von Neumann 代数. 到了卅年代，J. von Neumann 与他的合作者 F. J. Murray 进行了系统的研究，他们的结果在今天仍然是这个理论的核心部分. 六十年代末到七十年代，由于对因子构造的深入研究、Tomita-Takesaki 理论的出现，以及关于权的一般理论和 A. Connes 关于 (III) 型因子更细致的分类理论等等，使得 von Neumann 代数理论得到蓬勃的发展.

c^*-代数本来是指 Hilbert 空间中一致闭的算子代数，1943 年，I. M. Gelfand 与 M. Naimark 指出，无须依赖 Hilbert 空间，可以用很少的公理来表征它. 他们的工作后来为 I. E. Segal 进一步完善，从而不仅使得 c^*-代数得到抽象的表述，而且产生了重要的 GNS 构造，由此奠定了 c^*-代数理论的基础. c^*-代数的

理论形式地可以分为两个部分：一是代数的本质的构造；二是表示理论。当然，这两个部分是紧密相关，相互促进的。同 von Neumann 代数一样，c^*-代数理论也取得了丰饶的成果。

本书的目的是介绍算子代数的基本理论和这个数学领域的发展状况。在写作方面，本书将尽量作到自给自足，当然也假定读者已经熟悉泛函分析的基本知识。

在本书的写作过程中，作者自始至终得到复旦大学数学系夏道行教授的鼓励与支持。同时，在书稿的校勘中，又得到中国科学院数学研究所刘尚平同志的大力帮助。这里谨致谢意。

本书难免有错误和缺点，敬请读者指正。

作　者

1984 年 3 月于北京

中国科学院数学研究所

《现代数学基础丛书》编委会

目　录

记号表 ……………………………………………………………………vii
第一章　von Neumann 代数的基础………………………………1
§1. Hilbert 空间中算子的 Banach 空间……………………………1
§2. $B(\mathscr{H})$中的拓扑 ……………………………………………8
§3. vN 代数的定义 ……………………………………………16
§4. vN 代数的张量积 …………………………………………22
§5. 投影的比较与中心覆盖……………………………………33
§6. Kaplansky 稠密性定理 ……………………………………39
§7. 理想……………………………………………………………42
§8. 正规的正泛函…………………………………………………44
§9. 泛函的极分解与直交分解……………………………………50
§10. Radon-Nikodym 定理 ……………………………………55
§11. 有界球中拓扑 s^* 与 τ 的等价性 ………………………59
§12. 正规*同态 ………………………………………………65
§13. 循环投影的比较与空间*同构定理 ………………………69
§14. σ-有限的 vN 代数 ………………………………………71
第二章　c^*-代数的基础 ……………………………………77
§1. c^*-代数的定义及其简单的性质 ……………………………78
§2. c^*-代数的正元 ……………………………………………82
§3. 态与 GNS 构造………………………………………………85
§4. 逼近单位元与商 c^*-代数 …………………………………96
§5. 单位球的端点与单位元的存在性…………………………100
§6. 迁移定理与不可约*表示…………………………………104
§7. 纯态与正则极大左理想……………………………………109
§8. 理想与商 c^*-代数 ………………………………………114
§9. 可传的 c^*-子代数 ………………………………………117
§10. *表示的比较、分离性与拟等价性…………………………121

§11. c^*-代数的包络 vN 代数 …… 125
§12. c^*-代数的公理 …… 127
第三章 c^*-代数的张量积 …… 145
§1. Banach 空间的张量积与交叉范 …… 145
§2. c^*-代数的张量积与空间的 c^*-范 …… 149
§3. 最大的 c^*-范 …… 157
§4. 代数张量积上的态 …… 162
§5. 不等式 $\lambda(\cdot)\leqslant\alpha_0(\cdot)\leqslant\alpha(\cdot)\leqslant\gamma(\cdot)$ …… 169
§6. 全正映象 …… 179
§7. c^*-代数的诱导极限 …… 189
§8. c^*-代数的任意张量积 …… 194
第四章 w^*-代数 …… 201
§1. 范数为 1 的投影映象 …… 201
§2. w^*-代数及其 * 表示 …… 205
§3. w^*-代数的张量积 …… 209
§4. 全可加泛函与奇异泛函 …… 212
§5. M_* 的弱紧子集的特征 …… 219
第五章 交换的算子代数 …… 224
§1. 局部紧空间上的测度理论 …… 224
§2. Stonean 空间 …… 230
§3. 交换的 w^*-代数 …… 236
§4. 交换 c^*-代数的 * 表示 …… 245
第六章 von Neumann 代数的分类 …… 255
§1. vN 代数的分类 …… 255
§2. vN 代数的遍历型定理 …… 258
§3. 有限的 vN 代数 …… 264
§4. 真无限的 vN 代数 …… 275
§5. 半有限的 vN 代数 …… 277
§6. 纯无限的 vN 代数 …… 288
§7. 离散的 vN 代数 …… 292
§8. 连续的与 (II) 型的 vN 代数 …… 297
§9. vN 代数张量积的类型 …… 299

第七章　因子的理论 ······ 303
§1. 维数函数 ······ 303
§2. 超有限的 (II_1) 型因子 ······ 308
§3. 构造 (II) 型与 (III) 型的因子 ······ 317
第八章　Tomita-Takesaki 理论 ······ 330
§1. KMS 条件 ······ 330
§2. Tomita-Takesaki 理论 ······ 338
§3. σ-有限的 W^*-代数的模自同构群 ······ 344
第九章　Borel 构造 ······ 353
§1. Polish 空间 ······ 353
§2. Borel 子集与 Souslin 子集 ······ 359
§3. Borel 映象与标准的 Borel 空间 ······ 364
§4. Borel 截面 ······ 371
第十章　von Neumann 代数的 Borel 空间 ······ 378
§1. $W(X^*)$ 的标准 Borel 构造 ······ 378
§2. Borel 选择函数列 ······ 384
§3. vN 代数的 Borel 空间 ······ 388
§4. 因子 Borel 空间的 Borel 子集 ······ 391
第十一章　约化理论 ······ 402
§1. Hilbert 空间的可测场 ······ 402
§2. 算子的可测场 ······ 410
§3. vN 代数的可测场 ······ 415
§4. Hilbert 空间分解为 Hilbert 积分 ······ 421
§5. 分解 vN 代数与其分量的关系 ······ 428
§6. 算子的和 vN 代数的定常场 ······ 432
§7. vN 代数 Borel 空间的 Borel 子集 ······ 436
§8. 可分 c^*-代数态空间的 Borel 子集 ······ 448
第十二章　(AF) 代数 ······ 451
§1. (AF) 代数的定义 ······ 451
§2. 维数与同构定理 ······ 462
§3. (AF) 代数的图 ······ 469
§4. (AF) 代数的理想 ······ 473

§5. 维数群 …… 479
§6. 稳定同构定理 …… 484
参考文献 …… 489
索引 …… 496

记 号 表

a_φ	48,92
A^*	125
A^{**}	125
A_+	82
A_h	83
$\hat{A}$	114
$\hat{A}_*$	115
$\hat{A}^*$	115
$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$	149
α-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$	149
$\bigotimes_{l\in\Lambda} A_l$	194
α-$\bigotimes_{l\in\Lambda} A_l$	195
$\mathrm{Aut}(M)$	317
$A=\overline{\bigcup_n A_n}$	196,451
$B(\mathscr{H})$	2
$BV(A)$	214
$\mathscr{C}(E)$	378
$C(\mathscr{H})$	2
$\mathbf{C}$	18
$c(p)$	37
$C_0^\infty(\Omega)$	79
$C(\Omega')$	80
$C(X)$	382
$\{D, d, \mathscr{U}\}$	471
$\{D, \mathscr{U}\}$	480
$[E]$	2
$E(A)$	462
$F(\mathscr{H})$	1
F_n	213
F_s	213
$f\cdot a$	261
$f*g$	261
$\mathscr{F}$	390
(G, Ω, μ)	322
G_g	354
$\mathscr{H}_1\odot\mathscr{H}_2$	22
$\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$	24
$\bigotimes_{l\in\Lambda}^{l}\mathscr{H}_l$	197
$\mathscr{H}_r$	330
$\mathscr{H}(\cdot)$	402
$1_{\mathscr{H}}$	2
ϑ_φ	48,92
1_A	78
$I.C.C.$	328
$\ker\pi$	114
$K(a)$	263
$L_a\varphi$	50
$\varinjlim_{\alpha}\{A_\alpha, \Phi_{\alpha\beta}\}$	190
$L^\infty(\Omega, \nu)$	226
$L^1(\Omega,\nu)$	227
$L^2(\Omega, \nu)$	241
$l^2(G)$	328
$\varinjlim_{n}\{Z^{r(n)}, \Phi_n\}$	479
M'	16
M''	16
$M_\perp$	17
M_p	19
M_p'	19
M_*	21,205
$M_1\overline{\otimes}M_2$	27
$(M)_1$	39
M_h	39
M_+	41
$\sum_l\oplus M_l$	41
$M_n(A)$	180
$\mathfrak{m}_f$	241
$M_p(h)$	258
$m_p(h)$	258
$\mathfrak{M}_\varphi$	278
(M, G, α)	317
$M\otimes_\alpha G$	318
M^φ	345
$\mathfrak{M}(E)$	437

$\mathfrak{N}(\rho)$ 110
$\mathfrak{N}_\tau$ 278
$\mathbf{N}$ 356
N^∞ 356
p_ξ 69
p'_ξ 69
$\mathscr{P}(A)$ 114
$\mathrm{Prim}(A)$ 114
$\mathscr{P}_s(A)$ 115
$\mathscr{P}^s(A)$ 115
$\mathrm{Prim}_s(A)$ 115
$\mathrm{Prim}^s(A)$ 115
$P(A)$ 462
$R_e\varphi$ 50
$\mathbf{R}$ 51
$\gamma(\cdot)$ 146
$R(G)$ 328
$\mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0)$ 432
$S(\mathscr{H})$ 4
$s(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 9
$s^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 9
$s(M, M_*)$ 22
$s^*(M, M_*)$ 22
$s(\varphi)$ 47
$s_l(\varphi)$ 53
$s_r(\varphi)$ 53
$\mathfrak{S}$ 85
$\mathscr{S}(A)$ 85
$\mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)$ 165
$\mathrm{supp}\, \nu$ 225
S_{loc} 224
$\mathscr{A}$ 389
$T(\mathscr{H})$ 5
$\mathrm{tr}(\cdot)$ 7
$\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 9
$\tau(M, M_*)$ 22
$T(a)$ 272
$W(X^*)$ 382
$W(\mathscr{H})$ 383
$\alpha\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 146
$x \to y$ 474
Z 20
$\mathbf{Z}$ 326
$\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 9
$\sigma(M, M_*)$ 22
$\sigma(a)$ 79
$\{\sigma_t^\varphi\}$ 344
$\|\cdot\|_2$ 4, 308
$\|\cdot\|_1$ 5
$p \leqslant q$ 18
$p \lesssim q$ 33
$p \sim q$ 33
${}^*\mathrm{I}$ 24
φ^* 52
$\varphi \geqslant \psi$ 45
$|\varphi|$ 52
$[\varphi]$ 62
$\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi, \xi_\varphi\}$ 48, 92
$\{\pi_1, \mathscr{H}_1\} \cong \{\pi_2, \mathscr{H}_2\}$ 91
$\pi_1 \circ \pi_2$ 121
$\pi_1 \lesssim \pi_2$ 121
$\pi_1 \approx \pi_2$ 123
$\{\Phi_\mu, L^2(\Omega, \mu)\}$ 245
$\Phi_{\rho,\mu}$ 253
$\nu(a)$ 79
$\lambda(\cdot)$ 146
$\alpha_0(\cdot)$ 151
$\alpha_1(\cdot)$ 157
$f \cdot \nu$ 228
$\mu \prec \nu$ 228
$\mu \sim \nu$ 228
$\mu \perp \nu$ 229
μ_ξ 246
$\xi > \eta$ 246
$\omega_p(h)$ 258
$\omega_g(h)$ 258
$\mathfrak{C}(M)$ 261
$\xi(\cdot)$ 403
Θ 403
$\int_E^\oplus \mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 408
$\int_E^\oplus a(t)d\nu(t)$ 411
$\int_E^\oplus M(t)d\nu(t)$ 418
$\int_E^\oplus \Phi(t)d\nu(t)$ 420

第一章 von Neumann 代数的基础

von Neumann 代数是无穷维的复杂对象，因此需要进行细致的拓扑讨论. § 1 中,指出 $B(\mathscr{H})$ (Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中有界线性算子的全体)是 $C(\mathscr{H})$ ($\mathscr{H}$ 中全连续线性算子的全体) 的二次共轭空间. 由此在 § 2 中，能够提出 $B(\mathscr{H})$ 中各种线性拓扑以及它们的比较. § 3 讨论了 von Neumann 代数的一些基本性质，尤为重要的是二次交换子定理 (1.3.10)，它是这个理论的第一个有力的工具(为 J. von Neumann 于 1929 年所证明),给出了代数定义与拓扑定义的等价性. § 4 的张量积的交换子定理 (1.4.12) 是很深刻的结果，也曾经是长期没有解决的猜测. 第一次完全证实这个猜测的是 M. Tomita, 但 § 4 的证明遵循 M. A. Rieffel 与 A. van Dale 的途径. § 5 投影的比较，是 F. J. Murray 与 J. von Neumann 用以进行因子分类的维数理论的出发点. § 6 I. Kaplansky 证明的稠密性定理是算子代数理论的又一个有力的工具，它揭示了：如果 $B(\mathscr{H})$ 的一个 * 子代数在另一个中依较弱的拓扑是稠密的，那么一定能够依更强的拓扑(有界地)稠密. § 8—§ 10 讨论了线性泛函的几个重要性质：正规性、极分解、直交分解及 Radon-Nikodym 性质. § 12 研究 * 同态，把它归结为三个初等的 * 同态(增补、诱导、空间 * 同构)的复合. § 13 是空间分析，主要结果是 1.13.2 (循环投影的比较)，1.13.5 (空间 * 同构定理)，及 1.13.7. § 14 σ-有限的 von Neumann 代数是一类经常遇到的代数，例如可分 Hilbert 空间中的 von Neumann 代数都属于这一类.

§ 1. Hilbert 空间中算子的 Banach 空间

定义 1.1.1 设 $\mathscr{H}$ 是复 Hilbert 空间，$F(\mathscr{H})$表示 $\mathscr{H}$ 中有

限秩线性算子的全体，$C(\mathscr{H})$ 表示 $\mathscr{H}$ 中全连续线性算子的全体。$B(\mathscr{H})$ 表示 $\mathscr{H}$ 中有界线性算子的全体，$\mathscr{H}$ 中恒等算子记以 $1_{\mathscr{H}}$，在不致混淆时，记以 1[1]。

命题 1.1.2 如果 $\mathscr{H}$ 是可数无穷维的，则 $C(\mathscr{H})$ 是 $B(\mathscr{H})$ 唯一的非零真的闭双侧理想。

证. 设 $\mathscr{I}$ 是 $B(\mathscr{H})$ 的非零闭双侧理想，a 是 $\mathscr{I}$ 的非零元，于是有 $\xi, \eta \in \mathscr{H}$，使得 $a\xi = \eta \neq 0$. 设 ξ', η' 是 $\mathscr{H}$ 的任意元，作 $b \in B(\mathscr{H})$，使得 $b\eta = \xi'$. 于是

$$ba(\xi \otimes \eta') = (ba\xi) \otimes \eta' = \xi' \otimes \eta'^{\,2)} \in \mathscr{I}$$

进而 $F(\mathscr{H}) \subset \mathscr{I}$，$C(\mathscr{H}) \subset \mathscr{I}$.

若有 $t \in \mathscr{I} \backslash C(\mathscr{H})$，则 $h = (t^*t)^{\frac{1}{2}} \in \mathscr{I} \backslash C(\mathscr{H})$. 设 $\{e_\lambda\}$ 是 h 的谱族，由于 $h \notin C(\mathscr{H})$，必有 $\varepsilon > 0$，使得 $(1 - e_\varepsilon)\mathscr{H}$ 与 $\mathscr{H}$ 有同样的可数无穷维. 今命 v 是以 $\mathscr{H}$ 为始域，$(1 - e_\varepsilon)\mathscr{H}$ 为终域的部分等距算子，易见 $v^*hv\mathscr{H} = \mathscr{H}$，及 v^*hv 是可逆的. 又由于 $v^*hv \in \mathscr{I}$，所以，$\mathscr{I} = B(\mathscr{H})$. 证毕.

命题 1.1.3 当 $\mathscr{H}$ 无穷维时，$C(\mathscr{H})$ 不能是某个 Banach 空间的共轭空间.

证. Banach 空间的共轭空间的单位球是弱 * 紧的，依 Krein-Milman 定理，它必有端点. 因此只要证明 $C(\mathscr{H})$ 的单位球并无端点，即对于任意的 $a \in C(\mathscr{H})$，$\|a\| \leqslant 1$，只须指出有 $b \in C(\mathscr{H})$，$b \neq 0$，使得 $\|a \pm b\| \leqslant 1$.

如果 a 是有限秩的. 令 $\mathscr{H}_1 = [a\mathscr{H}, a^*\mathscr{H}]^{3)}$ $\mathscr{H}_2 = \mathscr{H}_1^{\perp}$，则 $\dim \mathscr{H}_1 < \infty$，$a$ 与 a^* 对 $\mathscr{H}_1$，$\mathscr{H}_2$ 不变，并且限于 $\mathscr{H}_2$，a 与 a^* 都为零，于是上述 b 不难找到. 如果 a 不是有限秩的，极分解 $a = wh$，并且可写 $h = \sum_n \lambda_n p_n$，其中 $\{p_n\}$ 是相互直交的一

---

1) 今后行文中，将不区别恒等算子 1，代数的单位元素 1，与数 1 等，请读者自行识别.

2) $\xi \otimes \eta$ 表示 $\mathscr{H}$ 中如下作用的一秩算子：

$$(\xi \otimes \eta)\zeta = \langle \zeta, \eta \rangle \xi, \ \forall \zeta \in \mathscr{H}.$$

3) 今后，$[E]$ 表示子集 E 张成的线性子空间.

秩投影[1]无穷列，$0 < \lambda_n \leqslant 1\ (\forall n)$，及 $\lambda_n \to 0$．于是，有 $\lambda_N \in (0, 1)$．适当取 $\varepsilon > 0$，使得 $|\lambda_N \pm \varepsilon| \leqslant 1$．再命 $b = \varepsilon w p_N$，即有 $b \neq 0$，$\|a \pm b\| \leqslant 1$．证毕．

定义 1.1.4 $a \in C(\mathscr{H})$ 称为 Hilbert-Schmidt 算子，指若 $\{\lambda_n\}$ 是 $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ 的正本征值全体时（k 重的本征值，则在 $\{\lambda_n\}$ 中出现 k 次），则 $\sum\limits_n \lambda_n^2 < \infty$．记 Hilbert-Schmidt 算子的全体为 $S(\mathscr{H})$．

命题 1.1.5 $a \in S(\mathscr{H})$，当且仅当，对于 $\mathscr{H}$ 的某个(从而任意的)直交规范基 $\{\xi_l\}$，有 $\sum\limits_l \|a\xi_l\|^2 < \infty$．

证．设 $\{\xi_l\}$，$\{\eta_r\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的两组直交规范基，

$$
\begin{aligned}
\sum_l \|a\xi_l\|^2 &= \sum_l \|(a^*a)^{\frac{1}{2}}\xi_l\|^2 \\
&= \sum_{l,r} |\langle (a^*a)^{\frac{1}{2}}\xi_l, \eta_r\rangle|^2 \\
&= \sum_{r,l} |\langle \xi_l, (a^*a)^{\frac{1}{2}}\eta_r\rangle|^2 \\
&= \sum_r \|(a^*a)^{\frac{1}{2}}\eta_r\|^2 \\
&= \sum_r \|a\eta_r\|^2,
\end{aligned}
$$

因此只须对 $\mathscr{H}$ 的某个直交规范基来证明．

设 $a \in S(\mathscr{H})$，$\{\xi_l\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的直交规范基，使得 $\{\xi_l\}$ 包含 $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ 所有正本征值相应的本征矢，于是 $\sum\limits_l \|a\xi_l\|^2 = \sum\limits_n \lambda_n^2 < \infty$．

反之设 $\sum\limits_{l \in \Lambda} \|a\xi_l\|^2 < \infty$，这里 $\{\xi_l\}_{l \in \Lambda}$ 是 $\mathscr{H}$ 的直交规范基，于是 $\|p_F a p_F - a\| \to 0$，这里 F 是 Λ 的有限子集，依包含关系成为定向指标集，而 p_F 是 $\mathscr{H}$ 到 $[\xi_l | l \in F]$ 上的投影，从而 $a \in C(\mathscr{H})$．再取 $\{\xi_l\}$ 包含 $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ 所有正本征值相应的本征矢，即见

---

1) 今后，Hilbert 空间中的投影算子总是指自伴的．

$a\in S(\mathscr{H})$. 证毕.

定义 1.1.6 设 $a\in S(\mathscr{H})$, 称 $\|a\|_2=\left(\sum_n \lambda_n^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_l \|a\xi_l\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 为 a 的 Hilbert-Schmidt 范数, 这里 $\{\lambda_n\}$ 是 $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ 的正本征值全体, $\{\xi_l\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的任意直交规范基.

命题 1.1.7 对任意的 $a\in S(\mathscr{H})$, $b\in B(\mathscr{H})$

$\|a\|\leqslant\|a\|_2=\|a^*\|_2$, $\|ba\|_2\leqslant\|b\|\|a\|_2$, $\|ab\|_2\leqslant\|a\|_2\|b\|$,

特别 $S(\mathscr{H})$ 是 $B(\mathscr{H})$ 的 * 双侧理想.

证. 由于 $\sum_l\|a^*\xi_l\|^2=\sum_{l,l'}|\langle a^*\xi_l,\xi_{l'}\rangle|^2=\sum_{l,l'}|\langle\xi_l,a\xi_{l'}\rangle|^2=\sum_{l'}\|a\xi_{l'}\|^2$, 所以, $\|a\|_2=\|a^*\|_2$. 极分解 $a=wh$, 这里 $h=(a^*a)^{\frac{1}{2}}$, 于是 $\|a\|\leqslant\|(a^*a)^{\frac{1}{2}}\|=\max\limits_n\lambda_n\leqslant\|a\|_2$. 此外, 由 $\sum_l\|ba\xi_l\|^2\leqslant\sum_l\|b\|^2\|a\xi_l\|^2$, 可见 $\|ba\|_2\leqslant\|b\|\|a\|_2$. 进而 $\|ab\|_2\leqslant\|b^*a^*\|_2\leqslant\|b^*\|\|a^*\|_2=\|a\|_2\|b\|$. 证毕.

命题 1.1.8 在 $S(\mathscr{H})$ 中定义 $\langle a,b\rangle_2=\sum_l\langle a\xi_l,b\xi_l\rangle$, 这里 $\{\xi_l\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的任意直交规范基, 则 $S(\mathscr{H})$ 成为 Hilbert 空间, 并且 $F(\mathscr{H})$ 在其中稠.

证. 易见定义 $\langle,\rangle_2$ 的级数是绝对收敛的. 今指出这个定义不依赖于 $\{\xi_l\}$ 的选择. 设 $\{\eta_r\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的另一组直交规范基, 由于 $\sum_{l,r}|\langle a\xi_l,\eta_r\rangle\langle\eta_r,b\xi_l\rangle|\leqslant\|a\|_2\|b\|_2$, 即级数 $\sum_{l,r}\langle a\xi_l,\eta_r\rangle\langle\eta_r,b\xi_l\rangle$ 是绝对收敛的, 从而

$$\sum_l\langle a\xi_l,b\xi_l\rangle=\sum_{l,r}\langle a\xi_l,\eta_r\rangle\langle\eta_r,b\xi_l\rangle$$
$$=\sum_r\langle b^*\eta_r,a^*\eta_r\rangle.$$

同样也有 $\sum_r\langle a\eta_r,b\eta_r\rangle=\sum_r\langle b^*\eta_r,a^*\eta_r\rangle$, 因此, $\langle,\rangle_2$ 的定义不依赖于 $\{\xi_l\}$ 的选择.

今设 $\{a_n\}$ 是 $S(\mathscr{H})$ 的依 $\|\cdot\|_2$ 的基本列, 由于 $\|\cdot\|_2\geqslant\|\cdot\|$,

所以有 $a\in C(\mathscr{H})$，使得 $\|a_n-a\|\to 0$. 再由 $\sum_l\|(a_n-a_m)\xi_l\|^2\to 0$，可见 $a\in S(\mathscr{H})$ 及 $\|a_n-a\|_2\to 0$. 所以 $S(\mathscr{H})$ 依 $\langle,\rangle_2$ 是 Hilbert 空间.

最后对任意的 $a\in S(\mathscr{H})$ 及 $\varepsilon>0$，如果 $\{\xi_l\}_{l\in\Lambda}$ 是 $\mathscr{H}$ 的直交规范基，则有 Λ 的有限子集 F，使得 $\sum_{l\notin F}(\|a\xi_l\|^2+\|a^*\xi_l\|^2)<\varepsilon$. 令 p_F 是 $\mathscr{H}$ 到 $[\xi_l|l\in F]$ 上的投影，则

$$\|p_Fap_F-a\|_2^2=\sum_{l\notin F}\|a\xi_l\|^2+\sum_{l\in F}\|(1-p_F)a\xi_l\|^2,$$

但是

$$\sum_{l\in F}\|(1-p_F)a\xi_l\|^2=\sum_{l\in F}\sum_{l'\notin F}|\langle a\xi_l,\xi_{l'}\rangle|^2$$
$$\leqslant\sum_{l'\notin F}\|a^*\xi_{l'}\|^2.$$

因此，$\|p_Fap_F-a\|_2<\varepsilon$. 证毕.

定义 1.1.9 $a\in C(\mathscr{H})$ 称为迹类的，指若 $\{\lambda_n\}$ 是 $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ 的正本征值全体，则 $\sum_n\lambda_n<\infty$，并且，这时称 $\|a\|_1=\sum_n\lambda_n$ 为 a 的迹范数，及记全体迹类算子为 $T(\mathscr{H})$.

命题 1.1.10 1) $a\in T(\mathscr{H})$，当且仅当，$(a^*a)^{\frac{1}{4}}\in S(\mathscr{H})$. 此外，如果 $\{\xi_l\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的直交规范基，则

$$\|a\|_1=\|(a^*a)^{\frac{1}{4}}\|_2^2=\sum_l\langle(a^*a)^{\frac{1}{2}}\xi_l,\xi_l\rangle;$$

2) 如果 $a,b\in S(\mathscr{H})$，则 $ab\in T(\mathscr{H})$;

3) $a\in T(\mathscr{H})$，当且仅当，

$$\sup\left\{\sum_n|\langle a\xi_n,\eta_n\rangle|\,\Big|\,\{\xi_n\},\ \{\eta_n\}\text{是 }\mathscr{H}\text{ 的任意直交规范列}\right\}<\infty,$$

并且，这时有 $\|a\|\leqslant\|a\|_2\leqslant\|a\|_1$，及 $\|a\|_1$ 等于上面的 sup;

4) $T(\mathscr{H})$ 是 $B(\mathscr{H})$ 的 * 双侧理想，$T(\mathscr{H})\subset S(\mathscr{H})$，并且任意迹类算子是迹类正算子的线性和.

证. 如果 $\{\lambda_n\}$ 是 $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ 的正本征值全体，则 $(a^*a)^{\frac{1}{4}}$ 的正本征值全体是 $\{\lambda_n^{1/2}\}$，由此即见 1).

2) 设 $a, b \in S(\mathscr{H})$，极分解 $c = w(c^*c)^{\frac{1}{2}}$，这里 $c = ab$，由 $\sum_l \langle (c^*c)^{\frac{1}{2}}\xi_l, \xi_l \rangle = \sum_l \langle b\xi_l, a^*w\xi_l \rangle = \langle b, a^*w \rangle_2 \leqslant \|b\|_2 \|a\|_2$，即见 $c = ab \in T(\mathscr{H})$.

3) 设 $a \in T(\mathscr{H})$，极分解 $a = w(a^*a)^{\frac{1}{4}} \quad (a^*a)^{\frac{1}{4}}$，于是

$$\sum_n |\langle a\xi_n, \eta_n \rangle| \leqslant \left\{ \sum_n \|(a^*a)^{\frac{1}{4}}\xi_n\|^2 \cdot \sum_n \|(a^*a)^{\frac{1}{4}}w^*\eta_n\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \|(a^*a)^{\frac{1}{4}}\|_2 \cdot \|(a^*a)^{\frac{1}{4}}w^*\|_2 \leqslant \|a\|_1.$$

另一方面，如果取 ξ_n 为 λ_n 相应的规范本征矢，$\eta_n = w\xi_n$，这里 $\{\lambda_n\}$ 是 $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ 的正本征值全体，则 $\sum_n |\langle a\xi_n, \eta_n \rangle| = \sum_n \lambda_n = \|a\|_1$. 此外，显然有 $\left(\sum_n \lambda_n\right)^2 \geqslant \sum_n \lambda_n^2$，所以 $\|a\|_1 \geqslant \|a\|_2 \geqslant \|a\|$.

反之设 $\sup\{\cdots\} < \infty$，适当地取 $\{\xi_n\}$ 及 $\{\eta_n = w\xi_n\}$，即可见 $(a^*a)^{\frac{1}{4}} \in S(\mathscr{H})$，特别 $a \in C(\mathscr{H})$. 再仿前段，$a \in T(\mathscr{H})$.

4) 由 $a = w(a^*a)^{\frac{1}{4}} \cdot (a^*a)^{\frac{1}{4}}$ 立即可见. 证毕.

命题 1.1.11 $T(\mathscr{H})$ 依照迹范数 $\|\cdot\|_1$ 是 Banach 空间，并且 $F(\mathscr{H})$ 在其中稠.

证. 依前一命题，$\|\cdot\|_1$ 确实是 $T(\mathscr{H})$ 上的范数. 今设 $\{a_n\}$ 是依 $\|\cdot\|_1$ 的基本列，由 $\|\cdot\|_1 \geqslant \|\cdot\|$，所以有 $a \in C(\mathscr{H})$，使得 $\|a_n - a\| \to 0$.

如果 $\{\xi_k\}$，$\{\eta_k\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的任意直交规范有限列，$\sum_k |\langle (a_n - a)\xi_k, \eta_k \rangle| = \lim_m \sum_k |\langle (a_n - a_m)\xi_k, \eta_k \rangle| \leqslant \overline{\lim_m} \|a_n - a_m\|_1 < \varepsilon$（只须 n 充分大），由此可见 $a \in T(\mathscr{H})$ 及 $\|a_n - a\|_1 \to 0$.

今若 $a \in T(\mathscr{H})$，极分解 $a = w(a^*a)^{\frac{1}{2}}$，并写 $(a^*a)^{\frac{1}{2}} = \sum_n \lambda_n p_n$，其中 $\{p_n\}$ 是相互直交的一秩投影列，$\{\lambda_n\}$ 是 $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ 的正本征值全体，于是

$$\left\| a - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n w p_n \right\|_1 = \sum_{n>N} \lambda_n \to 0$$

即 $F(\mathscr{H})$ 在 $T(\mathscr{H})$ 中稠. 证毕.

注. 在 $F(\mathscr{H})$ 中，$\|\cdot\|_1 \geq \|\cdot\|_2 \geq \|\cdot\|$，分别依这三个范数完备化，得到 $T(\mathscr{H}) \subset S(\mathscr{H}) \subset C(\mathscr{H})$.

定义 1.1.12 对任意的 $a \in T(\mathscr{H})$，令

$$\operatorname{tr}(a) = \sum_{l} \langle a\xi_l, \xi_l \rangle$$

称为 a 的迹，这里 $\{\xi_l\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的任意直交规范基. 由于 a 可以写成两个 $S(\mathscr{H})$ 元的乘积，因此，迹的定义不依赖 $\{\xi_l\}$ 的选择.

命题 1.1.13 对任意的 $a \in T(\mathscr{H})$，$b \in B(\mathscr{H})$，

$$\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba), \quad |\operatorname{tr}(ab)| \leqslant \|b\| \|a\|_1.$$

证. 在命题 1.1.8 的证明中，实际已指出：$\operatorname{tr}(cd) = \operatorname{tr}(dc)$，$\forall c, d \in S(\mathscr{H})$. 今把 a 写成两个 $S(\mathscr{H})$ 元的乘积，即可见 $\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba)$.

极分解 $a = w(a^*a)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^*a)^{\frac{1}{2}}$，则

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}(ab)| &= |\langle (a^*a)^{\frac{1}{4}}, (bw(a^*a)^{\frac{1}{4}})^* \rangle_2| \leqslant \|b\| \|(a^*a)^{\frac{1}{4}}\|_2^2 \\ &= \|b\| \|a\|_1.\end{aligned}$$

证毕.

定理 1.1.14 1) $C(\mathscr{H})^* = T(\mathscr{H})$，即对任意的 $f \in C(\mathscr{H})^*$，有唯一的 $a \in T(\mathscr{H})$，使得

$$\|f\| = \|a\|_1, \quad f(c) = \operatorname{tr}(ac), \quad \forall c \in C(\mathscr{H})$$

反之对任意的 $a \in T(\mathscr{H})$，$\operatorname{tr}(a\cdot)$ 决定 $C(\mathscr{H})$ 上范为 $\|a\|_1$ 的线性泛函；

2) $T(\mathscr{H})^* = B(\mathscr{H})$，即对任意的 $f \in T(\mathscr{H})^*$，有唯一的 $b \in B(\mathscr{H})$，使得

$$\|f\| = \|b\|, \quad f(a) = \operatorname{tr}(ab), \quad \forall a \in T(\mathscr{H})$$

反之对任意的 $b \in B(\mathscr{H})$，$\operatorname{tr}(b\cdot)$ 决定 $T(\mathscr{H})$ 上范为 $\|b\|$ 的线性泛函.

证. 1) 设 $a \in T(\mathscr{H})$，$\{\lambda_n\}$ 是 $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ 的正本征值全体，ξ_n 是 λ_n 相应的规范本征矢，$\forall n$. 对正整数 N，定义有限秩算子 c：

$$cw\xi_i = \xi_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad c[w\xi_1, \cdots, w\xi_N]^\perp = \{0\}$$

这里 $a = w(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ 是极分解. 显然 $\|c\| = 1$，又

$$|\mathrm{tr}(ac)| = \left|\sum_i \langle (a^*a)^{\frac{1}{2}} cw\xi_i, \xi_i\rangle\right| = \sum_{i=1}^N \lambda_i \to \|a\|_1.$$

因此，$\mathrm{tr}(a\cdot)$ 决定 $C(\mathscr{H})$ 上范为 $\|a\|_1$ 的线性泛函.

今设 $f\in C(\mathscr{H})^*$，对于任意的一秩算子 $\xi\otimes\eta$，当固定 ξ 时，$\overline{f(\xi\otimes\eta)}$ 是 η 的有界线性泛函，因此有 $\mathscr{H}$ 的唯一元 $a\xi$，使得

$$f(\xi\otimes\eta) = \langle a\xi, \eta\rangle, \quad \forall \eta\in\mathscr{H},$$

显然 a 对于 ξ 是线性的，并且

$$\|a\| = \sup\{|\langle a\xi, \eta\rangle| \,\big|\, \|\xi\| = \|\eta\| = 1\} \leqslant \|f\|.$$

由于 $f(c) = \mathrm{tr}(ac)$，$\forall c\in F(\mathscr{H})$，因此只须证 $a\in T(\mathscr{H})$. 极分解 $a = w(a^*a)^{\frac{1}{2}}$，并设 $\{\xi_l\}_{l\in\Lambda}$ 是 w 始域的直交规范基. 对 Λ 的任意有限子集 F，$c_F = \sum_{l\in F}\xi_l\otimes w\xi_l$ 是 $\mathscr{H}$ 中范数为 1 的有限秩算子，从而

$$\left|\sum_{l\in F}\langle (a^*a)^{\frac{1}{2}}\xi_l, \xi_l\rangle\right| = |\mathrm{tr}(ac_F)| = |f(c_F)| \leqslant \|f\|.$$

F 是任意的，因此，$a\in T(\mathscr{H})$.

2) 设 $b\in B(\mathscr{H})$，注意 $\|b\| = \sup\{|\langle b\xi, \eta\rangle| \,\big|\, \|\xi\| = \|\eta\| = 1\}$ 及 $\mathrm{tr}(b\cdot\xi\otimes\eta) = \langle b\xi, \eta\rangle$ $(\forall \xi, \eta\in\mathscr{H})$，因此，$\mathrm{tr}(b\cdot)$决定 $T(\mathscr{H})$ 上范数为 $\|b\|$ 的线性泛函.

今设 $f\in T(\mathscr{H})^*$，由于

$$|f(\xi\otimes\eta)| \leqslant \|f\|\|\xi\otimes\eta\|_1 = \|f\|\|\xi\|\|\eta\|, \quad \forall \xi, \eta\in\mathscr{H},$$

所以有 $b\in B(\mathscr{H})$，使得

$$f(\xi\otimes\eta) = \langle b\xi, \eta\rangle, \quad \forall \xi, \eta\in\mathscr{H}.$$

又 $F(\mathscr{H})$ 在 $T(\mathscr{H})$ 中稠，因此，$f(a) = \mathrm{tr}(ab)$，$\forall a\in T(\mathscr{H})$. 证毕.

注 本节见参考文献 [13], [98], [99].

§2. $B(\mathscr{H})$ 中的拓扑

设 $\mathscr{H}$ 是复 Hilbert 空间，在 $B(\mathscr{H})$ 中，我们引入下列局部

凸的 Hausdorff 线性拓扑：

1）弱算子拓扑，网 $a_l \to 0$，指

$$\langle a_l\xi, \eta\rangle \to 0, \quad \forall \xi, \eta \in \mathscr{H};$$

2）强算子拓扑，网 $a_l \to 0$，指 $\|a_l\xi\| \to 0$，$\forall \xi \in \mathscr{H}$；

3）强 * 算子拓扑，网 $a_l \to 0$，指 $(\|a_l\xi\| + \|a_l^*\xi\|) \to 0$，$\forall \xi \in \mathscr{H}$；

4）σ-弱算子拓扑，网 $a_l \to 0$，指

$$\sum_n \langle a_l\xi_n, \eta_n\rangle \to 0, \quad \forall \sum_n (\|\xi_n\|^2 + \|\eta_n\|^2) < \infty$$

5）σ-强算子拓扑，网 $a_l \to 0$，指 $\sum_n \|a_l\xi_n\|^2 \to 0$，$\forall \sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$；

6）$\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$，网 $a_l \to 0$，指 $\mathrm{tr}(a_l a) \to 0$，$\forall a \in T(\mathscr{H})$，即是 $B(\mathscr{H})$ 作为 $T(\mathscr{H})$ 的共轭空间中的弱 * 拓扑；

7）$s(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$，网 $a_l \to 0$，指网 $\{a_l^* a_l\}$ 依 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 收敛于 0；

8）$s^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$，网 $a_l \to 0$，指网 $\{a_l^* a_l\}$ 与 $\{a_l a_l^*\}$ 都依 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 收敛于 0；

9）Mackey 拓扑 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$，网 $a_l \to 0$，指

$$\mathrm{tr}(a_l a) \to 0, \text{ 对 } a \in E \text{ 一致},$$

或者 0 点有邻域基形如

$$E^\circ = \{a \in B(\mathscr{H}) \,|\, |\mathrm{tr}(ab)| \leqslant 1, \forall b \in E\},$$

这里 E 是 $T(\mathscr{H})$ 的任意 $\sigma(T(\mathscr{H}), B(\mathscr{H}))$ 紧子集[1]；

10）一致拓扑，即算子范数产生的拓扑。

命题 1.2.1 1）算子的 * 运算依上面所说的拓扑 1)，3)，4)，6)，8)，9)，10) 是连续的；2）任意固定 $b \in B(\mathscr{H})$，则 $B(\mathscr{H})$ 中的映象 $\cdot \longrightarrow \cdot b$ 与 $\cdot \longrightarrow b\cdot$ 依上面所有的拓扑都是连续的；3）如果在 $B(\mathscr{H})$ 的有界（依算子范数而言）球中的网 $\{a_l\}$，$\{b_r\}$

1）$\sigma(T(\mathscr{H}), B(\mathscr{H}))$ 指 $T(\mathscr{H})$ 中（对于 $T(\mathscr{H})^* = B(\mathscr{H})$）的弱拓扑。

分别依强算子拓扑收敛于 a, b, 则网 $\{a_l b_r\}$ 也依强算子拓扑收敛于 ab.

证. 如果网 $\{a_l\}\subset T(\mathscr{H})$, 且依 $\sigma(T(\mathscr{H}), B(\mathscr{H}))$ 收敛于 0, 即 $\operatorname{tr}(a_l b)\to$, $\forall b\in B(\mathscr{H})$, 注意 $\operatorname{tr}(a_l^* b)=\overline{\operatorname{tr}(a_l b^*)}$, 所以 $\{a_l^*\}$ 也依 $\sigma(T(\mathscr{H}), B(\mathscr{H}))$ 收敛于 0. 当然对任意的 $b\in B(\mathscr{H})$, $\{a_l b\}$ 与 $\{b a_l\}$ 也依 $\sigma(T(\mathscr{H}), B(\mathscr{H}))$ 收敛于 0. 因此, 如果 E 是 $T(\mathscr{H})$ 的 $\sigma(T(\mathscr{H}), B(\mathscr{H}))$ 紧子集, 则 $E^*=\{a^*|a\in E\}$, bE 与 Eb 都是 $T(\mathscr{H})$ 的 $\sigma(T(\mathscr{H}), B(\mathscr{H}))$紧子集. 由此对拓扑 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$, 命题成立. 其余部分留给读者. 证毕.

命题 1.2.2 设 f 是 $B(\mathscr{H})$ 上的线性泛函, 则下列是相互等价的:

1) f 是 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 连续的;

2) 存在唯一的 $a\in T(\mathscr{H})$, 使得 $f(b)=\operatorname{tr}(ab)$, $\forall b\in B(\mathscr{H})$;

3) 存在 $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}\subset\mathscr{H}$, $\sum_n(\|\xi_n\|^2+\|\eta_n\|^2)<\infty$, 使得 $f(b)=\sum_n\langle b\xi_n, \eta_n\rangle$, $\forall b\in B(\mathscr{H})$.

此外, 为了 $f\geqslant 0$ (即对 $\mathscr{H}$ 中任意的正算子 b 有 $f(b)\geqslant 0$), 当且仅当, $a\geqslant 0$. 这时并可取 $\xi_n=\eta_n$, $\forall n$.

证. 由于 $T(\mathscr{H})^*=B(\mathscr{H})$, 1) 与 2) 的等价性是显然的. 这时如果 $f\geqslant 0$, 对任意的 $\xi\in\mathscr{H}$, 命 p 为 $\mathscr{H}$ 到 $[\xi]$ 上的投影, 则

$$\|\xi\|^{-2}\langle a\xi, \xi\rangle=\operatorname{tr}(ap)=f(p)\geqslant 0$$

即 $a\geqslant 0$. 反之如果 $a\geqslant 0$, 自然 $f\geqslant 0$.

2) 推导 3) 写 $a=a_1a_2$, 使得 a_1 与 $a_2^*=a_2$ 都 $\in S(\mathscr{H})$. 但 $f(b)=\operatorname{tr}(a_2ba_1)=\sum_{l\in\Lambda}\langle ba_1\xi_l, a_2\xi_l\rangle$, 这里 $b\in B(\mathscr{H})$, $\{\xi_l\}_{l\in\Lambda}$ 是 $\mathscr{H}$ 的直交规范基, 因此有 Λ 的可数子集 J, 使得 $a_1\xi_l=a_2\xi_l=0$, $\forall l\notin J$. 从而, $f(b)=\sum_{l\in J}\langle ba_1\xi_l, a_2\xi_l\rangle$, $\forall b\in B(\mathscr{H})$, 及

$\sum_{l\in J}(\|a_1\xi_l\|^2+\|a_2\xi_l\|^2)<\infty$. 这时如果 $f\geqslant 0$, 取 $a_1=a_2=a^{\frac{1}{2}}$, 则 $a_1\xi_l=a_2\xi_l$, $\forall l\in J$.

3) 推导 2) 取 $\mathscr{H}$ 的直交规范列 $\{\zeta_n\}$, 并命 $a_1\zeta_n=\xi_n$, $a_2\zeta_n=\eta_n$, $\forall n$, 及 $a_i[\zeta_n|n]^\perp=\{0\}$, $i=1,2$. 易见 $a_1,a_2\in S(\mathscr{H})$, 从而 $a=a_1a_2^*\in T(\mathscr{H})$, 以及对任意的 $b\in B(\mathscr{H})$,

$$f(b)=\sum_n\langle ba_1\zeta_n,a_2\zeta_n\rangle=\operatorname{tr}(a_2^*ba_1)=\operatorname{tr}(ab).$$

证毕.

定理 1.2.3 前面列举的诸拓扑有下面的关系:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{拓扑 6)} \sim \text{拓扑 4)} & & \\ \text{拓扑 10)} \prec \text{拓扑 9)} \prec & & \curlyvee & & \prec \text{拓扑 1)} \\ & \text{拓扑 8)} \prec & \text{拓扑 7)} \sim \text{拓扑 5)} & \prec \text{拓扑 2)} & \\ & & & \curlyvee & \\ & & & \text{拓扑 8)} \prec \text{拓扑 3)} & \end{array}$$

其中符号拓扑 i)$\prec$拓扑 j) 表示: 拓扑 i) 较之拓扑 j) 为强, 符号 $\sim$则表示拓扑等价.

证. 我们显然有: 拓扑 10) $\prec$ 拓扑 9) $\prec$拓扑 6), 拓扑 8)$\prec$拓扑 7), 拓扑 3) $\prec$ 拓扑 2) $\prec$ 拓扑 1),拓扑)5)$\prec$ 拓扑 2), 拓扑 5) $\prec$ 拓扑 4) $\prec$ 拓扑 1).

拓扑 4) 与拓扑 6) 的等价性　依命题 1.2.2 立见.

拓扑 5) 与拓扑 7) 的等价性　设网 $\{a_l\}$ 依 $s(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 收敛于 0, 由于拓扑 4) $\sim$ 拓扑 6), $\{a_l^*a_l\}$ 依 σ-弱算子拓扑收敛于 0, 特别 $\{a_l\}$ 将依 σ-强算子拓扑收敛于 0. 反之设 $\{a_l\}$ 依 σ-强算子拓扑收敛于 0, 对任何的 $0\leqslant a\in T(\mathscr{H})$, 由命题 1.2.2, 存在 $\{\xi_n\}\subset\mathscr{H}$, $\sum_n\|\xi_n\|^2<\infty$, 使得

$$\operatorname{tr}(ab)=\sum_n\langle b\xi_n,\xi_n\rangle,\ \forall b\in B(\mathscr{H})$$

因此, $\operatorname{tr}(a_l^*a_la)=\sum_n\|a_l\xi_n\|^2\to 0$, 即 $\{a_l\}$ 也是 $s(B(\mathscr{H}),$

$T(\mathscr{H})$) 收敛于 0 的.

今证明 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H})) \prec s(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H})) \prec \sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$. 依照 Mackey 定理[1)]及 $s(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H})) \sim \sigma$-强算子拓扑，只须证明：$B(\mathscr{H})$ 上任意的 σ-强算子拓扑连续的线性泛函 f 必是 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 连续的. 对这样的 f，有 0 点的 σ-强算子邻域 $U = U(0, (\xi_n^{(1)}), \cdots, (\xi_n^{(k)}), 1)$，使得 $|f(b)| \leqslant 1$, $\forall b \in U$，这里 $\sum_n \|\xi_n^{(i)}\|^2 < \infty$, $1 \leqslant i \leqslant k$. 如果命 $(\xi_n) = \bigcup_{i=1}^{k} (\xi_n^{(i)})$，则 $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$，及

$$|f(b)| \leqslant \left(\sum_n \|b\xi_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall b \in B(\mathscr{H})$$

作 $\tilde{\mathscr{H}} = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus \mathscr{H}_i$, $\mathscr{H}_i = \mathscr{H}$, $\forall i$，于是 $\xi = (\xi_n) \in \tilde{\mathscr{H}}$. 对任意的 $b \in B(\mathscr{H})$，定义 $\tilde{b}\tilde{\eta} = (b\eta_n)$, $\forall \tilde{\eta} = (\eta_n) \in \tilde{\mathscr{H}}$，则 $\tilde{b} \in B(\tilde{\mathscr{H}})$. 依此符号，$|f(b)| \leqslant \|\tilde{b}\xi\|$, $\forall b \in B(\mathscr{H})$. 特别 $\tilde{b}\xi = 0$ 时，$f(b) = 0$. 从而可以在 $\tilde{\mathscr{H}}$ 的线性子空间 $\{\tilde{b}\xi \mid b \in B(\mathscr{H})\}$ 上定义线性泛函 $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(\tilde{b}\xi) = f(b), \quad \forall b \in B(\mathscr{H}),$$

且已指出 $|\tilde{f}(\tilde{b}\xi)| = |f(b)| \leqslant \|\tilde{b}\xi\|$，因此可把 $\tilde{f}$ 连续开拓到整个 $\tilde{\mathscr{H}}$ 之上，即有 $\tilde{\eta} = (\eta_n) \in \tilde{\mathscr{H}}$，使得

$$f(b) = \tilde{f}(\tilde{b}\xi) = \langle \tilde{b}\xi, \tilde{\eta} \rangle = \sum_n \langle b\xi_n, \eta_n \rangle$$

$\forall b \in B(\mathscr{H})$. 再依命题 1.2.2， f 是 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 连续的.

$\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H})) \prec s^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 由 $*$ 运算依 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 的连续性（命题 1.2.1）及 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H})) \prec s(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 立见.

最后拓扑 8) $\prec$ 拓扑 3) 由拓扑 5) $\sim$ 拓扑 7) 立见. 证毕.

---

1) 本节中用到的一些关于 Banach 空间对偶理论的标准结果，可见参考文献 [22]，[60]

定理 1.2.4 在 $B(\mathscr{H})$ 的任意有界球中，弱算子拓扑 $\sim\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$，强算子拓扑 $\sim s(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$，强 * 算子拓扑 $\sim s^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$.

证. 设 $\|a_l\|\leqslant K$, $\forall l$, 且 $a_l\xrightarrow{\text{弱算子}}0$, 对于任意的 $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}\subset\mathscr{H}$, $\sum\limits_n(\|\xi_n\|^2+\|\eta_n\|^2)<\infty$, 则

$$\left|\sum_n\langle a_l\xi_n, \eta_n\rangle\right|\leqslant\sum_{n=1}^N|\langle a_l\xi_n, \eta_n\rangle|+\frac{K}{2}\sum_{n>N}(\|\xi_n\|^2+\|\eta_n\|^2)$$

由此即见 $\{a_l\}$ 也依 σ-弱算子拓扑收敛于 0. 其余结论相仿证明. 证毕.

以后，我们还将指出，在 $B(\mathscr{H})$ 的任意有界球中，$s^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))\sim\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$. 但另一方面，我们却有

命题 1.2.5 如果 $\mathscr{H}$ 是无穷维的，则在整个 $B(\mathscr{H})$ 中，$s^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 与 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 并不等价.

证. 设 $\{p_n\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中相互直交的非零投影无穷列，记 $K=\{\sqrt{n}\,p_n|n=1, 2,\cdots\}$. 由于任意迹类算子是迹类正算子的线性和，因此，0 点有 $s^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 的邻域基形如

$$U(0, a_1,\cdots, a_k, \varepsilon)=\{a\in B(\mathscr{H})|\operatorname{tr}((a^*a+aa^*)a_i)<\varepsilon, 1\leqslant i\leqslant k\},$$

其中 $0\leqslant a_i\in T(\mathscr{H})$, $1\leqslant i\leqslant k$. 我们说 K 与这样的每个邻域的交是非空的. 若不然，存在 $0\leqslant a_i\in T(\mathscr{H})$, $1\leqslant i\leqslant k$ 及 $\varepsilon>0$, 使得

$$n\operatorname{tr}(p_na)\geqslant\varepsilon,\quad\forall n$$

这里 $a=\sum\limits_{i=1}^k a_i\in T(\mathscr{H})$. 令 $p=\sum\limits_n p_n$, 则

$$\operatorname{tr}(pa)=\lim_N\operatorname{tr}\left(\sum_{n=1}^N p_na\right)\geqslant\lim_N\sum_{n=1}^N\frac{\varepsilon}{n}=+\infty$$

这不可能. 因此，0 点属于 K 的 $s^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 闭包.

现在只须证明 0 点并不属于 K 的 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 闭

包. 对每个 n，取 $\xi_n\in p_n\mathscr{H}$，$\|\xi_n\|=1$，于是，$c_n=\frac{2}{\sqrt{n}}\xi_n\otimes\xi_n\in T(\mathscr{H})$，并且 $\|c_n\|_1=\frac{2}{\sqrt{n}}\to 0$. 从而，$L=\{0,c_n|n=1,2,\cdots\}$ 是 $T(\mathscr{H})$ 的依迹范数的紧子集，所以也是 $\sigma(T(\mathscr{H}),B(\mathscr{H}))$ 紧的. 因此，

$$L^\circ=\{b\in B(\mathscr{H})|\quad |\mathrm{tr}(bc_n)|\leqslant 1,\ \forall n\}$$

是 0 点的 $\tau(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 邻域. 由于 $\mathrm{tr}(\sqrt{n}\,p_nc_n)=2$，$\forall n$，所以，$\sqrt{n}\,p_n\notin L^\circ$，$\forall n$，即 $K\cap L^\circ=\emptyset$. 这说明 0 点不属于 K 的 $\tau(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 闭包. 证毕.

由定理 1.2.3 与 1.2.4，并依照 Banach 空间中对偶理论的标准结果，判断 $B(\mathscr{H})$ 上线性泛函的 $\sigma(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 连续性，除去命题 1.2.2 外，我们还有

命题 1.2.6 设 f 是 $B(\mathscr{H})$ 上的线性泛函，则下列条件是相互等价的：1) f 是 $\sigma(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 连续的；2) f 是 $s(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 连续的；3) f 是 $s^*(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 连续的；4) f 是 $\tau(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 连续的；5) f 限于 $B(\mathscr{H})$ 的任意有界球是弱算子连续的；6) f 限于 $B(\mathscr{H})$ 的任意有界球是强算子连续的；7) f 限于 $B(\mathscr{H})$ 的任意有界球是强 * 算子连续的.

关于 $B(\mathscr{H})$ 上弱(或强)算子连续线性泛函，我们有

命题 1.2.7 设 f 是 $B(\mathscr{H})$ 上的线性泛函，则下列条件是相互等价的：

1) f 是弱算子连续的；

2) f 是强算子连续的；

3) 存在唯一的 $v\in F(\mathscr{H})$，使得

$$f(b)=\mathrm{tr}(bv),\quad \forall b\in B(\mathscr{H});$$

4) 存在 $\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_1,\cdots,\eta_n\in\mathscr{H}$，使得

$$f(b)=\sum_{i=1}^{n}\langle b\xi_i,\eta_i\rangle,\quad \forall b\in B(\mathscr{H}).$$

此外，$f \geqslant 0$，当且仅当，$v \geqslant 0$。这时并可选取 $\xi_i = \eta_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$。

证. 显然 3) 与 4) 是等价的，并且从 3) 或 4) 可以推导出 1) 与 2)。又强算子拓扑 $\prec$ 弱算子拓扑，所以只须由 2) 来推导 4)。

设 f 是强算子连续的，于是有 0 点的强算子邻域 $U = U(0, \zeta_1, \cdots, \zeta_m, 1) = \{b \in B(\mathscr{H}) \mid \|b\zeta_i\| \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant m\}$，使得 $|f(b)| \leqslant 1$，$\forall b \in U$。命 $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ 为 $[\zeta_1, \cdots, \zeta_m]$ 的直交规范基，于是只须 $\varepsilon > 0$ 充分小，0 点的强算子邻域 $V = U(0, \xi_1, \cdots, \xi_n, \varepsilon) \subset U$。特别，如果 $b \in B(\mathscr{H})$，$b\xi_i = 0$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则 $f(b) = 0$。

f 当然也是 $s(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 连续的，依命题 1.2.6，有 $a \in T(\mathscr{H})$，使得 $f(b) = \mathrm{tr}(ab)$，$\forall b \in B(\mathscr{H})$。如果 $\{\xi_l\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的包含 $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ 的直交规范基，取 $c \in B(\mathscr{H})$，使得

$$c\xi_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\quad c\xi_l = a^*\xi_l,\ \forall l \neq 1, \cdots, n,$$

则 $0 = f(c) = \mathrm{tr}(ac) = \sum_l \langle ac\xi_l, \xi_l\rangle = \sum_{l \neq 1, \cdots, n} \|a^*\xi_l\|^2$，因此 $a^*\xi_l = 0$，$\forall l \neq 1, \cdots, n$。今若命 $a^*\xi_i = \eta_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则

$$f(b) = \mathrm{tr}(ab) = \sum_l \langle ab\xi_l, \xi_l\rangle = \sum_{i=1}^n \langle b\xi_i, \eta_i\rangle,\ \forall b \in B(\mathscr{H}).$$

最后，关于 $f \geqslant 0$ 的结论，实际上已包含在命题 1.2.2 之中。证毕。

关于 $B(\mathscr{H})$ 的凸子集依照各种拓扑的闭性，依照命题 1.2.6，1.2.7，分离性定理与 Krein-Šmulian 定理，我们有

命题 1.2.8 设 K 是 $B(\mathscr{H})$ 的凸子集，则下列条件是相互等价的：1) K 是 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 闭的；2) K 是 $s(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 闭的；3) K 是 $s^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 闭的；4) K 是 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 闭的；5) $K \cap \lambda S$ 是弱算子闭的，$\forall \lambda > 0$；6) $K \cap \lambda S$ 是强算子闭的，$\forall \lambda > 0$；7) $K \cap \lambda S$ 是强 $*$ 算子闭的，$\forall \lambda > 0$。这里 S 是 $B(\mathscr{H})$ 的单位球。此外，如果 K 还是有界的，则条件 5)，6)，7) 中的 $K \cap \lambda S$ 可直接代以 K。

命题 1.2.9 设 K 是 $B(\mathscr{H})$ 的凸子集，则 K 依弱算子的闭包等于它依强算子的闭包；K 的弱算子闭性等价于它的强算子闭性.

作为本节的结束，我们要提到下面的命题，这在以后，是经常使用的.

命题 1.2.10 如果 $\{a_l\}$ 是 $B(\mathscr{H})$ 的由自伴元组成的有界递增网，即有常数 M，使得 $\|a_l\| \leqslant M$，$\forall l$，以及如果 $l' \geqslant l$，就有 $a_{l'} \geqslant a_l$，那么，依照强算子拓扑，$a_l \to a = \sup\limits_l a_l$.

证. 对任意的 $\xi \in \mathscr{H}$，$\{\langle a_l\xi, \xi\rangle\}$ 递增、有界，因此，$\langle a_l\xi, \xi\rangle \to \langle a\xi, \xi\rangle = \sup\limits_l \langle a_l\xi, \xi\rangle$. 由极化公式，可见 $\langle a_l\xi, \eta\rangle \to \langle a\xi, \eta\rangle$，$\forall \xi, \eta \in \mathscr{H}$. 因此，$a \in B(\mathscr{H})$，$a = \sup\limits_l a_l$，及 $a_l \xrightarrow{\text{弱算子}} a$. 又对任意的 $\xi \in \mathscr{H}$，

$$\begin{aligned}\|(a - a_l)\xi\|^2 &\leqslant \|(a - a_l)^{\frac{1}{2}}\|^2 \cdot \|(a - a_l)^{\frac{1}{2}}\xi\|^2 \\ &\leqslant 2M\langle (a - a_l)\xi, \xi\rangle \to 0,\end{aligned}$$

所以，$a_l \xrightarrow{\text{强算子}} a$. 证毕.

注 本节见参考文献 [13], [78], [79], [93], [135].

§3. vN 代数的定义

定义 1.3.1 设 $\mathscr{H}$ 是复 Hilbert 空间，$B(\mathscr{H})$ 的 $*$ 子代数 M 称为 von Neumann 代数，往后简记作 vN 代数，指

$$M = M'',$$

这里 $M' = \{b' \in B(\mathscr{H}) \mid b'a = ab', \forall a \in M\}$ (称为 M 的交换子)，而 $M'' = (M')'$.

如果 $\mathfrak{M} \subset B(\mathscr{H})$，$M$ 是包含 $\mathfrak{M}$ 的最小的 vN 代数，则称 M 为由 $\mathfrak{M}$ 生成的 vN 代数.

命题 1.3.2 设 $\mathfrak{M} \subset B(\mathscr{H})$，则 $\mathfrak{M}$ 生成的 vN 代数是 $(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}^*)''$. 此外，$(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}^*)'$ 也是 vN 代数. 特别，vN 代数的交换子是 vN 代数.

证. 显然，$(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}^*) \subset (\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}^*)''$，$(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}^*)' \subset (\mathfrak{M} \cup$

$\mathfrak{M}^*)'''$. 于是，如果 $a\in(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)'''$，则 $ab=ba$，$\forall b\in(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)''$. 特别，$ab=ba$，$\forall b\in(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)$，所以，$a\in(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)'$. 即 $(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)'=(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)'''$ 是 vN 代数. 同证 $(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)''$ 是 vN 代数. 今若 N 是任意的包含 $\mathfrak{M}$ 的 vN 代数，则 $N\supset(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)$. 于是，$N'\subset(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)'$，$N''=N\supset(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)''$. 即 $(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*)''$ 是 $\mathfrak{M}$ 生成的 vN 代数. 证毕.

命题 1.3.3 1) 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，则 M 是弱算子闭的，并且 $I\in M$. 从而，M 是 Banach 空间 $T(\mathscr{H})$ 的商空间 $T(\mathscr{H})/M_\perp$ 的共轭空间，这里

$$M_\perp=\{a\in T(\mathscr{H})\mid \mathrm{tr}(ab)=0,\ \forall b\in M\};$$

2) 设 $\{M_l\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中一族 vN 代数，则 $M=\bigcap\limits_l M_l$ 也是 vN 代数，并且 M' 由 $\bigcup\limits_l M_l'$ 生成.

证. 1) 是显然的. 今证 2). 显然下列条件是相互等价的: ① $a\in M$; ② $a\in M_l$, $\forall l$; ③ a 与 M_l' 交换, $\forall l$; ④ a 与 $\bigcup\limits_l M_l'$ 交换; ⑤ $a\in\left(\bigcup\limits_l M_l'\right)'$. 因此，$M=\left(\bigcup\limits_l M_l'\right)'$ 是 vN 代数以及 $M'=\left(\bigcup\limits_l M_l'\right)''$. 证毕.

命题 1.3.4 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数.

1) 如果 $a\in M$，$a=vh$ 是极分解，则 $v, h\in M$. 特别，$\mathscr{H}$ 到 $\overline{a\mathscr{H}}$ (a 的值域的闭包) 上的投影 $(=vv^*)\in M$;

2) 如果 a 是 M 的正规元(即 $a^*a=aa^*$)，$e(\cdot)$ 是 a 的谱测度，则 $e(\Delta)\in M$，$\forall\Delta$ 是 $\mathbf{C}$ 的 Borel 子集;

3) M 是其投影全体依一致拓扑的线性闭包，M 也是其酉元全体的线性包.

证. 1) 显然 $h=(a^*a)^{1/2}\in M$. 今设 $b'\in M'$，如果 $\xi\in[a^*\mathscr{H}]^\perp$，则 $a\xi=v\xi=0$，$ab'\xi=b'a\xi=0$，所以 $b'\xi\in[a^*\mathscr{H}]^\perp$，从而 $vb'\xi=0=b'v\xi$. 对任意的 $\eta\in\mathscr{H}$，

$$b'v(a^*a)^{1/2}\eta=b'a\eta=ab'\eta=v(a^*a)^{1/2}b'\eta=vb'(a^*a)^{1/2}\eta$$

但 $(a^*a)^{1/2}\mathscr{H}$ 在 $\overline{a^*\mathscr{H}}$ 中稠，所以 $b'v\zeta = vb'\zeta, \forall\zeta\in\overline{a^*\mathscr{H}}$. 由此，$b'v = vb'$, $\forall b'\in M'$, 即 $v\in M$.

2) 设 $b'\in M'$, 由于 $ab' = b'a$, 因此，$e(\Delta)b' = b'e(\Delta)$, 即 $e(\Delta)\in M'' = M$, $\forall\Delta$ 是 $\mathbf{C}$ 的 Borel 子集.

3) 由于M的自伴元的谱族仍然属于M，因此，M是其投影全体依一致拓扑的线性闭包. 今设 $h = h^*\in M$, $\|h\|\leqslant 1$, 于是 $(1-h^2)^{1/2}\in M$. 从而，$(h\pm i(1-h^2)^{1/2})$ 是M的酉元. 这就说明M是其酉元全体的线性包. 证毕.

命题 1.3.5 设M是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，则M的投影全体依照包含关系[1]是完全格，并且如果 $\{p_l\}_{l\in\Lambda}$ 是M的一族投影，则

$$\sup_{l\in\Lambda} p_l = (\text{强算子})\text{-}\lim_F \sup_{l\in F} p_l = \mathscr{H} \text{ 到 } \left[\bigcup_l p_l\mathscr{H}\right] \text{ 上的投影}$$

$$\inf_{l\in\Lambda} p_l = (\text{强算子})\text{-}\lim_F \inf_{l\in F} p_l = \mathscr{H} \text{ 到 } \bigcap_{l\in\Lambda} p_l\mathscr{H} \text{ 上的投影.}$$

这里 F 是 Λ 的有限子集，依包含关系成为定向指标集.

证. 首先如果 p, q 是M的投影，注意

$$\overline{[p\mathscr{H} + q\mathscr{H}]} = q\mathscr{H}\oplus\overline{[(1-q)p\mathscr{H}]},$$

由命题 1.3.4, $\mathscr{H}$ 到 $\overline{[(1-q)p\mathscr{H}]}$ 上的投影 $\in M$，从而，$\mathscr{H}$ 到 $\overline{[p\mathscr{H} + q\mathscr{H}]}$ 上的投影 $\in M$, 即 $\sup\{p, q\}\in M$. 又

$$\overline{[p\mathscr{H} + q\mathscr{H}]} = (p\mathscr{H}\cap q\mathscr{H})\oplus\overline{[(1-p)q\mathscr{H}]} \oplus\overline{[(1-q)p\mathscr{H}]}$$

因此，$\inf\{p, q\}\in M$.

进而可见，对 Λ 的任意有限子集 F，

$$\sup_{l\in F} p_l\in M, \quad \inf_{l\in F} p_l\in M.$$

今依命题 1.2.10 及M也是强算子闭的，

$$\sup_{l\in\Lambda} p_l = \sup_F \sup_{l\in F} p_l = (\text{强算子})\text{-}\lim_F \sup_{l\in F} p_l\in M.$$

同样考虑 $\{(1-\inf_{l\in F} p_l) | F$ 是 Λ 的有限子集$\}$，则可得到其余的结

---

1) 投影 p 包含 q, 指 $p\mathscr{H}\supset q\mathscr{H}$, 即 $p\geqslant q$.

论。证毕。

命题1.3.6 设M是$\mathscr{H}$中的 vN 代数，p是M的投影，则$M_p=pMp$，及 $M'_p=pM'p$ 都是 $p\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，并且$(M_p)'=M'_p$。

证。显然 $(M'_p)'\supset M_p$。设 $a\in(M'_p)'(\subset B(p\mathscr{H}))$，令

$$\bar{a}=\begin{cases}a, & \text{于 } p\mathscr{H} \text{ 中;}\\ 0, & \text{于 } (1-p)\mathscr{H} \text{ 中,}\end{cases}$$

则 $\bar{a}\in B(\mathscr{H})$.对任意的 $b'\in M'$,显然 b' 对于 $p\mathscr{H}$ 及$(1-p)\mathscr{H}$ 不变，$b'p\in M'_p$，从而 $b'\bar{a}=\bar{a}b'$，即 $\bar{a}\in M$。于是，$a=p\bar{a}p\in M_p$，因此，$M_p=(M'_p)'$ 是 $p\mathscr{H}$ 中的 vN 代数。

今只须证明M'_p是 $p\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，或只要证明 $M'_p=(M_p)'$。由于 $(M_p)'\supset M'_p$，所以，只要对任意的 $a'\in(M_p)'$，指出 $a'\in M'_p$。依命题 1.3.4，无妨设 a' 是 $p\mathscr{H}$ 中的酉算子。命 q 是 $\mathscr{H}$ 中的投影，使得 $q\mathscr{H}=\overline{[Mp\mathscr{H}]}$。易见 $q\in M\cap M'$。又命

$$\begin{cases}v'\sum_i a_i\xi_i=\sum_i a_ia'\xi_i, & \forall\, \xi_i\in p\mathscr{H},\ a_i\in M;\\ v'(1-q)\xi=0, & \forall\, \xi\in\mathscr{H}.\end{cases}$$

由于 $a'\in(M_p)'$，及 a' 是 $p\mathscr{H}$ 中的酉算子，于是

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_i a_ia'\xi_i\Big\|^2&=\sum_{i,j}\langle a_ipa'\xi_i,\ a_jpa'\xi_j\rangle\\ &=\sum_{i,j}\langle pa_j^*a_ipa'\xi_i,\ a'\xi_j\rangle\\ &=\sum_{i,j}\langle pa_j^*a_ip\xi_i,\ a'^*a'\xi_j\rangle\\ &=\Big\|\sum_i a_i\xi_i\Big\|^2.\end{aligned}$$

从而，v' 可扩充为$\mathscr{H}$中以 $q\mathscr{H}$ 为始域的部分等距算子。对任意的 $a\in M$，

$$\begin{cases}v'a\sum_i a_i\xi_i=\sum_i aa_ia'\xi_i=av'\sum_i a_i\xi_i, & \forall\xi_i\in p\mathscr{H},\ a_i\in M;\\ v'a(1-q)\xi=v'(1-q)a\xi=0=av'(1-q)\xi, & \forall\,\xi\in\mathscr{H},\end{cases}$$

因此，$v' \in M'$. 对任意的 $\xi \in p\mathscr{H}$，依 v' 的定义，$v'\xi = a'\xi$，即 $a' = v'p \in M'_p$. 证毕.

定义 1.3.7 设M是 vN 代数，称 $Z = M \cap M'$ 为M的中心. 如果 $Z = \mathbf{C}$，称这样的 vN 代数为因子.

命题 1.3.8 设M是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，Z 是它的中心，p 是M的投影，则 $M_p \cap M'_p = Zp$. 特别，如果M是因子，则 M_p 与 M'_p 也是($p\mathscr{H}$ 中的)因子. 此外，如果 q 是 M_p 的中心投影，则存在M的中心投影 z，使得 $q = zp$.

证. 显然 $Zp \subset M_p \cap M'_p$. 反之，设 $a \in M_p \cap M'_p$，于是有 $b' \in M'$，使得 $a = b'p$. 记 r 为 $\mathscr{H}$ 到 $[Mp\mathscr{H}]$ 上的投影，则 $r \in Z$，$r \geqslant p$. 由此，$a = b'p = (b'r)p$. 如果替代 b' 以 $b'r$，可以认为 $b'r = b'$. 今设 a' 是M'的任意元，则

$$b'a'p = b'p \cdot a'p = aa'p = a'ap = a'b'p.$$

即 $(a'b' - b'a')p = 0$. 进而 $(a'b' - b'a')r = 0$，但 $b'r = b'$，所以 $a'b' = b'a'$，$\forall a' \in M'$，即 $b' \in Z$，从而，$a = b'p \in Zp$.

今设 q 是 M_p 的中心投影，依上面，有 $z \in Z$，使得 $q = zp$. 自然 $q = \dfrac{1}{2}(z + z^*)p$，所以可认为 $z = z^*$. 亦如前面，可设 $z = zr$. 由于 $q^2 = q$，于是 $(z^2 - z)p = 0$. 进而 $(z^2 - z)r = 0$，即 $z^2 = z$ 是M的中心投影. 证毕.

定理 1.3.9 设M是 $B(\mathscr{H})$ 的$*$子代数，$\overline{M}^w$ 是M的弱算子闭包，则

$$\overline{M}^w = \{a \mid a \in M'', \ ap_0 = p_0a = a\}.$$

这里 p_0 是 $\mathscr{H}$ 到 $[M\mathscr{H}]$ 上的投影，并且 $p_0 \in M' \cap M''$ 以及 $(1 - p_0)\mathscr{H} = \{\xi \in \mathscr{H} \mid a\xi = 0, \ \forall a \in M\}$. 特别，当$M$还是非退化的(即 $p_0 = 1$)，则 $\overline{M}^w = M''$.

证. 依 p_0 的定义，$p_0a = a$，$\forall a \in M$. 因此

$$p_0a = ap_0 = a, \ \forall a \in \overline{M}^w.$$

显然，$\overline{M}^w \subset M''$，$p_0 \in M' \cap M''$ 及 $(1 - p_0)\mathscr{H}$ 是 M 的零子空间.

今设 $a \in \mathscr{M}''$，$p_0 a = a p_0 = a$ 及 $U(a, \xi_1, \cdots, \xi_n, \varepsilon)$ 为 a 的任意强算子邻域．命

$$\tilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H} \oplus \cdots \oplus \mathscr{H} \ (n\text{ 个})$$

及 $\tilde{p} = (p'_{ik})_{1 \leq i,k \leq n}$ 是 $\tilde{\mathscr{H}}$ 到 $\overline{[(b\xi_1, \cdots, b\xi_n) | b \in M]}$ 上的投影，这里 $p'_{ik} \in B(\mathscr{H})$，$\forall i, k$．对任意的 $b \in M$，令

$$\tilde{b}\tilde{\eta} = (b\eta_1, \cdots, b\eta_n), \ \forall \tilde{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \tilde{\mathscr{H}},$$

则 $\tilde{b} \in B(\tilde{\mathscr{H}})$．显然，$\tilde{b}$ 对 $\tilde{p}\tilde{\mathscr{H}}$ 是不变的，所以 $\tilde{b}\tilde{p} = \tilde{p}\tilde{b}$，$\forall b \in M$．由此，$p'_{ik} \in M'$，$\forall i, k$．由于 $\tilde{p}\tilde{b}\tilde{\xi} = \tilde{b}\tilde{\xi}$，$\forall b \in M$，这里 $\tilde{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$[1]，因此

$$b\xi_i = \sum_{k=1}^{n} p'_{ik} b \xi_k = b \sum_{k=1}^{n} p'_{ik}\xi_k, \ 1 \leq i \leq n, b \in M.$$

所以，$\left(\xi_i - \sum_k p'_{ik}\xi_k\right) \in (1 - p_0)\mathscr{H}$，$1 \leq i \leq n$．但 $a(1 - p_0) = 0$，因此

$$a\xi_i - \sum_k p'_{ik} a \xi_k = 0, \ 1 \leq i \leq n.$$

即 $(a\xi_1, \cdots, a\xi_n) \in \tilde{p}\tilde{\mathscr{H}}$．今依 $\tilde{p}$ 的定义，对上面的 $\varepsilon > 0$，便有 $b \in M$，使得

$$\|b\xi_i - a\xi_i\| < \varepsilon, \ 1 \leq i \leq n.$$

即 $U(a, \xi_1, \cdots, \xi_n, \varepsilon) \cap M \neq \phi$，从而，$a \in M$ 的强算子闭包 $= \overline{M}^w$（命题 1.2.9）．证毕．

今依照定理 1.3.9，我们有如下的 vN 代数的等价定义

定理 1.3.10 （von Neumann 二次交换子定理） 设 M 是 $B(\mathscr{H})$ 的 $*$ 子代数，则 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，必须且只须，M 是弱算子闭的，并且 $1 \in M$．

现在简单考虑一下 vN 代数中的拓扑问题．设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数．在 $B(\mathscr{H})$ 中，我们曾引入许多线性拓扑，它们相应可以在 M 中产生诱导拓扑．除此之外，由命题 1.3.3，

$$M = (M_*)^*, \ M_* = T(\mathscr{H})/M_\perp.$$

---

1) 算子矩阵作用于 $\tilde{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$，应把 $\tilde{\eta}$ 理解作列矢．

因此，在M中，利用M_*，还可以引入拓扑：

1) $\sigma(M, M_*)$ 即M中(对于M_*)的弱*拓扑；

2) $s(M, M_*)$ 网 $a_l \to 0$，指 $\{a_l^* a_l\}$ 依 $\sigma(M, M_*)$ 收敛于 0；

3) $s^*(M, M_*)$ 网 $a_l \to 0$，指 $\{a_l^* a_l\}$ 与 $\{a_l a_l^*\}$ 都依 $\sigma(M, M_*)$ 收敛于 0；

4) $\tau(M, M_*)$ 即M中(对于M_*)的 Mackey 拓扑。显然，在M中，我们有下列的关系：

$\sigma(M, M_*) \sim \sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))|M \sim \sigma$-弱算子拓扑$|M$，

$s(M, M_*) \sim s(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))|M \sim \sigma$-强算子拓扑$|M$，

$s^*(M, M_*) \sim s^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))|M$，

$$\tau(M, M_*) \prec \tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))|M,$$

这里 $\mathscr{T}|M$ 表示 $B(\mathscr{H})$ 中的拓扑 $\mathscr{T}$ 在M中的限制。此外，关于M的凸子集的闭性，M上线性泛函的连续性，可以把本章§2中相应的结果移植过来，这里不再赘述。

注 本节见参考文献[13]，[78]。

§4. vN 代数的张量积

首先讨论 Hilbert 空间的张量积。

设 $\mathscr{H}_1$，$\mathscr{H}_2$ 是 Hilbert 空间，令

$$\mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2 = \left\{ u = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(1)} \otimes \xi_j^{(2)} \,\middle|\, \begin{array}{l} n = 1, 2, \cdots, \\ \xi_j^{(i)} \in \mathscr{H}_i,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ i = 1, 2 \end{array} \right\}.$$

如果在这个集合中定义了零元(亦即引入一种等价关系)，则它将成为线性空间。我们说 $u = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(1)} \otimes \xi_j^{(2)}$ 是零元，记作 $u = 0$，指

$$\langle u, \eta_1 \otimes \eta_2 \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \xi_j^{(1)}, \eta_1 \rangle \cdot \langle \xi_j^{(2)}, \eta_2 \rangle = 0,$$

$\forall \eta_1 \in \mathscr{H}_1$，$\eta_2 \in \mathscr{H}_2$。不难证明，这个定义等价于如下的作法。如

果取 $\mathscr{H}_1$ 的线性子空间 $[\xi_1^{(2)}, \cdots, \xi_n^{(2)}]$ 的基 $\{\zeta_1, \cdots, \zeta_m\}$，并设 $\xi_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}\zeta_k$，$1 \leqslant j \leqslant n$，则 $u = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(1)} \otimes \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}\zeta_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk}\xi_j^{(1)}\right) \otimes \zeta_k$ 是 $\mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2$ 的零元，等价于在 $\mathscr{H}_1$ 中，

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk}\xi_j^{(1)} = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant m.$$

同样的作法也可以对 $\{\xi_j^{(1)}\}$ 来进行。

现在在线性空间 $\mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2$ 中引入双线性泛函

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j,k} \langle \xi_j^{(1)}, \eta_k^{(1)} \rangle \cdot \langle \xi_j^{(2)}, \eta_k^{(2)} \rangle.$$

这里 $u = \sum_j \xi_j^{(1)} \otimes \xi_j^{(2)}$，$v = \sum_k \eta_k^{(1)} \otimes \eta_k^{(2)}$。今指出，对任意的 $u = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(1)} \otimes \xi_j^{(2)} \in \mathscr{H}_1 \odot \mathscr{H}_2$，有 $\langle u, u \rangle \geqslant 0$。事实上，对任意的复数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，

$$\sum_{i,j} \langle \xi_j^{(1)}, \xi_i^{(1)} \rangle \lambda_j \bar{\lambda}_i = \left\| \sum_i \lambda_i \xi_i \right\|^2 \geqslant 0.$$

因此，矩阵

$$(\langle \xi_i^{(1)}, \xi_j^{(1)} \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

是非负的。从而有 n 阶酉矩阵 (u_{ij})，使得

$$(u_{ij})^* \cdot (\langle \xi_i^{(1)}, \xi_j^{(1)} \rangle) \cdot (u_{ij}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix},$$

其中 $\mu_i \geqslant 0$，$1 \leqslant i \leqslant n$，于是

$$\langle \xi_i^{(1)}, \xi_j^{(1)} \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}\mu_k \overline{u_{jk}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \overline{\alpha_{jk}}.$$

这里 $\alpha_{ik} = u_{ik}\sqrt{\mu_k}$，$\forall i, k, j$。同样可写

$$\langle \xi_i^{(2)}, \xi_j^{(2)} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} \overline{\beta_{jk}},\ \forall i, j.$$

从而

$$\langle u, u\rangle = \sum_{i,j} \langle \xi_j^{(1)}, \xi_i^{(1)}\rangle \cdot \langle \xi_j^{(2)}, \xi_i^{(2)}\rangle$$

$$= \sum_{k,l} \left(\sum_i \alpha_{ik}\beta_{il}\right)\overline{\left(\sum_j \alpha_{jk}\beta_{jl}\right)} \geq 0.$$

此外，如果 $\langle u, u\rangle = 0$，依 Schwartz 不等式

$$\langle u, \eta_1\otimes\eta_2\rangle \leq \langle u, u\rangle^{1/2}\|\eta_1\|\|\eta_2\|, \quad \forall \eta_i \in \mathscr{H}_i, \quad i = 1, 2.$$

说明 u 正是依前面意义的零元。所以，$<,>$是 $\mathscr{H}_1\odot\mathscr{H}_2$ 上的内积。

定义 1.4.1 $\mathscr{H}_1\odot\mathscr{H}_2$ 依$<,>$的完备化，所得的 Hilbert 空间称为 $\mathscr{H}_1$ 与 $\mathscr{H}_2$ 的张量积，记作 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$。

命题 1.4.2 设 $a_i \in B(\mathscr{H}_i)$，$i = 1, 2$，则在 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 中有唯一的有界线性算子，记作 $a_1\otimes a_2$，使得

$$(a_1\otimes a_2)(\xi_1\otimes\xi_2) = a_1\xi_1\otimes a_2\xi_2, \quad \forall \xi_i \in \mathscr{H}_i, \quad i = 1, 2$$

并且 $\|a_1\otimes a_2\| = \|a_1\|\cdot\|a_2\|$。

证．对任意的 $u = \sum_j \xi_j^{(1)}\otimes\xi_j^{(2)} \in \mathscr{H}_1\odot\mathscr{H}_2$，设其中 $\{\xi_j^{(2)}\}_j$ 是 $\mathscr{H}_2$ 的直交规范系，于是

$$\|(a_1\otimes 1_2)u\|^2 = \sum_j \|a_1\xi_j^{(1)}\|^2 \leq \|a_1\|^2 \sum_j \|\xi_j^{(1)}\|^2 = \|a_1\|^2\|u\|^2.$$

从而，$a_1\otimes 1_2$ 可唯一开拓为 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 中的有界线性算子．对于 $1_1\otimes a_2$ 相仿．从而，$a_1\otimes a_2 = (a_1\otimes 1_2)(1_1\otimes a_2)$ 可唯一定义为 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 中的有界线性算子，满足要求，并且 $\|a_1\otimes a_2\| \leq \|a_1\|\cdot\|a_2\|$。另一方面，

$$\|a_1\otimes a_2\| \geq \sup\{\|a_1\xi_1\|\cdot\|a_2\xi_2\| \mid \xi_i \in \mathscr{H}_i, \|\xi_i\| \leq 1, i = 1, 2\}$$
$$= \|a_1\|\cdot\|a_2\|.$$

证毕．

对于 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$，还可以用 Hilbert 直和的方法来描述．取 $\{e_l \mid l \in \mathbf{I}\}$ 为 $\mathscr{H}_2$ 的直交规范基，这里 $^{\#}\mathbf{I}$[1] $= \dim\mathscr{H}_2$，令

$$\mathscr{H}^{(l)} = \{\xi\otimes e_l \mid \xi \in \mathscr{H}_1\}, \quad \forall l \in \mathbf{I},$$

1）对任意集合 $\mathbf{I}$，$^{\#}\mathbf{I}$ 表示它的势．

易见 $\mathscr{H}^{(l)}$(与 $\mathscr{H}_1$ 同构)是 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 的闭子空间，且

$$\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2=\sum_{l\in\mathrm{I}}\oplus\mathscr{H}^{(l)}.$$

今命 $u_l\xi=\xi\otimes e_l$, $\forall\xi\in\mathscr{H}_1$, 则 u_l 是 $\mathscr{H}_1$ 到 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 中的等距线性映象，其值域为 $\mathscr{H}^{(l)}$. 于是，u_l^* 是 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 到 $\mathscr{H}_1$ 的连续线性映象，使得 $u_l^*\mathscr{H}^{(l')}=\{0\}$, $\forall l'\neq l$ 及 u_l^* 等距地映 $\mathscr{H}^{(l)}$ 为 $\mathscr{H}_1$. 此外，显然 $u_l^*u_l$ 是 $\mathscr{H}_1$ 中的恒等映象，而 $p_l=u_lu_l^*$ 是 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 到 $\mathscr{H}^{(l)}$ 上的投影以及 $\sum\limits_{l\in\mathrm{I}}p_l=1$.

设 $a\in B(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2)$, 令 $a_{ll'}=u_l^*au_{l'}\in B(\mathscr{H}_1)$, 则 a 将由算子阵 $(a_{ll'})_{l,l'\in\mathrm{I}}$ 完全决定。事实上，对任意的 $\xi\in\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$,

$$a\xi=\sum_l(u_l^*a\xi)\otimes e_l=\sum_l\left(\sum_{l'}a_{ll'}\xi_{l'}\right)\otimes e_l,$$

其中 $\xi_{l'}=u_{l'}^*\xi\in\mathscr{H}_1$. 由此，如果把 $\mathscr{H}^{(l)}$ 与 $\mathscr{H}_1$ 等同起来，就可写

$$a=(a_{ll'})_{l,l'\in\mathrm{I}}.$$

引理 1.4.3 如果 $a_{ll'}\in B(\mathscr{H}_1)$, $\forall l,l'$, 则欲 $a=(a_{ll'})\in B(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2)$, 当且仅当，存在常数 K, 使得对 I 的任意有限子集 E, F 及 $\{\xi_l\,|\,l\in F\}\subset\mathscr{H}_1$, 有

$$\sum_{l\in E}\left\|\sum_{l'\in F}a_{ll'}\xi_{l'}\right\|^2\leqslant K^2\sum_{l'\in F}\|\xi_{l'}\|^2.$$

证. 必要性显然. 今设 $\xi=\sum\limits_{l\in\mathrm{I}}\xi_l\otimes e_l\in\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$, 则 $\sum\limits_{l\in\mathrm{I}}\|\xi_l\|^2<\infty$. 于是，对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 I 的有限子集 F_ε, 使得 $\sum\limits_{l\notin F_\varepsilon}\|\xi_l\|^2<\varepsilon$. 从而对任意的 $l\in\mathrm{I}$, 以及 I 的有限子集 $F_i\supset F_\varepsilon$, $i=1,2$, 依充分性条件，

$$\left\|\sum_{l'\in F_1}a_{ll'}\xi_{l'}-\sum_{l'\in F_2}a_{ll'}\xi_{l'}\right\|^2\leqslant K^2\sum_{l'\notin F_\varepsilon}\|\xi_{l'}\|^2<K^2\varepsilon.$$

因此，对每个 $l\in\mathrm{I}$, 级数 $\sum\limits_{l'}a_{ll'}\xi_{l'}$ 在 $\mathscr{H}_1$ 中收敛. 今由

$$\sum_{l\in E}\left\|\sum_{l'\in F}a_{ll'}\xi_{l'}\right\|^2\leqslant K^2\sum_{l'\in F}\|\xi_{l'}\|^2,$$

先对 F 取极限，再对 E 取极限，即见 $(a_{ll'})$ 决定 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 中的连续线性算子. 证毕.

引理 1.4.4 设 $a=(a_{ll'})$, $b=(b_{ll'})\in B(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2)$, 则

$$ab=\left(\sum_{l''}a_{ll''}b_{l''l'}\right),$$

其中对每个 l, l', 级数 $\sum\limits_{l''}a_{ll''}b_{l''l'}$ 依 $\mathscr{H}_1$ 中的强算子拓扑收敛.

证. 由于 $\sum\limits_l p_l=\sum\limits_l u_lu_l^*=1$ 在 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 中依强算子拓扑收敛，从而依强算子拓扑有

$$u_l^*abu_{l'}=u_l^*a\left(\sum_{l''}u_{l''}u_{l''}^*\right)bu_{l'}=\sum_{l''}a_{ll''}b_{l''l'}.\quad 证毕.$$

引理 1.4.5 设 $a_i\in B(\mathscr{H}_i)$, $i=1,2$, 并且 a_2 在基 $\{e_l\}_{l\in\mathrm{I}}$ 中有矩阵表示 $(\lambda_{ll'})$, 则

$$a_1\otimes a_2=(\lambda_{ll'}a_1).$$

特别, $a_1\otimes 1_2=(\delta_{ll'}a_1)$.

证. 对任意的 $\xi\in\mathscr{H}_1$,

$$\begin{aligned}u_l^*(a_1\otimes a_2)u_{l'}\xi&=u_l^*(a_1\otimes a_2)\xi\otimes e_{l'}=u_l^*(a_1\xi\otimes a_2e_{l'})\\&=u_l^*\left(a_1\xi\otimes\sum_{l''}\lambda_{l''l'}e_{l''}\right)\\&=\sum_{l''}u_l^*(a_1\xi\otimes\lambda_{l''l'}e_{l''})=\lambda_{ll'}a_1\xi,\end{aligned}$$

即 $u_l^*(a_1\otimes a_2)u_{l'}=\lambda_{ll'}a_1$, $\forall l, l'$. 证毕.

引理 1.4.6 在 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 中,

$$\{u_lu_{l'}^*\mid l, l'\in\mathrm{I}\}'=\{a_1\otimes 1_2\mid a_1\in B(\mathscr{H}_1)\}.$$

证. 对任意的 s, $t\in\mathrm{I}$, 依引理 1.4.5,

$$\begin{aligned}u_s^*(a_1\otimes 1_2)(u_lu_{l'}^*)u_t&=\sum_{l''}(u_s^*(a_1\otimes 1_2)u_{l''})\cdot(u_{l''}^*u_lu_{l'}^*u_t)\\&=\delta_{sl}\delta_{l't}a_1\\&=\sum_{l''}(u_s^*u_l)(u_{l'}^*u_{l''})\delta_{l''t}a_1\end{aligned}$$

$$= u_l^*(u_l u_{l'}^*)(a_1 \otimes 1_2) u_l.$$

因此，$a_1 \otimes 1_2 \in \{u_l u_{l'}^* | l, l' \in \mathrm{I}\}'$，$\forall a_1 \in B(\mathscr{H}_1)$。

反之，设 $a \in \{u_l u_{l'}^* | l, l' \in \mathrm{I}\}'$. 如果 $l \neq l'$，则

$$u_l^* a u_{l'} = u_l^* a (u_{l'} u_{l'}^*) u_{l'} = (u_l^* u_{l'}) u_{l'}^* a u_{l'} = 0,$$

$$u_l^* a u_l = u_{l'}^* (u_{l'} u_l^*) a u_l = u_{l'}^* a u_{l'} u_l^* u_l = u_{l'}^* a u_{l'}$$

今命 $a_1 = u_l^* a u_l \in B(\mathscr{H}_1)$，依上可见它不依赖于 l 的选择，并且依引理 1.4.5，

$$a = (\delta_{ll'} a_1) = a_1 \otimes 1_2. \qquad \text{证毕.}$$

现在讨论 vN 代数的张量积。

定义 1.4.7 设 M_i 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_i$ 中的 vN 代数，$i=1, 2$. 在 $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ 中，由集合 $\{a_1 \otimes a_2 | a_i \in M_i, i = 1, 2\}$ 生成的 vN 代数，称为 M_1 与 M_2 的（vN 代数的）张量积，记作 $M_1 \overline{\otimes} M_2$，即

$$M_1 \overline{\otimes} M_2 = \{a_1 \otimes a_2 | a_i \in M_i, i = 1, 2\}''.$$

例如，依引理 1.4.6，我们有

$$B(\mathscr{H}_1) \overline{\otimes} \mathbb{C}1_2 = \{a_1 \otimes 1_2 | a_1 \in B(\mathscr{H}_1)\}.$$

命题 1.4.8 设 M_1 是 $\mathscr{H}_1$ 中的 vN 代数，则

$$M_1 \overline{\otimes} B(\mathscr{H}_2) = \{a \in B(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2) | a = (a_{ll'}), a_{ll'} \in M_1, \forall l, l'\}.$$

证. 显然右边集合是 $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ 中的 vN 代数（引理 1.4.4），从而由引理 1.4.5，

$$M_1 \overline{\otimes} B(\mathscr{H}_2) \subset \text{右边集合}.$$

今设 $a = (a_{ll'}) \in B(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$，并且 $a_{ll'} \in M_1$，$\forall l, l'$. 如果 E, F 是 I 的有限子集，令

$$a_{ll'}^{(E,F)} = \begin{cases} a_{ll'}, & \text{如 } l \in E, l' \in F; \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \qquad a_{ll'}^{(E)} = \begin{cases} a_{ll'}, & \text{如} l \in E; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

及 $a_{E,F} = (a_{ll'}^{(E,F)})$，$a_E = (a_{ll'}^{(E)})$. 由引理 1.4.3，可见 $a_{E,F}$ 及 $a_E \in B(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$. 此外，对任意的 $s, t \in \mathrm{I}$，依引理 1.4.5，$a_{st} \otimes (\delta_{sl} \cdot \delta_{tl'}) = (a_{st} \delta_{sl} \delta_{tl'}) \in M_1 \overline{\otimes} B(\mathscr{H}_2)$. 从而 $a_{E,F} = \sum_{s \in E, t \in F} (a_{st} \delta_{sl}$

$\cdot B_{ij'}) \in M_1 \overline{\otimes} B(\mathscr{H}_2)$. 也不难证明，依 $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ 中的弱算子拓扑，

$$a_{E,F} \to a_E, \quad a_E \to a.$$

所以，$a \in M_1 \overline{\otimes} B(\mathscr{H}_2)$. 证毕.

我们已经定义了 $M_1 \overline{\otimes} M_2$，自然要猜想

$$(M_1 \overline{\otimes} M_2)' = M_1' \overline{\otimes} M_2',$$

为此，需要作仔细的考虑.

设 $\mathscr{H}$ 是复 Hilbert 空间，其内积是 $\langle , \rangle$. 如果把 $\mathscr{H}$ 看作实线性空间，并定义 $\langle , \rangle_r = \mathrm{Re}\langle , \rangle$，则 $(\mathscr{H}, \langle , \rangle_r)$ 成为实 Hilbert 空间. 本节的以下部分，提到的"直交余"，"⊥"等概念，均依 $\langle , \rangle_r$ 而言.

引理 1.4.9 设 M，N 是 $B(\mathscr{H})$ 的 $*$ 子代数，且都包含 1. 又设 $M \subset N'$，并且 M 在 $\mathscr{H}$ 中有循环矢 ξ（指 $\overline{M\xi} = \mathscr{H}$），则下列条件相互等价:

1) $M' = N''$;

2) $(M_h\xi + iN_h\xi)$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠;

3) $(M_h\xi)^\perp = i\,\overline{N_h\xi}$,

其中 M_h，N_h 分别是 M，N 的自伴元全体.

证. 设 $t' \in (M')_h$，$a \in M_h$，于是 $t'a = at'$ 仍然是自伴的，所以，$\mathrm{Im}\langle a\xi, t'\xi\rangle = 0$. 进而，$\langle a\xi, it'\xi\rangle_r = 0$. 因此，$i(M')_h\xi \subset (M_h\xi)^\perp$. 又 $M \subset N'$，$N \subset N'' \subset M'$，从而，$iN_h\xi \subset (M_h\xi)^\perp$.

设 3) 成立. 于是

$$\overline{(M_h\xi + iN_h\xi)} \supset M_h\xi + i\overline{N_h\xi} = M_h\xi + (M_h\xi)^\perp.$$

因此，由 3) 可以得到 2).

设 2) 成立. 由于 $iN_h\xi \subset (M_h\xi)^\perp$，依 2)，$iN_h\xi$ 在 $(M_h\xi)^\perp$ 中稠，即由 2) 可以得到 3).

设 2)，3) 成立. 已经指出 $(M')_h\xi \subset i(M_h\xi)^\perp$，由 3)，$(M')_h\xi \subset \overline{N_h\xi}$. 于是如果 $t' \in (M')_h$，则有 $b_n \in N_h$，使得 $\|t'\xi - b_n\xi\| \to 0$. 设 $s' \in N'$，a，$c \in M$，由于 $M \subset N'$，

$$\langle s't'a\xi, c\xi\rangle = \lim_n\langle s'ab_n\xi, c\xi\rangle = \lim_n\langle s'a\xi, cb_n\xi\rangle$$
$$= \langle s'a\xi, ct'\xi\rangle = \langle t's'a\xi, c\xi\rangle,$$
但 ξ 是 M 的循环矢，因此，$s't' = t's'$，$\forall s'\in N'$。从而 $t'\in N''$，即 $M'\subset N''$。但 $M\subset N'$，所以，$M' = N''$。

今设 1) 成立。如果 $\eta\in(M_h\xi + iN_h\xi)^\perp$，我们必须证明 $\eta = 0$。

在复 Hilbert 空间 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{H}$ 中，令
$$M_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\middle| a\in M\right\}.$$
由于 $M' = N''$，易见
$$M_2' = \left\{\begin{pmatrix} b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}\middle| b_i\in N'', 1\leqslant i\leqslant 4\right\},$$
又命 P 是 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{H}$ 到 $\overline{M_2(\xi,\eta)}$ 上的投影，则 $P\in M_2'$，从而可写
$$P = \begin{pmatrix} p & r\\ r^* & q\end{pmatrix},$$
其中 $p = p^*$，$q = q^*$ 及 r 都 $\in N''$。由于 $P(\xi,\eta) = (\xi,\eta)$[1]，所以有
$$p\xi + r\eta = \xi. \tag{1}$$
由于 $\eta\perp M_h\xi$，即 $\mathrm{Re}\langle\eta, a\xi\rangle = 0$，$\forall a\in M_h$，因此
$$\langle\eta, a\xi\rangle = -\langle a\xi,\eta\rangle = -\langle\xi, a\eta\rangle,\ \forall a\in M_h.$$
进而 $\langle\eta, a\xi\rangle = -\langle\xi, a\eta\rangle$，$\forall a\in M$，即
$$\left\langle\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right\rangle = 0,\ \forall a\in M.$$
所以，$P(\eta,\xi) = 0$，从而
$$p\eta + r\xi = 0. \tag{2}$$
又由于 $\eta\perp iN_h\xi$，即 $\mathrm{Re}\langle\eta, ib\xi\rangle = \mathrm{Im}\langle\eta, b\xi\rangle = 0$，$\forall b\in N_h$，所以 $\langle\eta, b\xi\rangle = \langle b\xi,\eta\rangle = \langle\xi, b\eta\rangle$，$\forall b\in N_h$。进而

---

1) P 作用于 (ξ,η)，应把 (ξ,η) 理解为列矢。

$$\langle \eta, b\xi \rangle = \langle \xi, b\eta \rangle, \ \forall b \in N'' = M'. \tag{3}$$

由 (1), (2), (3),

$$\langle \eta, p\eta \rangle = -\langle \eta, r\xi \rangle = -\langle \xi, r\eta \rangle$$
$$= -\langle \xi, (1-p)\xi \rangle. \tag{4}$$

由于 $P, (1-P)$ 都是投影，从而，$p = p^2 + rr^*$，$(1-p) = (1-p)^2 + rr^*$. 将这两个关系式代人 (4)，得到

$$0 \leqslant \|p\eta\|^2 + \|r^*\eta\|^2 = -(\|(1-p)\xi\|^2 + \|r^*\xi\|^2) \leqslant 0.$$

所以，$p\eta = (1-p)\xi = 0$. 由于 $(1-p) \in N'' = M'$，及 ξ 是 M 的循环矢，于是，$(1-p) = 0$，$p = 1$. 进而，$\eta = 0$. 证毕.

引理 1.4.10 设 $\mathscr{H}_j$ 是复 Hilbert 空间，H_j 是 $\mathscr{H}_j$ 的实线性闭子空间，并且 $(H_j + iH_j)$ 在 $\mathscr{H}_j$ 中稠，$j = 1, 2$. 则

$$H_1 \otimes H_2 + i(H_1^\perp \otimes H_2^\perp) = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2,$$

这里 $H_1 \otimes H_2$ 是集合 $\{\xi_1 \otimes \xi_2 | \xi_1 \in H_1, \xi_2 \in H_2\}$ 在 $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ 中张成的实线性子空间的闭包，$H_1^\perp \otimes H_2^\perp$ 作同样理解.

证. 如果 $\xi_j \in H_j$，$\eta_j \in H_j^\perp$，$j = 1, 2$，则 $\xi_1 \otimes \xi_2 \perp i\eta_1 \otimes \eta_2$. 从而，$(H_1 \otimes H_2) \perp i(H_1^\perp \otimes H_2^\perp)$. 现在只须对 $\xi \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$，并且 $\xi \perp (H_1 \otimes H_2 + i(H_1^\perp \otimes H_2^\perp))$，证明 $\xi = 0$.

定义 $\mathscr{H}_1$ 到 $\mathscr{H}_2$ 中的映象 t，使得

$$\langle t\xi_1, \xi_2 \rangle_r = \langle \xi, \xi_1 \otimes \xi_2 \rangle_r, \ \forall \xi_1 \in \mathscr{H}_1, \ \xi_2 \in \mathscr{H}_2,$$

易见 t 是有界实线性的. 注意

$$\langle t(i\xi_1), \xi_2 \rangle_r = \langle \xi, i\xi_1 \otimes \xi_2 \rangle_r = \langle \xi, \xi_1 \otimes i\xi_2 \rangle_r$$
$$= \langle t\xi_1, i\xi_2 \rangle_r = \langle -it\xi_1, \xi_2 \rangle_r.$$

因此

$$t(i\xi_1) = -it\xi_1, \ t^*(i\xi_2) = -it^*\xi_2, \ \forall \xi_1 \in \mathscr{H}_1, \ \xi_2 \in \mathscr{H}_2. \tag{1}$$

如果 $\xi_j \in H_j$，$j = 1, 2$，由于 $\xi \perp H_1 \otimes H_2$，因此，$\langle t\xi_1, \xi_2 \rangle_r = \langle \xi, \xi_1 \otimes \xi_2 \rangle_r = 0$. 所以，

$$tH_1 \subset H_2^\perp, \ t^*H_2 \subset H_1^\perp. \tag{2}$$

如果 $\eta_j \in H_j^\perp$，由于 $\xi \perp iH_1^\perp \otimes H_2^\perp$，因此，$\langle t(i\eta_1), \eta_2 \rangle_r = \langle \xi, i\eta_1 \otimes \eta_2 \rangle_r = 0$. 所以，

$$\iota(iH_1^\perp)\subset H_2,\quad \iota^*H_2^\perp\subset iH_1. \tag{3}$$

今依(1),(2),(3),

$$\iota^*\iota H_1^\perp\subset iH_1^\perp, \tag{4}$$

进而,$(\iota^*\iota)^2H_1^\perp\subset H_1^\perp$. 但 $\iota^*\iota$ 是$(\mathscr{H}_1,\langle\ ,\ \rangle_r)$中的正算子,可以用$(\iota^*\iota)^2$ 的多项式依一致拓扑逼近,从而 $\iota^*\iota H_1^\perp\subset H_1^\perp$. 再依(4),便有

$$\iota^*\iota H_1^\perp\subset H_1^\perp\cap iH_1^\perp,$$

由于(H_1+iH_1)在$\mathscr{H}_1$中稠,易见 $H_1\cap iH_1^\perp=\{0\}$. 因此

$$\iota H_1^\perp=\{0\}. \tag{5}$$

由此,$\langle\iota^*H_2,H_1^\perp\rangle_r=\{0\}$, 即$\iota^*H_2\subset H_1$. 再依(2),

$$\iota^*H_2=\{0\}. \tag{6}$$

由(1)及(6),$\langle i\iota H_1,H_2\rangle_r=0$, 因此

$$\iota H_1\subset iH_2^\perp, \tag{7}$$

又依(5),(2),(7),$\iota\mathscr{H}_1=\iota H_1\subset H_2^\perp\cap iH_2^\perp$. 同样由于$(H_2+iH_2)$在$\mathscr{H}_2$中稠,可见 $H_2^\perp\cap iH_2^\perp=\{0\}$, 所以,$\iota=0$. 从而,$\langle\xi,\xi_1\otimes\xi_2\rangle_r=0$, $\forall\xi_1\in\mathscr{H}_1$, $\xi_2\in\mathscr{H}_2$, 即见 $\xi=0$. 证毕.

引理 1.4.11 设 M_j 是 $\mathscr{H}_j$ 中有循环矢 ξ_j 的 vN 代数,$j=1$,2,则 $(M_1\overline{\otimes}M_2)'=M_1'\overline{\otimes}M_2'$.

证. 记 $M=M_1\overline{\otimes}M_2$, $N=M_1'\overline{\otimes}M_2'$, 显然有 $M\subset N'$. 由于 $\xi=\xi_1\otimes\xi_2$ 是M的循环矢,依引理 1.4.9, 只须证明

$$\overline{M_h\xi}+i\overline{N_h\xi}=\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2.$$

记 $H_j=\overline{(M_j)_h\xi_j}$, $j=1,2$. 显然 $H_1\otimes H_2\subset\overline{M_h\xi}$. 把引理 1.4.9 用于 M_j 及 $N_j=M_j'$, 则在 $\mathscr{H}_j$ 中,$((M_j)_h\xi_j)^\perp=i\overline{(M_j')_h\xi_j}$, $j=1,2$. 于是

$$H_1^\perp\otimes H_2^\perp=\overline{(M_1')_h\xi_1}\otimes\overline{(M_2')_h\xi_2}\subset\overline{N_h\xi}.$$

从而只须证明

$$H_1\otimes H_2+iH_1^\perp\otimes H_2^\perp=\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2.$$

依引理 1.4.10, 只要证明(H_j+iH_j)在$\mathscr{H}_j$中稠,$j=1,2$. 注意 $(H_j+iH_j)=\overline{(M_j)_h\xi_j}+i\overline{(M_j)_h\xi_j}\supset M_j\xi_j$, 但 ξ_j 是 M_j 的循

环矢，因此，(H_i+iH_i) 在 $\mathscr{H}_i$ 中稠，$i=1,2$. 证毕.

定理 1.4.12 设 M_i 是 $\mathscr{H}_i$ 中的 vN 代数，$i=1,2$，则 $(M_1\overline{\otimes}M_2)'=M_1'\overline{\otimes}M_2'$.

证. 对任意固定的 $\xi_i\in\mathscr{H}_i$，命 p_i' 为 $\mathscr{H}_i$ 到 $\overline{M_i\xi_i}$ 上的投影，$\mathscr{K}_i=p_i'\mathscr{H}_i$，$N_i=M_ip_i'$，则 N_i 是 $\mathscr{K}_i$ 中有循环矢 ξ_i 的 vN 代数，$i=1,2$. 依引理 1.4.11，

$$(N_1\overline{\otimes}N_2)'=N_1'\overline{\otimes}N_2'.$$

记 $p'=p_1'\otimes p_2'$，它是 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 到 $\mathscr{K}_1\otimes\mathscr{K}_2$ 上的投影，并且 $p'\in M_1'\overline{\otimes}M_2'$，及

$$(M_1\overline{\otimes}M_2)p'=N_1\overline{\otimes}N_2,\quad p'(M_1'\overline{\otimes}M_2')p'=N_1'\overline{\otimes}N_2'.$$

设 $a\in(M_1\overline{\otimes}M_2)'$，$b\in(M_1'\overline{\otimes}M_2')'$. 由于 $p'\in M_1'\overline{\otimes}M_2'$，所以

$$\begin{aligned}p'bp'=bp'\in(M_1'\overline{\otimes}M_2')'p'&=(p'(M_1'\overline{\otimes}M_2')p')'\\&=(N_1'\overline{\otimes}N_2')'=N_1\overline{\otimes}N_2,\end{aligned}$$

又由于 $p'\in M_1'\overline{\otimes}M_2'\subset(M_1\overline{\otimes}M_2)'$，所以

$$p'ap'\in p'(M_1\overline{\otimes}M_2)'p'=((M_1\overline{\otimes}M_2)p')'=(N_1\overline{\otimes}N_2)'.$$

从而 $p'ap'$ 与 $p'bp'$ 交换. 记 $\xi=\xi_1\otimes\xi_2$，于是

$$\begin{aligned}\langle ab\xi,\xi\rangle&=\langle p'ap'\cdot p'bp'\xi,\xi\rangle\\&=\langle p'bp'\cdot p'ap'\xi,\xi\rangle=\langle ba\xi,\xi\rangle,\end{aligned}$$

即

$$\langle ab\xi_1\otimes\xi_2,\xi_1\otimes\xi_2\rangle=\langle ba\xi_1\otimes\xi_2,\xi_1\otimes\xi_2\rangle,\ \forall\xi_1\in\mathscr{H}_1,\xi_2\in\mathscr{H}_2.$$

从而，$ab=ba$，$\forall a\in(M_1\overline{\otimes}M_2)'$，$b\in(M_1'\overline{\otimes}M_2')'$. 由此，$(M_1\overline{\otimes}M_2)'\subset M_1'\overline{\otimes}M_2'$. 但反包含关系是显然的，所以，$(M_1\overline{\otimes}M_2)'=M_1'\overline{\otimes}M_2'$. 证毕.

命题 1.4.13 设 M_i 是 $\mathscr{H}_i$ 中的 vN 代数，Z_i 是 M_i 的中心，$i=1,2$，则 $Z=Z_1\overline{\otimes}Z_2$，这里 Z 是 $M=M_1\overline{\otimes}M_2$ 的中心. 特别地，因子的张量积仍然是因子.

证. 显然 $Z_1\overline{\otimes}Z_2\subset Z$. 另一方面, $Z\subset M_1\overline{\otimes}M_2\subset M_1\overline{\otimes}B(\mathscr{H}_2)$, 同样 $Z\subset M_2'\overline{\otimes}B(\mathscr{H}_2)$. 今依命题 1.4.8, $Z\subset Z_1\overline{\otimes}B(\mathscr{H}_2)$. 再由定理 1.4.12, $Z'\subset Z_1'\overline{\otimes}\mathbb{C}1_2$. 同样证明 $Z'\supset\mathbb{C}1_1\overline{\otimes}Z_2'$. 因此, $Z'\supset Z_1'\overline{\otimes}Z_2'$, $Z=Z''\subset Z_1\overline{\otimes}Z_2$. 所以, $Z=Z_1\overline{\otimes}Z_2$. 证毕.

命题 1.4.14 设 M_i, N_i 是 $\mathscr{H}_i$ 中的 vN 代数, $i=1,2$, 则

$$((M_1\overline{\otimes}M_2)\cup(N_1\overline{\otimes}N_2))''=(M_1\cup N_1)''\overline{\otimes}(M_2\cup N_2)'',$$

$$(M_1\overline{\otimes}M_2)\cap(N_1\overline{\otimes}N_2)=(M_1\cap N_1)\overline{\otimes}(M_2\cap N_2).$$

证. 第一个等式由 vN 代数张量积的定义立见. 同样有

$$((M_1'\overline{\otimes}M_2')\cup(N_1'\overline{\otimes}N_2'))''=(M_1'\cup N_1')''\overline{\otimes}(M_2'\cup N_2')''.$$

再用定理 1.4.12, 即得到第二个等式. 证毕.

注 本节见参考文献 [10], [72], [74], [88], [96], [97], [118], [122].

§5. 投影的比较与中心覆盖

定义 1.5.1 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数, p, q 是 M 的投影, 如果存在 M 的部分等距元 v, 使得 $p=v^*v$, $q=vv^*$, 则称 p 与 q (在 M 中)是等价的, 记作 $p\sim q$. 如果有 M 的投影 $q_1\leqslant q$, 使得 $p\sim q_1$, 则记以 $p\precsim q$.

设 M, N 是 $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ 中的 vN 代数, M 与 N 称为 * 同构的, 指存在 M 到 N 上的一一线性映象, 它并保持 * 运算与乘法; M 与 N 称为空间 * 同构的, 指存在 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}$ 上的酉算子 u, 使得

$$uMu^*=N.$$

命题 1.5.2 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数.

1) 设 p, q 是 M 的投影, 并且 $p\sim q$, 则 $p\mathscr{H}$ 中的 vN 代数 M_p, M_p' 分别空间 * 同构于 $q\mathscr{H}$ 中的 vN 代数 M_q, M_q';

2) 设 $\{p_l\}$, $\{q_l\}$ 是 M 的两族相互直交的投影, 且 $p_l\sim q_l$,

$\forall l$，则 $p = \sum_l p_l \sim q = \sum_l q_l$；

3）设 $a \in M$，p 是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{a\mathscr{H}}$ 上的投影，q 是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{a^*\mathscr{H}}$ 上的投影，则 $p \sim q$；

4）设 p, q 是M的投影，则

$$(p - \inf\{p, 1-q\}) \sim (q - \inf\{q, 1-p\}),$$
$$(\sup\{p, q\} - q) \sim (p - \inf\{p, q\}).$$

证. 1）设 $p = v^*v$，$q = vv^*$，则 v 是 $p\mathscr{H}$ 到 $q\mathscr{H}$ 上的酉算子，并且

$$vpapv^* = qaq,\ va'pv^* = a'q,\ \forall a \in M,\ a' \in M';$$

2）设 $p_l = v_l^*v_l$，$q_l = v_lv_l^*$，$\forall l$，令 $v = \sum_l v_l$，则 $p = v^*v$，$q = vv^*$；

3）由命题 1.3.4 立见；

4）由于

$$\overline{qp\mathscr{H}} = \overline{(q - \inf\{q, 1-p\})\mathscr{H}},$$
$$\overline{pq\mathscr{H}} = \overline{(p - \inf\{p, 1-q\})\mathscr{H}}$$

及 $(pq)^* = qp$，因此，$(q - \inf\{q, 1-p\}) \sim (p - \inf\{p, 1-q\})$。如果记 $q_1 = 1 - q$，于是

$$\begin{aligned}\sup\{p, q\} - q &= \sup\{1-q_1, p\} - (1-q_1)\\ &= q_1 - \inf\{q_1, 1-p\} \sim p - \inf\{p, 1-q_1\}\\ &= p - \inf\{p, q\}.\end{aligned}$$

证毕.

命题 1.5.3 设 p, q 是 vN 代数M的投影，并且 $p \precsim q$，$q \precsim p$，则 $p \sim q$。

证. 设 $p \sim q_1 \leqslant q$，$q \sim p_1 \leqslant p$. 将后一式限于 q_1，则得到 $q_1 \sim p_2 \leqslant p_1$. 从而

$$p \geqslant p_1 \geqslant p_2,\ p \sim p_2.$$

再将关系 $p \sim p_2$ 限于 p_1，则有

$$p \geqslant p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3,\ p \sim p_2,\ p_1 \sim p_3,$$

把关系 $p_1 \sim p_3$ 限于 p_2，又有 $p_2 \sim p_4 \leqslant p_3$. 如此继续，可以得

到 $p \geqslant p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots$，并且

$$p = p_0 \sim p_2 \sim \cdots \sim p_{2n} \sim \cdots, \quad p_1 \sim p_3 \sim \cdots \sim p_{2n+1} \sim \cdots.$$

如果命 $p_n = u_n^* u_n$，$p_{n+2} = u_n u_n^*$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，依上面的作法，将有

$$p_{n+1} = (u_n p_{n+1})^*(u_n p_{n+1}), \quad p_{n+3} = (u_n p_{n+1})(u_n p_{n+1})^*, \ \forall n.$$

于是，$p_n - p_{n+1} = (u_n(p_n - p_{n+1}))^*(u_n(p_n - p_{n+1}))$ 以及

$$\begin{aligned}(u_n(p_n - p_{n+1}))(u_n(p_n - p_{n+1}))^* &= u_n(p_n - p_{n+1})u_n^* \\ &= p_{n+2} - p_{n+3},\end{aligned}$$

即

$$(p_n - p_{n+1}) \sim (p_{n+2} - p_{n+3}), \ \forall n.$$

今注意

$$\begin{aligned} p &= \boxed{(p_0 - p_1) \oplus (p_1 - p_2)} \oplus \cdots \oplus \inf\{p_n | n = 0, 1, \cdots\}, \\ p_1 &= \boxed{(p_1 - p_2) \oplus (p_2 - p_3)} \oplus \cdots \oplus \inf\{p_n | n = 1, 2, \cdots\}, \end{aligned}$$

依命题 1.5.2 可见 $p \sim p_1$。但 $p_1 \sim q$，因此，$p \sim q$。证毕。

定理 1.5.4 设M是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，p, q 是M 的投影，则存在M的中心投影 z，使得

$$pz \gtrsim qz, \quad p(1-z) \lesssim q(1-z).$$

特别地，因子的任意两个投影是可以比较的。

证. 设 $c(p)$，$c(q)$ 分别是 $\mathscr{H}$ 到 $[\overline{Mp\mathscr{H}}]$，$[\overline{Mq\mathscr{H}}]$ 上的投影，显然 $c(p)$，$c(q) \in M \cap M'$，$c(p) \geqslant p$，$c(q) \geqslant q$。

如果 $c(p)c(q) = 0$，取 $z = c(p)$即可，所以可设 $c(p)c(q) \neq 0$。由于 M 是其酉元全体的线性包，因此必有M的酉元 u，v，使得 $PQ \neq 0$，这里 P，Q 分别是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{up\mathscr{H}}$，$\overline{vq\mathscr{H}}$ 上的投影。显然，通过 up，$p \sim P$；通过 vq，$q \sim Q$。今命 g'，h' 分别是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{PQ\mathscr{H}}$，$\overline{QP\mathscr{H}}$ 上的投影，则 $0 \neq g' \leqslant P$，$0 \neq h' \leqslant Q$，并且 $g' \sim h'$。再由 $p \sim P$，$q \sim Q$，可见有 $0 \neq g \leqslant p$，$0 \neq h \leqslant q$，使得 $g \sim h$。

依 Zorn 辅理，将有两族相互直交的非零投影极大族 $\{g_l\}$，

$\{h_l\}$，使得

$$g_l \leqslant p,\ h_l \leqslant q,\ g_l \sim h_l,\ \forall l.$$

令 $g = \sum_l g_l$，$h = \sum_l h_l$，则 $g \leqslant p$，$h \leqslant q$，$g \sim h$. 记 $p_1 = p - g$，$q_1 = q - h$，由于族 $\{g_l\}$，$\{h_l\}$ 的极大性，$c(p_1)c(q_1) = 0$，这里 $c(p_1)$，$c(q_1)$ 分别是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{[Mp_1\mathscr{H}]}$，$\overline{[Mq_1\mathscr{H}]}$ 上的投影.

最后取 $z = c(p_1)$，则

$$qz = q_1c(q_1)z + hz = hz \sim gz \leqslant pz,$$
$$p(1-z) = p_1c(p_1)(1-z) + g(1-z)$$
$$= g(1-z) \sim h(1-z) \leqslant q(1-z).$$

证毕.

注. 本定理称为投影比较定理，以后我们将经常使用它.

命题 1.5.5 设M是 vN 代数，p，q 是M的投影.

1）存在M的中心投影 z，使得

$$pz \precsim qz,\ (1-p)(1-z) \precsim (1-q)(1-z);$$

2）存在M的中心投影 z_1，z_2，z_3，它们相互直交，和为 1，使得：① 如果M的中心投影 $z \leqslant z_1$，则 $pz \sim qz$；② 如果M的非零中心投影 $z \leqslant z_2$，则 $pz \precsim qz$，并且 $pz \nsim qz$；③ 如果M的非零中心投影 $z \leqslant z_3$，则 $qz \precsim pz$，并且 $qz \nsim pz$.

证. 1）依定理 1.5.4，有M的中心投影 z，使得

$$z\inf\{p, 1-q\} \precsim z\inf\{1-p, q\}, \tag{1}$$
$$(1-z)\inf\{1-p, q\} \precsim (1-z)\inf\{p, 1-q\}, \tag{2}$$

由命题 1.5.2，我们也有

$$(zp - z\inf\{p, 1-q\}) \sim (zq - z\inf\{q, 1-p\}), \tag{3}$$
$$((1-z)(1-p) - (1-z)\inf\{1-p, q\}) \sim ((1-z)\cdot(1-q) - (1-z)\inf\{1-q, p\}). \tag{4}$$

考虑 (1) + (3)，(2) + (4)，即有

$$zp \precsim zq,\ (1-z)(1-p) \precsim (1-z)(1-q);$$

2）由 Zorn 辅理，存在M的相互直交的中心投影极大族 $\{z_l\}$，

使得 $pz_l \sim qz_l$, $\forall l$。 命 $z_1 = \sum_l z_l$, 自然地, $pz_1 \sim qz_1$。 今若M的中心投影 z, 使得 $pz \sim qz$。 自然地, 也有 $pz(1-z_1) \sim qz(1-z_1)$。 但是, $z(1-z_1)z_l = 0$, $\forall l$, 从而依 $\{z_l\}$ 的极大性, $z \leqslant z_1$, 即 z_1 是使得 $pz \sim qz$ 的最大中心投影。

今在 vN 代数 $M(1-z_1)$ 中,对投影 $p(1-z_1)$ 与 $q(1-z_1)$ 使用定理 1.5.4, 即得所证。

定理 1.5.6 设 $\{p_l\}_{l\in I}$ 是 vN 代数 M 的相互直交的投影族, 并且

$$\sum_{l\in I} p_l = 1, \quad p_l \sim p_{l'}, \forall l, l',$$

则M空间 * 同构于 $M_p \overline{\otimes} B(\mathscr{H})$, 这里 $\dim \mathscr{H} = {}^{\#}I$, 而 $p \sim p_l$, $\forall l$。

证. 设M的作用空间是 $\mathscr{H}$, $\mathscr{L} = p\mathscr{H}$, $p = v_l^* v_l$, $p_l = v_l v_l^*$, $\forall l$。于是, 用 $\{v_l\}$ 可以定义一个由 $\mathscr{H} = \sum_{l\in I} \otimes \mathscr{H}_l$ 到 $\mathscr{L} \otimes \mathscr{H}$ 上的酉同构, 这里 $\mathscr{H}_l = p_l \mathscr{H}$, $\forall l$。在这个同构下, 把 $\mathscr{H}$ 与 $\mathscr{L} \otimes \mathscr{H}$ 等同起来。

对任意的 $a \in M$, $a' \in M'$, $l, l' \in I$,

$$a_{ll'} = v_l^* a v_{l'} \in M_p,$$

$$a'_{ll'} = v_l^* a' v_{l'} = v_l^* v_{l'} a' = \delta_{ll'} a' p,$$

依引理 1.4.5 与命题 1.4.8 可见

$$M \subset M_p \overline{\otimes} B(\mathscr{H}), \quad M' \subset M'_p \overline{\otimes} \mathbb{C} 1_{\mathscr{H}}$$

再由定理 1.4.12, $M = M_p \overline{\otimes} B(\mathscr{H})$。 证毕。

定义 1.5.7 设M是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数, p 是M的投影, 记 $\mathscr{H}$ 到 $[\overline{Mp\mathscr{H}}]$ 上的投影为 $c(p)$。 显然 $c(p) \in M \cap M'$, 称它为 p 的(在M中的)中心覆盖。

命题 1.5.8 设M是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数。

1) 如果 p 是M的投影,则 $c(p)$ 是M的包含 p 的最小中心投影,并且

$$c(p)=\sup\{q|q\text{ 是}M\text{的投影,且}\sim p\};$$

2) 如果 p, q 是M的投影，$p\precsim q$，则 $c(p)\leqslant c(q)$. 特别地,如果 $p\sim q$，则 $c(p)=c(q)$;

3) 设 $\{p_l\}$ 是M的投影族，$p=\sup\limits_l p_l$，则 $c(p)=\sup\limits_l c(p_l)$;

4) 如果 p 是M的投影，z 是M的中心投影，则 $zc(p)=c(pz)$;

5) 如果 p, q 是M的投影,并且，$p\geqslant q$，则 q 在 vN 代数 M_p 中的中心覆盖是 $pc(q)$.

证. 2) 设 $p=v^*v$，$vv^*\leqslant q$，于是

$$c(p)\mathscr{H}=\overline{[Mv^*v\mathscr{H}]}\subset\overline{[Mv\mathscr{H}]}\subset\overline{[Mq\mathscr{H}]}=c(q)\mathscr{H}$$

即见 $c(p)\leqslant c(q)$.

1) 设 z 是M的中心投影，且 $z\geqslant p$，显然，$zap\xi=ap\xi$，$\forall a\in M$，$\xi\in\mathscr{H}$，因此，$z\geqslant c(p)$，即 $c(p)$ 是M的包含 p 的最小中心投影.

今依 2)，$c(p)\geqslant\sup\{q|q\sim p\}$. 为证两者相同，只须证明 $\sup\{q|q\sim p\}$ 是M的中心投影. 但不难见,它与M的任何酉元交换,因此它是M的中心投影;

3) 易见 $c(p)\geqslant\sup\limits_l c(p_l)\geqslant p$，但 $\sup\limits_l c(p_l)$ 也是M的中心投影,依1)，$c(p)=\sup\limits_l c(p_l)$;

4) 由 $zc(p)\mathscr{H}=\overline{[zMp\mathscr{H}]}=\overline{[Mzp\mathscr{H}]}=c(zp)\mathscr{H}$ 立见;

5) 由 $\overline{[M_pqp\mathscr{H}]}=\overline{[pMq\mathscr{H}]}=p\overline{[Mq\mathscr{H}]}=pc(q)\mathscr{H}$ 立见. 证毕.

命题 1.5.9 设 p, q 是 vN 代数M的投影，则下列条件是相互等价的: 1) $c(p)c(q)\neq 0$; 2) $pMq\neq\{0\}$; 3) 存在 $0\neq p_1\leqslant p$，$0\neq q_1\leqslant q$，而 $p_1\sim q_1$.

证. 如果 $pMq=\{0\}$，则 $\overline{[Mp\mathscr{H}]}\perp\overline{[Mq\mathscr{H}]}$，即 $c(p)\cdot c(q)=0$. 反之,如果 $c(p)c(q)=0$，则

$$paq = pc(p)aqc(q) = paqc(p)c(q) = 0, \ \forall a \in M.$$

因此，1) 与 2) 是等价的.

在定理 1.5.4 的证明中，我们实际上已指出由 1) 可以推导 3).

今设 3) 成立，于是 $z = c(p_1) = c(q_1) \neq 0$，并且 $z \leqslant c(p)$，$z \leqslant c(q)$，从而 $c(p)c(q) \neq 0$. 证毕.

命题 1.5.10 设 p 是 vN 代数 M 的投影，则欲 $a' \to a'p$ 是 M' 到 $M'p$ 上的 * 同构，当且仅当，$c(p) = 1$.

证. 必要性. $1 - c(p) \in M'$，并且 $(1 - c(p))p = 0$. 由于是同构，因此 $c(p) = 1$.

充分性. 设 $a' \in M'$，并且 $a'p = 0$，从而 $a'Mp = \{0\}$，即 $a'c(p) = a' = 0$. 证毕.

注. 如果 p 是 M 的任意非零投影，依上面命题可见，$a'p \to a'c(p)$ 是 $M'p$ 到 $M'c(p)$ 上的 * 同构. 特别地，当 M 是因子时，$M'p$ 与 M' * 同构.

注 本节见参考文献 [21]，[55]，[74].

§ 6. Kaplansky 稠密性定理

定理 1.6.1 设 M, N 都是 $B(\mathscr{H})$ 的 * 子代数，$N \subset M$，并且 N 在 M 中是弱算子稠的，则 $(N)_1$ 在 $(M)_1$ 中是 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 稠的，这里 $(N)_1$，$(M)_1$ 分别是 N，M 的单位球(依范数而言).

证. 由于 * 运算是弱算子连续的，从而，N_h 在 M_h 中也是弱算子稠的，这里 N_h, M_h 分别是 N, M 的自伴元全体. 依命题 1.2.9，N_h 在 M_h 中是强算子稠的.

我们无妨假定 M，N 都是依一致拓扑闭的. 对任意的 $a = a^* \in (M)_1$，令 $a' = a(1 + (1 - a^2)^{1/2})^{-1}$，于是 $a' \in M$，并且 $a = 2a'(1 + a'^2)^{-1}$. 今取 N_h 中的网 $b'_l \xrightarrow{\text{强算子}} a'$. 令 $b_l = 2b'_l(1 + b'^2_l)^{-1}$，则 $b_l = b^*_l \in (N)_1$，$\forall l$. 我们来证明

$$b_l \xrightarrow{\text{强算子}} a.$$

事实上，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(b_l - a) &= (1 + b_l'^2)^{-1}[b_l'(1 + a'^2) \\ &\quad - (1 + b_l'^2)a'](1 + a'^2)^{-1} \\ &= (1 + b_l'^2)^{-1}(b_l' - a')(1 + a'^2)^{-1} \\ &\quad + (1 + b_l'^2)^{-1}b_l'(a' - b_l')a'(1 + a'^2)^{-1} \\ &= (1 + b_l'^2)^{-1}(b_l' - a')(1 + a'^2)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{4} b_l(a' - b_l')a,\end{aligned}$$

由于 $b_l' \xrightarrow{\text{强算子}} a'$，$\|b_l\| \leqslant 1$，$\|(1 + b_l'^2)^{-1}\| \leqslant 1$，$\forall l$，因此，$b_l \xrightarrow{\text{强算子}} a$。这说明 $(N_h)_1$ 在 $(M_h)_1$ 中是强算子稠的。

如果在 $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ 中，命

$$M^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| a_i \in M,\ 1 \leqslant i \leqslant 4\right\},$$

$$N^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \middle| b_i \in N,\ 1 \leqslant i \leqslant 4\right\},$$

则同样有 $(N_h^{(2)})_1$ 在 $(M_h^{(2)})_1$ 中是强算子稠的. 今对于任意的 $a \in (M)_1$，

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} \in (M_h^{(2)})_1.$$

于是有 $(N_h^{(2)})_1$ 中的网

$$\begin{pmatrix} b_1^{(l)} & b_2^{(l)} \\ b_3^{(l)} & b_4^{(l)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{强算子}} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}.$$

特别地，$\{b_2^{(l)}\}_l \subset (N_1)$ 及 $b_2^{(l)} \xrightarrow{\text{强算子}} a$. 因此，$(N)_1$ 在 $(M)_1$ 中是强算子稠的. 再依命题 1.2.8，$(N)_1$ 在 $(M)_1$ 中也是 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 稠的. 证毕.

系 1.6.2 设 M 是 $B(\mathscr{H})$ 的 * 子代数，则 M 的弱算子闭包与其 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 闭包相同.

证. 设 $\overline{M}^w$ 是 M 的弱算子闭包，依定理 1.3.9，$\overline{M}^w$ 也是 $B(\mathscr{H})$

的$*$子代数。再依定理 1.6.1，M 在 $\bar{M}^w$ 中也是 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 稠的。证毕。

系 1.6.3 设M是 $B(\mathscr{H})$ 的$*$子代数,并且 $1\in M$，则下列条件相互等价：1) M是 vN 代数；2) M是 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 闭的；3) $(M)_1$ 是弱算子闭的。

证. 由命题 1.2.8，条件 2) 等价于"M是 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 闭的"，于是依系 1.6.2 及定理 1.3.10，可见条件 1) 与 2) 是等价的。由定理 1.2.4，条件 3) 等价于"$(M)_1$ 是 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 闭的"。从而由 Krein-Šmulian 定理，条件 3) 可以推导 2)。当然由 1) 可以得到 3)。证毕。

命题 1.6.4 设 M, N 是 $B(\mathscr{H})$ 的$*$子代数,并且依一致拓扑是闭的，$N\subset M$以及N在M中是弱算子稠的,则 $(N_h)_1$ 在 $(M_h)_1$ 中是强算子稠的，以及 $(N_+)_1$ 在 $(M_+)_1$ 中是强算子稠的，这里 N_+，M_+ 分别是 N，M 的正元全体。

证. 已在定理 1.6.1 中指出：$(N_h)_1$ 在 $(M_h)_1$ 中是强算子稠的。

今设 $a\in(M_+)_1$，于是存在网 $\{b_l\}\subset(N_h)_1$，使得 $b_l\xrightarrow{\text{强算子}}a$。命

$$f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ 0, & -1\leqslant t\leqslant 0.\end{cases}$$

于是 $f(a)=a$，$f(b_l)\in(N_+)_1$，$\forall l$。今取 $[-1, 1]$ 上的多项式列 $\{p_n(t)\}$，使得

$$p_n(0)=0,\ \forall n,\quad \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|f(t)-p_n(t)|\to 0.$$

于是对任意的 $\xi\in\mathscr{H}$，有

$$\begin{aligned}\|f(b_l)\xi-a\xi\|&=\|f(b_l)\xi-f(a)\xi\|\\&\leqslant\|f(b_l)-p_n(b_l)\|\|\xi\|+\|f(a)-p_n(a)\|\|\xi\|\\&\quad+\|(p_n(b_l)-p_n(a))\xi\|.\end{aligned}$$

由此可见 $f(b_l)\xrightarrow{\text{强算子}}a$。证毕。

命题 1.6.5 设 M_l 是 $\mathscr{H}_l$ 中的 vN 代数，$\forall l\in\Lambda$，则

$\sum\limits_{l\in\Lambda}\oplus M_l=\{(a_l)_{l\in\Lambda}\,|\,a_l\in M_l,\forall l\in\Lambda$，且 $\sup\limits_l\|a_l\|<\infty\}$ 是 $\mathscr{H}=\sum\limits_{l\in\Lambda}\oplus\mathscr{H}_l$ 中的 vN 代数。

这由系 1.6.3 立见。

注 本节见参考文献 [56]。

§7. 理　想

命题 1.7.1 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，$\mathscr{I}$ 是 M 的 $\sigma(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$[1] 闭的左(右)理想，则存在 M 的唯一投影 p，使得 $\mathscr{I}=Mp(=pM)$。特别地 $\mathscr{I}$ 也是弱算子闭的。此外，如果 $\mathscr{I}$ 是 M 的 $\sigma(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 闭的双侧理想，则有 M 的唯一中心投影 z，使得 $\mathscr{I}=Mz$，从而 $\mathscr{I}$ 对 $*$ 运算也是封闭的。

证. 设 $\mathscr{I}$ 是 M 的 σ-闭左理想，于是 $\mathfrak{M}=\mathscr{I}\cap\mathscr{I}^*$ 是 M 的 σ-闭 $*$ 子代数。依系 1.6.2，$\mathfrak{M}$ 也是弱算子闭的。依定理 1.3.9，$\mathfrak{M}$ 有单位元 p。显然，$Mp\subset\mathscr{I}$。反之，设 $a\in\mathscr{I}$，极分解 $a=wh$，易见 $h=(a^*a)^{1/2}\in\mathfrak{M}$，从而 $hp=h$。由此，$a=whp=ap\in Mp$。所以，$\mathscr{I}=Mp$。

今设另有 M 的投影 q，使得 $\mathscr{I}=Mp=Mq$。于是，$p=pq$，$p^*=p=qp$，$p=qpq\leqslant q$。同样证明 $q\leqslant p$，所以，$p=q$。

最后设 $\mathscr{I}$ 还是双侧的。依前面的讨论，有 M 的投影 p，q，使得

$$\mathscr{I}=Mp=qM.$$

于是有 $a,b\in M$，使得 $q=ap$，$p=qb$。从而，$q=qp=p$。记 $z=p=q$，则 $\mathscr{I}=Mz=zM$。今对于任意的 $c\in M$，存在 $d,e\in M$，使得 $cz=zd$，$zc=ez$。于是，$cz=zcz=zc$，即 $z\in M$ 的中心。证毕。

注. 如果 M 是因子，可见 M 的任意非零双侧理想必在 M 中 σ 稠。

---

1) 以后有时简记 vN 代数中的 $\sigma(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 拓扑为 σ-拓扑

命题1.7.2 如果 $\mathscr{I}$ 是 vN 代数 M 的双侧理想，则 $\mathscr{I}$ 对 * 运算封闭；$\mathscr{I}$ 是其正元全体的线性包；又若 $0\leqslant a\in\mathscr{I}^w$，则有网 $\{a_l\}_{l\in\Lambda}\subset\mathscr{I}_+$，使得

$$a=\lim_F\sum_{l\in F}a_l=\sum_{l\in\Lambda}a_l.$$

这里 $\mathscr{I}^w$ 是 $\mathscr{I}$ 的弱算子闭包，$\mathscr{I}_+=\mathscr{I}$ 的正元全体，F 是 Λ 的有限子集，依包含关系成为定向指标集.

证. 设 $b\in\mathscr{I}$，极分解 $b=wh$，从而，$h=w^*b\in\mathscr{I}$. 进而，$b^*=hw^*\in\mathscr{I}$，即 $\mathscr{I}$ 对于 * 运算是封闭的.

设 $h=h^*\in\mathscr{I}$，这时必有投影 $p,q\in M$，使得 $ph\geqslant0$，$qh\leqslant0$ 及 $p+q=1$. 因此，$\mathscr{I}$ 是其正元全体的线性包.

今设 $0\leqslant a\in\mathscr{I}^w$，命 $\{a_l\}_{l\in\Lambda}$ 是 $\mathscr{I}_+$ 的极大族，使得对 Λ 的任意有限子集 F，有 $\sum\limits_{l\in F}a_l\leqslant a$. 依命题 1.2.10，

$$\sup_F\sum_{l\in F}a_l=(\text{强算子})-\lim_F\sum_{l\in F}a_l\in\mathscr{I}^w,$$

记此元为 a_1，及 $b=a-a_1$.

依命题 1.7.1，$\mathscr{I}^w=Mz$，这里 z 是 M 的中心投影. 依定理 1.6.1，有网 $\{b_l\}\subset\mathscr{I}$，使得

$$\|b_l\|\leqslant1,\ \forall l,\ b_l\xrightarrow{\text{强算子}}z,$$

从而 $b^{1/2}b_lb^{1/2}\xrightarrow{\text{强算子}}b$.

如果 $b\neq0$，则存在指标 l，使得 $b^{1/2}b_lb^{1/2}\neq0$. 因此 $0\leqslant b^{1/2}cb^{1/2}\neq0$，这里 $c=b_lbb_l^*$. 无妨设 $0\leqslant c\leqslant1$，所以，$b^{1/2}cb^{1/2}\leqslant b$. 并且显然 $b^{1/2}cb^{1/2}\in\mathscr{I}$，这将与 $\{a_l\}_{l\in\Lambda}$ 的极大性相矛盾. 所以，$b=0$，即 $a=\sum\limits_{l\in\Lambda}a_l$. 证毕.

命题1.7.3 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，Z 是其中心，$\{t_{ij}|1\leqslant i,j\leqslant n\}\subset M$，$\{t'_{ij}|1\leqslant i,j\leqslant n\}\subset M'$，则下列条件相互等价：

1) $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{ik}t'_{kj}=0$，$1\leqslant i,j\leqslant n$；

2) 存在 $\{z_{ij}|1\leqslant i,j\leqslant n\}\subset Z$，使得

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ik}z_{kj}=0,\quad \sum_{k=1}^{n} z_{ik}t'_{kj}=t'_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

证．由 2) 推导 1) 是显然的．

今设 1) 成立．命 $\mathscr{H}$ 是 n 维的 Hilbert 空间，于是

$$t=(t_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in M\overline{\otimes}B(\mathscr{H}),$$
$$t'=(t'_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in M'\overline{\otimes}B(\mathscr{H})$$

令

$$\mathscr{I}'=\{x'|x'\in M'\overline{\otimes}B(\mathscr{H}),\ tx'=0\},$$

显然 $\mathscr{I}'$ 是 $M'\overline{\otimes}B(\mathscr{H})$ 的 σ-闭右理想．依命题 1.7.1，有 $M'\overline{\otimes}B(\mathscr{H})$ 的投影 $z'=(z_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$，这里 $z_{ij}\in M'$，$\forall i,j$，使得 $\mathscr{I}'=z'(M'\overline{\otimes}B(\mathscr{H}))$．

对任意的 $a'\in M'$，$x'\in\mathscr{I}$，

$$t(a'\otimes 1)x'=(a'\otimes 1)tx'=0.$$

因此，$(a'\otimes 1)\mathscr{I}'\subset\mathscr{I}'$．特别地，$(a'\otimes 1)z'\in\mathscr{I}'$，因此，$z'(a'\otimes 1)z'=(a'\otimes 1)z'$．进而 $(a'\otimes 1)z'=z'(a'\otimes 1)$，所以，$z_{ij}a'=a'z_{ij}$，$\forall a'\in M'$，即 $z_{ij}\in Z$，$\forall i,j$．

由于 $z'\in\mathscr{I}'$，因此，$tz'=0$，即

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ik}z_{kj}=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

由条件 1)，$tt'=0$，所以，$t'\in\mathscr{I}'$，$z't'=t'$，即

$$\sum_{k=1}^{n} z_{ik}t'_{kj}=t'_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

证毕．

注　本节见参考文献 [21]，[103]．

§8．正规的正泛函

定义 1.8.1　设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，φ 是 M 上的线性泛函，φ 称为正的，记作 $\varphi\geqslant 0$，指对任意的 $a\in M_+$（$=M$ 的正元全

体），有 $\varphi(a)\geqslant 0$.

M上的线性泛函 $\psi\hat{\leqslant}\varphi$，指 $(\varphi-\psi)\geqslant 0$. 此外，$M$上的正泛函$\varphi$称为忠实的，指若 $a\in M_+$，使得 $\varphi(a)=0$，则 $a=0$.

显然，如果 $\varphi\geqslant 0$，则 $\varphi(a^*)=\overline{\varphi(a)}$，$\forall a\in M$，并且有 Schwartz 不等式

$$|\varphi(b^*a)|^2\leqslant\varphi(a^*a)\varphi(b^*b),\ \forall a,b\in M,$$

由此可证 $\|\varphi\|=\varphi(1)$.

定义 1.8.2 vN 代数M上的正泛函φ称为正规的，指对于 M_+ 的任意有界递增网 $\{a_l\}$ 有

$$\sup_l\varphi(a_l)=\varphi(\sup_l a_l),$$

φ称为正规态，指它是正规正泛函，且 $\varphi(1)=1$.

定义 1.8.3 vN 代数M上的正泛函φ称为全可加的，指对于M的任意相互直交的投影族 $\{p_l\}$ 有 $\varphi\left(\sum_l p_l\right)=\sum_l\varphi(p_l)$.

引理 1.8.4 设 φ，ψ是M上的全可加正泛函，p是M的非零投影，使得 $\varphi(p)\leqslant\psi(p)$，则存在$M$的非零投影 $q\leqslant p$，满足

$$\varphi(a)\leqslant\psi(a),\ \forall a\in M_+,\ 并且\ a\leqslant q.$$

证. 令

$$\mathscr{S}=\left\{(q_l)\,\middle|\,\begin{array}{l}(q_l)\text{是}M\text{的相互直交投影族},\ 0\neq q_l\leqslant p,\ \forall l,\\ \text{并且}\ \varphi(q_l)>\psi(q_l),\ \forall l.\end{array}\right\}$$

及 $\mathscr{S}$ 以包含关系为偏序. 如果 $\mathscr{S}$ 非空，依 Zorn 辅理，$\mathscr{S}$ 有极大元 $(q_l)_{l\in\Lambda}$. 令 $q_0=\sum\limits_{l\in\Lambda}q_l$，自然 $0\neq q_0\leqslant p$. 由于 φ，ψ全可加，因而 $\varphi(q_0)>\psi(q_0)$. 另一方面，$\varphi(p)\leqslant\psi(p)$，因此，$0\neq q=p-q_0\lneqq p$. 今设 r 是M的任意投影，并且 $r\leqslant q$，依 $(q_l)_{l\in\Lambda}$ 的极大性，必有 $\varphi(r)\leqslant\psi(r)$. 进而，如果 $a\in M_+$，并且 $a\leqslant q$，易见 $a\in qMq$，从而可写 $a=\int_0^1\lambda de_\lambda$，其中 $e_\lambda\in qMq$，$\forall\lambda$. 令

$$a_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}(e_{(k+1)/n}-e_{k/n}),$$

则 $\varphi(a_n)\leqslant\psi(a_n)$，$0\leqslant a-a_n\leqslant\frac{1}{n}q$，$\forall n$. 由此，

$$\varphi(a_n)\to\varphi(a),\ \psi(a_n)\to\psi(a).$$

进而 $\varphi(a)\leqslant\psi(a)$，即 q 为所求.

如果 $\mathscr{L}$ 是空的，即对M的任意投影 $r\leqslant p$，有 $\varphi(r)\leqslant\psi(r)$. 仿照上面的讨论 $q=p$ 即为所求. 证毕.

命题 1.8.5 如果φ是 vN 代数M上的正泛函，则φ是 $\sigma(M, M_*)$ 连续的，当且仅当，φ是全可加的.

证. 必要性显然. 今设φ是全可加的，及 $\{q_l\}_{l\in\Lambda}$ 是M的相互直交的投影极大族，使得

$$\varphi(\cdot q_l)\in M_*,\ \forall l.$$

令 $q=\sum\limits_{l\in\Lambda}q_l$，我们说 $\varphi(\cdot q)\in M_*$. 事实上，对任意的 $a\in M$，$\|a\|\leqslant 1$ 及 Λ 的有限子集 F，

$$\left|\varphi(aq)-\varphi\left(a\sum_{l\in F}q_l\right)\right|^2\leqslant\varphi\left(q-\sum_{l\in F}q_l\right)\cdot\varphi\left(a\left(q-\sum_{l\in F}q_l\right)a^*\right).$$

由于 $0\leqslant a\left(q-\sum\limits_{l\in F}q_l\right)a^*\leqslant aa^*\leqslant 1$ 及φ是全可加的，因此对 $\|a\|\leqslant 1$，一致地有

$$\varphi(aq)=\lim_F\varphi\left(a\sum_{l\in F}q_l\right)=\sum_{l\in\Lambda}\varphi(aq_l).$$

由此，$\varphi(\cdot q)$ 在M的任意有界球中是 $\sigma(M, M_*)$ 连续的. 再依命题 1.2.6，$\varphi(\cdot q)\in M_*$.

今只须证明 $q=1$. 不然，令 $p=1-q\neq 0$. 于是可以取 $\xi\in\mathscr{H}$ (M的作用空间)，使得 $\varphi(p)\leqslant\psi(p)$，这里 $\psi(\cdot)=\langle\cdot\xi,\xi\rangle\in M_*$. 依引理 1.8.4，存在$M$的非零投影 $q_0\leqslant p$，使得

$$\varphi(a)\leqslant\psi(a),\ \forall a\in M_+,\ \text{并且}\ a\leqslant q_0.$$

如果 $a\in M$，$\|a\|\leqslant 1$，则 $q_0a^*aq_0\leqslant q_0$，因此

$$|\varphi(aq_0)|^2\leqslant\varphi(1)\varphi(q_0a^*aq_0)\leqslant\varphi(1)\psi(q_0a^*aq_0)=\varphi(1)\|aq_0\xi\|^2.$$

这表明 $\varphi(\cdot q_0)$ 在M的单位球中是强算子连续的，因此，$\varphi(\cdot q_0)\in$

M_*. 这便与族 $\{q_l\}_{l\in\Lambda}$ 的极大性相矛盾. 所以, $q=1$. 证毕.

定理 1.8.6 设 φ 是 vN 代数 M 上的正泛函, 则下列条件是相互等价的: 1) φ 是 $\sigma(M, M_*)$ 连续的; 2) φ 是正规的; 3) φ 是全可加的.

证. 命题 1.8.5 已指出 1) 与 3) 是等价的; 显然由 2) 可以得到 3), 及由 1) 可以得到 2). 证毕.

系 1.8.7 设 φ, ψ 是 M 上的正泛函, 并且 $\varphi\geqslant\psi$. 又若 $\varphi\in M_*$, 则 $\psi\in M_*$.

事实上, 设 $\{a_l\}$ 是 M_+ 的任意有界递增网, $a=\sup\limits_l a_l$, 于是 $0\leqslant\psi(a-a_l)\leqslant\varphi(a-a_l)\to 0$. 所以, $\psi(a)=\lim\limits_l\psi(a_l)=\sup\limits_l\psi(a_l)$, 即 ψ 是正规的. 证毕.

命题 1.8.8 设 φ 是 vN 代数 M 上的正规正泛函, $p_\varphi=\sup\{p\,|\,p$ 是 M 的投影, 并且 $\varphi(p)=0\}$, 则

$$Mp_\varphi=\{a\in M\,|\,\varphi(a^*a)=0\},\ \varphi(p_\varphi a)=\varphi(ap_\varphi)=0,\ \forall a\in M.$$

证. 记 $\vartheta=\{a\in M\,|\,\varphi(a^*a)=0\}$, 易见 ϑ 是 M 的 $s(M, M_*)$ 闭左理想, 从而 ϑ 也是 $\sigma(M, M_*)$ 闭的. 依命题 1.7.1, 有 M 的投影 p_0, 使得 $\vartheta=Mp_0$. 如果 M 的投影 p, 使得 $\varphi(p)=0$, 于是, $p\in\vartheta$, 所以, $p\leqslant p_0$. 这说明 $p_0=p_\varphi$. 再由 Schwartz 不等式, 可见 $\varphi(p_\varphi a)=\varphi(ap_\varphi)=0$, $\forall a\in M$. 证毕.

定义 1.8.9 记 $s(\varphi)=1-p_\varphi$, 称为 φ 的支持. 显然, 它有性质

$$\varphi(s(\varphi)a)=\varphi(as(\varphi))=\varphi(s(\varphi)as(\varphi))=\varphi(a),\ \forall a\in M.$$

命题 1.8.10 设 φ 是 vN 代数 M 上的正规正泛函, $a\in M_+$, 使得 $\varphi(a)=0$, 则 $s(\varphi)as(\varphi)=0$. 特别地, φ 是忠实的, 当且仅当, $s(\varphi)=1$.

证. 如果 $s(\varphi)as(\varphi)\neq 0$, 由它的谱分解, 可见有 $\lambda>0$ 及 M 的非零投影 $p\leqslant s(\varphi)$, 使得 $\lambda p\leqslant s(\varphi)as(\varphi)$. 于是, $\varphi(p)=0$, $p\leqslant p_\varphi=1-s(\varphi)$, 产生矛盾. 因此, $s(\varphi)as(\varphi)=0$. 特别地, 如果 $s(\varphi)=1$, 可见 φ 是忠实的. 反之, 如果 φ 是忠实的, 则

并无非零投影 $p\in M$，使得 $\varphi(p)=0$，因此，$s(\varphi)=1$。证毕。

命题 1.8.11 设 $\xi\in\mathscr{H}$，M是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，$\varphi(\cdot)=\langle\cdot\xi,\xi\rangle$（是$M$上的正规正泛函），则 $s(\varphi)\mathscr{H}=\overline{M'\xi}$.

证. 设 p 是M的投影，则 $\varphi(p)=0$ 等价于 $p\xi=0$，亦即等价于 $pM'\xi=\{0\}$. 由此即得证.

今设M是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，φ是M上的正泛函，令

$$\vartheta_\varphi=\{a\in M\,|\,\varphi(a^*a)=0\},$$

易见它是M的左理想. 又命

$$a\to a_\varphi=a+\vartheta_\varphi,\ \forall a\in M$$

是作为线性空间的M到其商线性空间 M/ϑ_φ 上的正则映象，并在 M/ϑ_φ 上定义

$$\langle a_\varphi,b_\varphi\rangle=\varphi(b^*a),\ \forall a,b\in M.$$

显然，它将是内积. M/ϑ_φ 依此完备化，得到的 Hilbert 空间记作 $\mathscr{H}_\varphi$. 对任意的 $a\in M$，令

$$\pi_\varphi(a)b_\varphi=(ab)_\varphi,\ \forall b\in M,$$

易见 $\pi_\varphi(a)$ 是 M/ϑ_φ 到 M/ϑ_φ 的线性映象，并且

$$\|\pi_\varphi(a)b_\varphi\|^2=\varphi(b^*a^*ab)\leqslant\|a\|^2\varphi(b^*b)=\|a\|^2\|b_\varphi\|^2.$$

因此，$\pi_\varphi(a)$ 可唯一开拓为 $\mathscr{H}_\varphi$ 中范数 $\leqslant\|a\|$ 的有界线性算子，仍然记以 $\pi_\varphi(a)$. 于是，我们得到

$$\pi_\varphi:M\to B(\mathscr{H}_\varphi),$$

并且它是 *（代数）同态，即

$$\pi_\varphi(\lambda a+\mu b)=\lambda\pi_\varphi(a)+\mu\pi_\varphi(b),$$
$$\pi_\varphi(ab)=\pi_\varphi(a)\pi_\varphi(b),\ \pi_\varphi(a^*)=\pi_\varphi(a)^*,$$

$\forall a,b\in M$，$\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. 此外，

$$\varphi(a)=\langle\pi_\varphi(a)1_\varphi,1_\varphi\rangle,\ \forall a\in M.$$

这里 1_φ 是M的单位元 1 在 M/ϑ_φ 中的正则映象.

定义 1.8.12 设M是 vN 代数，如果 π 是M到 $B(\mathscr{H})$ 中的 *（代数）同态，这里 $\mathscr{H}$ 是某个 Hilbert 空间，则称 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 为M的一个 * 表示.

如上面所见，对于M上任意的正泛函 φ，我们可以得到M的

*表示 $\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi\}$，并且这个*表示有循环矢 1_φ（即 $\pi_\varphi(M)1_\varphi$ 在 $\mathscr{H}_\varphi$ 中稠），以及 φ 可以通过 π_φ 及 1_φ 表达出来（即 $\varphi(a) = \langle\pi_\varphi(a)1_\varphi, 1_\varphi\rangle, \forall a \in M$）。我们称这样的构造为 φ 所产生的 GNS 构造，在第二章中，还将进一步讨论它。

命题 1.8.13 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，φ 是 M 上的正规正泛函，$\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi\}$ 是 φ 产生的*表示，则 $\pi_\varphi(M)$ 是 $\mathscr{H}_\varphi$ 中的 vN 代数，并且 π_φ 是 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H})) - \sigma(B(\mathscr{H}_\varphi), T(\mathscr{H}_\varphi))$ 连续的。此外，如果 φ 还是忠实的，则 1_φ 也是 $\pi_\varphi(M)'$ 的循环矢，并且 π_φ 是忠实(即一一)等距的。

证. 令 $\mathscr{I} = \{a \in M \mid \pi_\varphi(a) = 0\}$，显然，它是 M 的双侧理想。进而，它的单位球是强*算子闭的。事实上，如果网 $\{a_l\} \subset \mathscr{I}$，$\|a_l\| \leqslant 1, \forall l$，并且 $a_l \xrightarrow{\text{强*算子}} a$，则 $a_l^* a_l \xrightarrow{\text{强算子}} a^* a$，$a_l^* a_l \xrightarrow{\sigma(M, M_*)} a^* a$。于是

$$\|\pi_\varphi(a)b_\varphi\|^2 = \varphi(b^* a^* ab) = \lim_l \varphi(b^* a_l^* a_l b)$$

$$= \lim_l \|\pi_\varphi(a_l)b_\varphi\|^2 = 0,$$

$\forall b \in M$，所以，$a \in \mathscr{I}$。

今依命题 1.2.8 及 1.7.1，存在 M 的中心投影 z，使得

$$\mathscr{I} = M(1 - z).$$

从而，π_φ 是 Mz 到 $\pi_\varphi(M)$ 上的*(代数)同构。

我们说 π_φ 在 Mz 上是反保序的，即若 $a \in Mz$，使得 $\pi_\varphi(a) \geqslant 0$，则 $a \geqslant 0$。事实上，由于 π_φ 在 Mz 上是一一的，因此，$a^* = a$。进而，可写 $a = a_+ - a_-$，这里 $0 \leqslant a_\pm \in Mz$，且 $a_+ \cdot a_- = 0$。如果 $a_- \neq 0$，则 $B = \pi_\varphi(a_-)$ 是 $\mathscr{H}_\varphi$ 中的非零正算子，因此有 $\xi \in \mathscr{H}_\varphi$，使得 $\eta = B^{3/2}\xi \neq 0$。于是

$$0 \leqslant \langle\pi_\varphi(a)B\xi, B\xi\rangle = -\|\eta\|^2 < 0$$

矛盾，所以，$a \geqslant 0$。

π_φ 在 Mz 上也是等距的。设 $h = h^* \in Mz$，由

$$-\|\pi_\varphi(h)\| \leqslant \pi_\varphi(h) \leqslant \|\pi_\varphi(h)\|$$

$\pi_\varphi(z) = 1$ 及 π_φ 是反保序的，可见 $-\|\pi_\varphi(h)\| \leqslant h \leqslant \|\pi_\varphi(h)\|$，

即 $\|h\| \leqslant \|\pi_\varphi(h)\|$. 因此，$\|h\| = \|\pi_\varphi(h)\|$，$\forall h = h^* \in Mz$. 进而，由 $\|\pi_\varphi(a)\|^2 = \|\pi_\varphi(a^*a)\|$ 及 $\|a^*a\| = \|a\|^2$，可见对任意的 $a \in Mz$，有 $\|a\| = \|\pi_\varphi(a)\|$.

为了证明 $\pi_\varphi(M)$ 是 $\mathscr{H}_\varphi$ 中的 vN 代数，依系 1.6.3，只须证明 $\pi_\varphi(M)$ 的单位球在 $\mathscr{H}_\varphi$ 中是弱算子闭的. 设 $\{A_l\} \subset \pi_\varphi(M)$，$\|A_l\| \leqslant 1$，$\forall l$，且 $A_l \xrightarrow{\text{弱算子}} A$，依上一段的讨论，有 $a_l \in Mz$，$\pi_\varphi(a_l) = A_l$，$\|a_l\| = \|A_l\| \leqslant 1$，$\forall l$. 但 Mz 的单位球是弱算子紧的，必要时代以子网，可设 $a_l \xrightarrow{\text{弱算子}} a \in Mz$. 于是，

$$\langle Ab_\varphi, c_\varphi\rangle = \lim_l \langle \pi_\varphi(a_l)b_\varphi, c_\varphi\rangle = \lim_l \varphi(c^*a_lb)$$
$$= \langle \pi_\varphi(a)b_\varphi, c_\varphi\rangle,$$

$\forall b, c \in M$，所以，$A = \pi_\varphi(a) \in \pi_\varphi(M)$.

关于 π_φ 的 σ-σ 连续性，依命题 1.2.6，只须验证 π_φ 在 M 的单位球上是弱算子-弱算子连续的，而这是容易的.

最后设 φ 是忠实的，易见 π_φ 是忠实的，从而是等距的. 令 P 是 $\mathscr{H}_\varphi$ 到 $\overline{\pi_\varphi(M)'1_\varphi}$ 上的投影，则 $P \in \pi_\varphi(M)'' = \pi_\varphi(M)$. 于是有 M 的唯一投影 p，使得 $P = \pi_\varphi(p)$. 今 $\varphi(1-p) = \|\pi_\varphi(1-p)1_\varphi\|^2 = \|(1-P)1_\varphi\|^2 = 0$，所以，$P = 1$. 证毕.

注 本节见参考文献 [16]，[21]，[97].

§9. 泛函的极分解与直交分解

设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，$\varphi \in M_*$，$a \in M$，令

$$(R_a\varphi)(b) = \varphi(ba),\ (L_a\varphi)(b) = \varphi(ab),\ \forall b \in M.$$

显然，$R_a\varphi$ 与 $L_a\varphi$ 仍然 $\in M_*$.

引理 1.9.1 设 $\varphi \in M_*$，p 是 M 的投影，使得 $\|R_p\varphi\| = \|\varphi\|$，则 $\varphi = R_p\varphi$.

证. 无妨设 $\|\varphi\| = 1$. 如果 $R_{1-p}\varphi \neq 0$，必存在 $a \in M$，$\|a\| \leqslant 1$，使得 $(R_{1-p}\varphi)(a) = \delta > 0$.

由于 $M = (M_*)^*$，因此有 $b \in M$，$\|b\| = 1$，使得 $(R_p\varphi)$

$(b)=\|R_p\varphi\|=1$. 注意

$$\|bp+\delta a(1-p)\|^2=\|bpb^*+\delta^2a(1-p)a^*\|\leqslant 1+\delta^2.$$

所以，$\|bp+\delta a(1-p)\|<1+\delta^2$. 另一方面，

$$\varphi(bp+\delta a(1-p))=(R_p\varphi)(b)+\delta(R_{1-p}\varphi)(a)=1+\delta^2,$$

这与 $\|\varphi\|=1$ 相矛盾. 证毕.

引理 1.9.2 设 $f\in M^*$, 如果有 $a\in M_+$, $\|a\|\leqslant 1$, 使得 $f(a)=\|f\|$, 则 $f\geqslant 0$.

证. 取 $\theta\in\mathbf{R}$, 使得 $e^{i\theta}f(1-a)\geqslant 0$. 由于 $1\geqslant\|a+e^{i\theta}\cdot(1-a)\|$, 于是

$$\|f\|\leqslant f(a)+e^{i\theta}f(1-a)=f(a+e^{i\theta}(1-a))\leqslant\|f\|,$$

所以，$f(1-a)=0$, 即 $f(1)=f(a)=\|f\|$.

今设 $b\in M_+$; 我们要证明 $f(b)\geqslant 0$. 无妨设 $\|b\|\leqslant 1$ 及 $\|f\|=1$. 如果 $f(b)=\lambda+i\mu$, 这里 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, 则

$$1\geqslant\|1-b\|\geqslant|f(1-b)|=((1-\lambda)^2+\mu^2)^{1/2}.$$

因此,必有 $\lambda\geqslant 0$. 另一方面,对任意的 $r\in\mathbf{R}$,

$$\|b\|^2+r^2=\|b+ir\|^2\geqslant|f(b+ir)|^2\geqslant\mu^2+2r\mu+r^2.$$

因此,必有 $\mu=0$. 证毕.

定理 1.9.3 设 $\varphi\in M_*$, 则存在唯一的 $\omega\in M_*$, $\omega\geqslant 0$ 及 M 的部分等距元 v, 使得

$$\varphi=R_v\omega,\quad v^*v=s(\omega),$$

这时也有 $\omega=R_{v^*}\varphi$, $\|\varphi\|=\|\omega\|$.

证. 由于 $M=(M_*)^*$, 存在 $a\in M$, $\|a\|\leqslant 1$, 使得 $\varphi(a)=\|\varphi\|$. 极分解 $a^*=uh$, 并命 $\omega=R_{u^*}\varphi$. 由于 $\|\omega\|\leqslant\|\varphi\|=\omega(h)\leqslant\|\omega\|$, 因此, $\|\varphi\|=\|\omega\|$, 并由引理 1.9.2, $\omega\geqslant 0$. 今记 $p=uu^*$, 由于 $a=ap$,

$$\|R_p\varphi\|\leqslant\|\varphi\|=\varphi(ap)=(R_p\varphi)(a)\leqslant\|R_p\varphi\|.$$

依引理 1.9.1, $\varphi=R_p\varphi$. 由此, $\varphi=R_u\omega$. 由于 $R_{u^*u}\omega=R_{u^*}\varphi=\omega$, 所以, $u^*u\geqslant s(\omega)$. 今命 $v=us(\omega)$, 依定义 1.8.9, 即见

$$\varphi=R_v\omega,\quad v^*v=s(\omega),\quad \omega=R_{v^*}\varphi.$$

今设另有 $0\leqslant\omega'\in M_*$ 及 $v'\in M$, 使得 $\varphi=R_{v'}\omega'$, 及

$v'^*v' = s(\omega')$. 易见也有 $\omega' = R_{v'^*}\varphi$ 及 $\|\omega'\| = \|\varphi\|$. 无妨设 $\|\varphi\| = 1$. 于是, $1 = \omega'(1) = \varphi(v'^*) = \omega(v'^*v)$, 进而也有 $\omega(v^*v') = 1$. 另一方面, 由 Schwartz 不等式,

$$1 = \omega(v'^*v)^2 \leqslant \omega(v^*v'v'^*v) \leqslant 1.$$

从而, $\omega((v'^*v - 1)^*(v'^*v - 1)) = 0$. 再由 Schwartz 不等式, 可见 $\omega(b(v'^*v - 1)) = 0$, $\forall b \in M$, 即

$$\omega(b) = \varphi(bv'^*) = \omega'(b), \forall b \in M.$$

命 $p = v'^*v$, 则由于 $\omega = \omega'$,

$$s(\omega)ps(\omega) = s(\omega')ps(\omega) = p.$$

前面已指出 $\omega((1 - p^*)(1 - p)) = 0$, 从而依命题 1.8.10,

$$s(\omega)(1 - p^*)(1 - p)s(\omega) = 0.$$

因此, $s(\omega) = ps(\omega) = p$. 今由 $v'^*v' = s(\omega') = s(\omega) = p$, 可见

$$v'^*(v' - v) = 0, \tag{1}$$

再由 $v^*v = s(\omega) = p^* = v^*v'$, 可见

$$v^*(v' - v) = 0. \tag{2}$$

由 (1)—(2), 即得 $v' = v$. 证毕.

定义 1.9.4 定理 1.9.3 中的唯一分解 $\varphi = R_v\omega$, 称为 $\varphi(\in M_*)$ 的极分解, 其中 ω 称为 φ 的绝对值, 有时记以 $\omega = |\varphi|$.

注. 如果 $M = B(\mathscr{H})$, $\varphi(\cdot) = \mathrm{tr}(\cdot t) \in M_* = T(\mathscr{H})$, 其中 $t \in T(\mathscr{H})$. 极分解 $t = vh$, 则 φ 的极分解是 $R_v\omega$, 而 $\omega(\cdot) = \mathrm{tr}(\cdot h)$.

命题 1.9.5 设 $\varphi \in M_*$, 定义 $\varphi^*(a) = \overline{\varphi(a^*)}$, $\forall a \in M$, 则 φ^* 仍 $\in M_*$. 如果 $\varphi = R_v\omega$ 是极分解, 则 φ^* 的极分解是 $\varphi^* = R_{v^*}\psi$, 这里 $\psi = L_{v^*}\varphi$.

证. 易见 $\psi \geqslant 0$, $\varphi^* = R_{v^*}\psi$, 及 $\|\psi\| = \|\omega\| = \|\varphi\| = \|\varphi^*\|$, 于是只要证明 $s(\psi) = vv^*$. 设 p 是 M 的投影, 易见下列条件是相互等价的: ① $\psi(p) = 0$; ② $\omega(v^*pv) = 0$; ③ $s(\omega)v^*pvs(\omega) = 0$; ④ $v^*pv = 0$; ⑤ $pv = 0$; ⑥ $pvv^* = 0$. 因此, $s(\psi) = vv^*$. 证毕.

定义 1.9.6 $s(|\varphi|)$，$s(|\varphi^*|)$ 分别称为 $\varphi(\in M_*)$ 的左、右支持，也记为 $s_l(\varphi)$，$s_r(\varphi)$。

显然，当 φ 厄米（即 $\varphi=\varphi^*$）时，$s_l(\varphi)=s_r(\varphi)$；当 $\varphi\geqslant 0$ 时，$s_l(\varphi)=s_r(\varphi)=s(\varphi)$。

命题 1.9.7 设 $\varphi\in M_*$，则

$$s_l(\varphi)=v^*v=\inf\{p\in M\,|\,p\text{ 是投影，且 }L_p\varphi=\varphi\},$$

$$s_r(\varphi)=vv^*=\inf\{p\in M\,|\,p\text{ 是投影，且 }R_p\varphi=\varphi\}.$$

这里 $\varphi=R_v\omega$ 是极分解。

事实上，下列等价：① $L_p\varphi=\varphi$；② $L_p\omega=\omega$；③ $p\geqslant s(\omega)=s_l(\varphi)$。由此得到 $s_l(\varphi)$ 的表达式。另者同证之。

在定义 1.9.6 中已提到，vN 代数 M 上的泛函 φ 称为厄米的，指 $\varphi=\varphi^*$。显然，φ 是厄米的，当且仅当，$\varphi(h)\in\mathbb{R}$，$\forall h=h^*\in M$。

定理 1.9.8 设 M 是 vN 代数，$\varphi=\varphi^*\in M_*$，则存在唯一的 $\varphi_+,\varphi_-\in M_*$，$\varphi_+,\varphi_-\geqslant 0$，使得

$$\varphi=\varphi_+-\varphi_-,\quad \|\varphi\|=\|\varphi_+\|+\|\varphi_-\|.$$

如果记 $q_+=s(\varphi_+)$，$q_-=s(\varphi_-)$，则还有

$$|\varphi|=\varphi_++\varphi_-,\quad q_+\cdot q_-=0,\quad s(|\varphi|)=q_++q_-$$

以及 $\varphi=R_{(q_+-q_-)}|\varphi|$ 是极分解。

证. 设 $\varphi=R_v|\varphi|$，$\varphi^*=R_{v^*}|\varphi^*|$ 是极分解。由于 $\varphi=\varphi^*$ 及极分解的唯一性，可见 $v=v^*$。于是可写

$$v=q_+-q_-.$$

这里 q_+，q_- 是 M 的投影，并且 $q_+\cdot q_-=0$。

由于 $s(|\varphi|)=v^*v=q_++q_-$，所以

$$|\varphi|=L_{q_+}R_{q_+}|\varphi|+L_{q_-}R_{q_-}|\varphi|$$
$$+L_{q_+}R_{q_-}|\varphi|+L_{q_-}R_{q_+}|\varphi|;$$

另一方面，依命题 1.9.5，$|\varphi^*|=L_vR_v|\varphi|=|\varphi|$，因此

$$L_{q_+}R_{q_-}|\varphi|=L_{q_+}R_{q_-}L_vR_v|\varphi|=-L_{q_+}R_{q_-}|\varphi|,$$

即 $L_{q_+}R_{q_-}|\varphi|=0$。同样，$L_{q_-}R_{q_+}|\varphi|=0$。从而

$$|\varphi|=L_{q_+}R_{q_+}|\varphi|+L_{q_-}R_{q_-}|\varphi|$$

以及

$$\varphi = R_v|\varphi| = L_{q_+}R_{q_+}|\varphi| - L_{q_-}R_{q_-}|\varphi|.$$

如果记 $\varphi_+ = L_{q_+}R_{q_+}|\varphi|$, $\varphi_- = L_{q_-}R_{q_-}|\varphi|$, 则 $\varphi_+,\varphi_- \in M_*$, 并且 $\varphi_+,\varphi_- \geqslant 0$ 以及

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_-,\ |\varphi| = \varphi_+ + \varphi_-.$$

依定理 1.9.3, $\|\varphi\| = \||\varphi|\| = |\varphi|(1) = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$. 此外，显然, $\varphi_+(1-q_+) = 0$; 另一方面,如果M的投影 p 使得 $\varphi_+(p)= 0$, 则 $|\varphi|(q_+pq_+) = 0$, $s(|\varphi|)q_+pq_+s(|\varphi|) = 0$, $q_+pq_+ = 0$, $pq_+ = 0$, 即 $p \leqslant 1 - q_+$. 因此, $s(\varphi_+) = q_+$. 同证 $s(\varphi_-)= q_-$.

今设 $\varphi_1,\varphi_2 \in M_*$, $\varphi_1,\varphi_2 \geqslant 0$, 也使得

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2,\ \|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|.$$

于是, $\|\varphi_+\| = \varphi(q_+) \leqslant \varphi_1(q_+) \leqslant \|\varphi_1\|$, 同样, $\|\varphi_-\| = -\varphi(q_-) \leqslant \varphi_2(q_-) \leqslant \|\varphi_2\|$. 因此

$$\|\varphi_+\| = \varphi_1(q_+) = \|\varphi_1\| = \varphi_1(1),$$
$$\|\varphi_-\| = \varphi_2(q_-) = \|\varphi_2\| = \varphi_2(1).$$

从而

$$s(\varphi_1) \leqslant q_+,\ s(\varphi_2) \leqslant q_-,\ s(\varphi_1)\cdot s(\varphi_2) = 0.$$

现在我们也有

$$\varphi = R_{(s(\varphi_1)-s(\varphi_2))}(\varphi_1 + \varphi_2),$$

依极分解的唯一性,便有

$$s(\varphi_1) - s(\varphi_2) = q_+ - q_-,\ \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_+ + \varphi_-,$$

但 $q_+\cdot q_- = s(\varphi_1)\cdot s(\varphi_2) = 0$, 因此, $q_+ = s(\varphi_1)$, $q_- = s(\varphi_2)$. 进而,

$$\varphi_1 = L_{s(\varphi_1)}(\varphi_1 + \varphi_2) = L_{q_+}(\varphi_+ + \varphi_-) = \varphi_+,\ \varphi_2 = \varphi_-.$$

证毕.

系 1.9.9 M上任何的σ-连续线性泛函必为正规的正泛函的线性和.

定义 1.9.10 如果 $\varphi = \varphi^* \in M_*$, 我们把定理 1.9.8 中所说的唯一分解: $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$, $\|\varphi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$, $\varphi_+,\varphi_- \in M_*$,

$\varphi_+, \varphi_- \geqslant 0$，称为（厄米泛函）$\varphi$ 的直交分解。

注 本节见参考文献 [45]，[92]，[97]，[121]。

§10. Radon-Nikodym 定理

引理 1.10.1 设 N 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，并且有循环矢 ξ（即 $N\xi$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠），令

$$\varphi(a) = \langle a\xi, \xi\rangle, \ \forall a \in N.$$

如果 ϕ 是 N 上的正泛函，并且 $\phi \leqslant \varphi$，则存在唯一的 $t' \in N'$，$0 \leqslant t' \leqslant 1$，使得

$$\phi(a) = \langle at'\xi, \xi\rangle, \ \forall a \in N.$$

证. 在 $\mathscr{H}$ 的稠子空间 $N\xi$ 上定义

$$[a\xi, b\xi] = \phi(b^* a), \ \forall a, b \in N.$$

由于 $\phi \leqslant \varphi$，易见 $|[a\xi, b\xi]| \leqslant \|a\xi\|\|b\xi\|$，$\forall a, b \in N$，因此，存在唯一的 $t' \in B(\mathscr{H})$，使得

$$[a\xi, b\xi] = \phi(b^* a) = \langle t' a\xi, b\xi\rangle, \ \forall a, b \in N$$

由于 $0 \leqslant \phi \leqslant \varphi$，因此，$0 \leqslant t' \leqslant 1$。又由于

$$\langle t'ab\xi, c\xi\rangle = \phi(c^* ab) = \phi((a^* c)^* b) = \langle at'b\xi, c\xi\rangle,$$

$\forall a, b, c \in N$，可见 $t' \in N'$。证毕。

引理 1.10.2 设 φ_0，φ_1 是 vN 代数 N 上的正泛函，并且有 $a \in N$，使得 $\varphi_1 = R_a \varphi_0$，则 $\varphi_1 \leqslant \|a\|\varphi_0$。

证. 记 $\varphi_{n+1} = R_{a^{2^n}} \varphi_n$，$n = 0, 1, \cdots$。对任意的 $b \in N_+$，

$$0 \leqslant \varphi_1(b) = \varphi_0(b^{1/2} \cdot b^{1/2} a) \leqslant \varphi_0(b)^{1/2} \varphi_0(a^* b a)^{1/2},$$

但 $\varphi_2(b) = \varphi_1(ba) = \overline{\varphi_1(a^* b)} = \overline{\varphi_0(a^* b a)} \geqslant 0$，因此，$\varphi_2 \geqslant 0$ 及 $0 \leqslant \varphi_1(b) \leqslant \varphi_0(b)^{1/2} \varphi_2(b)^{1/2}$。 再对 φ_2 施用前面的方法，…，一般可见

$$0 \leqslant \varphi_1(b) \leqslant \varphi_0(b)^{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}} \quad \varphi_0(ba^{2^n})^{\frac{1}{2^n}} \leqslant \varphi_0(b)^{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

$$\cdot \|a\|(\|\varphi_0\|\|b\|)^{\frac{1}{2^n}},$$

$\forall b \in N_+$ 及 n。令 $n \to +\infty$，即见 $\varphi_1 \leqslant \|a\|\varphi_0$。证毕。

定理 1.10.3 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，φ, $\psi\in M_*$，并且 $\varphi\geqslant\psi\geqslant 0$，则存在 $t_0\in M$，$0\leqslant t_0\leqslant 1$，使得

$$\psi(a)=\varphi(t_0at_0),\ \forall a\in M.$$

证. 先设 $s(\varphi)=1$. 用 φ 产生 M 的 * 表示 $\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi\}$. 依命题 1.8.13，$N=\pi_\varphi(M)$ 是 $\mathscr{H}_\varphi$ 中与 M * 同构的 vN 代数.

由于 M 与 N * 同构，用引理 1.10.1 于 N，可见有 $t'\in N'$，$0\leqslant t'\leqslant 1$，使得

$$\psi(a)=\langle\pi_\varphi(a)t'1_\varphi, t'1_\varphi\rangle,\ \forall a\in M.$$

今定义 N' 上的泛函: $\varphi'(a')=\langle a'1_\varphi, 1_\varphi\rangle$, $\forall a'\in N'$ 及 $\psi'=R_{t'}\varphi'$. 依定理 1.9.3，极分解 $\psi'=R_{v'}\omega'$，于是 $\omega'=R_{v'^*t'}\varphi'$. 依引理 1.10.2

$$\omega'\leqslant\|v'^*t'\|\varphi'\leqslant\varphi'.$$

再依引理 1.10.1，有 $t_0\in M$，使得

$$0\leqslant t_0\leqslant 1,\ \omega'(a')=\langle\pi_\varphi(t_0)a'1_\varphi, 1_\varphi\rangle,\ \forall a'\in N',$$

于是由 $\omega'=R_{v'^*t'}\varphi'$,

$$\langle a'\pi_\varphi(t_0)1_\varphi, 1_\varphi\rangle=\langle a'v'^*t'1_\varphi, 1_\varphi\rangle,\ \forall a'\in N'.$$

依命题 1.8.13，1_φ 也是 N' 的循环矢，因此，

$$\pi_\varphi(t_0)1_\varphi=v'^*t'1_\varphi. \tag{1}$$

由 (1)，

$$\begin{aligned}\langle a't'1_\varphi, 1_\varphi\rangle&=\psi'(a')=(R_{v'}\omega')(a')=(R_{v'v'^*t'}\varphi')(a')\\&=\langle a'v'v'^*t'1_\varphi, 1_\varphi\rangle=\langle a'v'\pi_\varphi(t_0)1_\varphi, 1_\varphi\rangle,\end{aligned}$$

$\forall a'\in N'$，因此，

$$t'1_\varphi=v'\pi_\varphi(t_0)1_\varphi. \tag{2}$$

由 (1), (2)，对任意的 $a\in M$，

$$\begin{aligned}\psi(a)&=\langle\pi_\varphi(a)t'1_\varphi, t'1_\varphi\rangle\\&=\langle\pi_\varphi(a)v'\pi_\varphi(t_0)1_\varphi, t'1_\varphi\rangle\\&=\langle\pi_\varphi(a)\pi_\varphi(t_0)1_\varphi, v'^*t'1_\varphi\rangle\\&=\langle\pi_\varphi(a)\pi_\varphi(t_0)1_\varphi, \pi_\varphi(t_0)1_\varphi\rangle\\&=\varphi(t_0at_0).\end{aligned}$$

因此，当 $s(\varphi)=1$ 时，定理得到证明。

今考虑一般的 φ。记 $p = s(\varphi)$，$N = pMp$。限于 vN 代数 N，φ 是忠实的，并且也有 $\varphi \geqslant \psi$。依前段的讨论，存在 $t_0 \in M$，$0 \leqslant t_0 \leqslant p$，使得

$$\psi(a) = \varphi(t_0 a t_0),\ \forall a \in N.$$

显然 $p = s(\varphi) \geqslant s(\psi)$，于是对任意的 $a \in M$，

$$\psi(a) = \psi(pap) = \varphi(t_0 pap t_0) = \varphi(t_0 a t_0).$$

证毕.

定理 1.10.4 设 M 是 vN 代数，$\varphi, \psi \in M_*$，并且 $\varphi \geqslant \psi \geqslant 0$。又 λ 是复数，且 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \frac{1}{2}$，则存在 $h \in M$，$0 \leqslant h \leqslant 1$，使得

$$\psi(a) = \lambda\varphi(ha) + \bar{\lambda}\varphi(ah),\ \forall a \in M.$$

此外，如果 φ 是忠实的，则 h 是唯一的。

证. 由于 $\{h \in M \mid 0 \leqslant h \leqslant 1\}$ 是 M 的 $\sigma(M, M_*)$ 紧凸子集，因此，

$$\mathscr{L} = \{\lambda\varphi(h\cdot) + \bar{\lambda}\varphi(\cdot h) \mid h \in M,\ 0 \leqslant h \leqslant 1\}$$

是 M_* 的 $\sigma(M_*, M)$ 紧凸子集。如果 $\psi \notin \mathscr{L}$，依分离定理，存在 $a = a^* \in M$ 及 $\mu \in \mathbb{R}$，使得

$$\psi(a) > \mu \geqslant f(a),\ \forall f \in \mathscr{L}.$$

写 $a = a_+ - a_-$，这里 $a_+, a_- \in M_+$，$a_+ \cdot a_- = 0$，并取 M 的投影 p，使得 $pa_+ = a_+$，$pa_- = 0$。于是

$$\psi(a_+) > \mu \geqslant \lambda\varphi(pa) + \bar{\lambda}\varphi(ap) = 2\mathrm{Re}\lambda \cdot \varphi(a_+) \geqslant \varphi(a_+),$$

这与 $\varphi \geqslant \psi$ 相矛盾。因此，$\psi \in \mathscr{L}$。

如果 φ 还是忠实的，h 与 k 同时满足要求，由于

$$(\lambda + \bar{\lambda})(h - k)^2 = [\lambda h(h - k) + \bar{\lambda}(h - k)h] - [\lambda k(h - k) + \bar{\lambda}(h - k)k],$$

可见 $\varphi((h - k)^2) = 0$，由此，$h = k$。证毕.

命题 1.10.5 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，φ 是 M 上 $\sigma(M, M_*)$（或者弱算子，或者强算子）连续的线性泛函，则 φ 可开拓成 $B(\mathscr{H})$ 上 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$（或者弱算子，或者强算子）连续的线性泛函 ψ，并且 $\|\psi\| = \|\varphi\|$。此外，如果 $\varphi \geqslant 0$，则也可

取 $\psi\geqslant 0$。

证。首先设 $0\leqslant \varphi\in M_*$。由于 $M_*=T(\mathscr{H})/M_\perp$，于是有 $t=t^*\in T(\mathscr{H})$，使得

$$\varphi(a)=\operatorname{tr}(ta),\ \forall a\in M,$$

分解 $t=t_+-t_-$，这里 t_+,t_- 是迹类正算子，并且 $t_+\cdot t_-=0$。于是

$$\operatorname{tr}(t_+a)\geqslant\varphi(a),\ \forall a\in M_+,$$

依定理 1.10.3，有 $t_0\in M$，$0\leqslant t_0\leqslant 1$，使得

$$\varphi(a)=\operatorname{tr}(t_+t_0at_0)=\operatorname{tr}(t_0t_+t_0a),\ \forall a\in M,$$

命 $\psi(\cdot)=\operatorname{tr}(t_0t_+t_0\cdot)$，它是 $B(\mathscr{H})$ 上的 $\sigma(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 连续泛函，显然 ψ 是 φ 的开拓，且 $\psi\geqslant 0$。此外，$\|\varphi\|=\varphi(1)=\psi(1)=\|\psi\|$。

对于一般的 $\varphi\in M_*$，极分解 $\varphi=R_v\omega$，依上一段的讨论，有 $B(\mathscr{H})$ 上的 $\sigma(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 连续正泛函 g，使得 $g|_M=\omega$，$\|g\|=\|\omega\|=\|\varphi\|$。今命 $\psi=R_vg$，则它是 φ 的开拓，因此，$\|\psi\|\geqslant\|\varphi\|$。另一方面，$\|\psi\|\leqslant\|v\|\|g\|\leqslant\|\varphi\|$，因此，$\|\psi\|=\|\varphi\|$。

当 φ 是弱(或强)算子连续时，仿照上面同样来进行，我们只须证明，存在 $v\in F(\mathscr{H})$，使得 $\varphi(a)=\operatorname{tr}(va)$，$\forall a\in M$。

如果 φ 是弱算子连续的，于是有 0 点的弱算子邻域 $U=U(0,\xi_1,\cdots\xi_n,\eta_1,\cdots,\eta_n,1)=\{a\in M\,|\,|\langle a\xi_i,\eta_i\rangle|\leqslant 1,1\leqslant i\leqslant n\}$，使得 $|\varphi(a)|\leqslant 1$，$\forall a\in U$。定义 $B(\mathscr{H})$ 上的拟范数

$$p(b)=\sum_{i=1}^n|\langle b\xi_i,\eta_i\rangle|,\forall b\in B(\mathscr{H}),$$

则 $|\varphi(a)|\leqslant p(a)$，$\forall a\in M$。依 Hahn-Banach 定理，$\varphi$ 可开拓为 $B(\mathscr{H})$ 上的线性泛函 ψ，并且 $|\psi(b)|\leqslant p(b),\forall b\in B(\mathscr{H})$。于是，$\psi$ 也是弱算子连续的。依命题 1.2.7，有 $v\in F(\mathscr{H})$，使得 $\psi(b)=\operatorname{tr}(bv)$，$\forall b\in B(\mathscr{H})$。特别地，$\varphi(a)=\operatorname{tr}(va)$，$\forall a\in M$。

当 φ 强算子连续时，代替上面的 U 以 $U(0,\xi_1,\cdots,\xi_n,1)=$

$\{a\in M\mid \|a\xi_i\|\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 及 $p(b)=\sum_{i=1}^{n}\|b\xi_i\|$ $(\forall b\in B(\mathscr{H}))$，可同样证明有 $v\in F(\mathscr{H})$，使得 $\varphi(a)=\mathrm{tr}(va)$，$\forall a\in M$。证毕。

注 本节见参考文献〔23〕，〔86〕，〔94〕，〔106〕。

§11. 有界球中拓扑 s^* 与 τ 的等价性

在本章的§2，§3中，我们已提到：在 vN 代数 M 的有界球中，$s^*(M,M_*)\sim\tau(M,M_*)$。本节将证明这个结论。

设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，$(M)_1=\{a\in M\mid \|a\|\leqslant 1\}$ 是 M 的单位球。

引理 1.11.1 设 $a_n=a_n^*\in(M)_1$，并且 $a_n\xrightarrow{s(M,M_*)}0$，则对任意的 $\delta>0$，有 M 的投影列 $\{p_n\}$，使得

$$p_n\xrightarrow{s(M,M_*)}1,\ \|a_np_n\|\leqslant\delta,\ \forall n.$$

证．谱分解 $a_n=\int_{-1}^{1}\lambda de_\lambda^{(n)}$，命

$$p_n=\int_{-\delta}^{\delta}de_\lambda^{(n)},\ q_n=1-p_n.$$

于是，

$$\delta^{-2}a_n^2\geqslant\left(\int_{-1}^{-\delta}+\int_{\delta}^{1}\right)\frac{\lambda^2}{\delta^2}de_\lambda^{(n)}\geqslant q_n,$$

由于 $a_n^2\xrightarrow{\sigma(M,M_*)}0$，因此，$q_n\xrightarrow{s(M,M_*)}0$，即 $p_n\xrightarrow{s(M,M_*)}0$。此外，$\|a_np_n\|=\left\|\int_{-\delta}^{\delta}\lambda de_\lambda^{(n)}\right\|\leqslant\delta$，$\forall n$。证毕。

引理 1.11.2 设 φ 是 M 上忠实的正规正泛函，令

$$d(a,b)=\varphi((a-b)^*(a-b))^{1/2},\ \forall a,b\in(M)_1,$$

则 $(M)_1$ 依 d 是完备的距离空间，且 d 产生的拓扑等价于 $s(M,M_*)$。

证．依命题 1.10.5 及 1.2.2，有 $\{\xi_n\}\subset\mathscr{H}$，使得

$$\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty, \quad \varphi(a) = \sum_n \langle a\xi_n, \xi_n\rangle, \ \forall a \in M.$$

因此，$d(a, b) = \left(\sum_n \|(a-b)\xi_n\|^2\right)^{1/2}$ 是 $(M)_1$ 上的距离。

注意 $[M'\xi_n | n]$ 在 $\mathscr{H}$ 中是稠的。事实上，令 p 是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{[M'\xi_n | n]}$ 上的投影，则 $p \in M$，$p\xi_n = \xi_n, \forall n$。于是，$\varphi(1-p) = 0$，由于 φ 是忠实的，因此，$p = 1$。由这个事实，引理不难得证。

引理 1.11.3 设 M_* 的列 $\{\varphi_k\}$ 依 $\sigma(M_*, M)$ 收敛于 $\varphi_0 \in M_*$，又 $(M)_1$ 的列 $\{a_n\}$ 依 $s^*(M, M_*)$ 收敛于 0，则对 k 一致地有 $\lim_n \varphi_k(a_n) = 0$。

证。显然 $\{\|\varphi_k\| | k\}$ 是有界的，无妨假定：$\|\varphi_k\| \leqslant 1/2, \forall k$。今依定理 1.9.8，可写

$$\varphi_k = (\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}) + i(\varphi_k^{(3)} - \varphi_k^{(4)}),$$

其中 $0 \leqslant \varphi_k^{(j)} \in M_*, \forall j$，并且

$$\|\varphi_k^{(1)}\| + \|\varphi_k^{(2)}\| = \|\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}\| \leqslant 1/2,$$

$$\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)} = \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_k^*).$$

$$\|\varphi_k^{(3)}\| + \|\varphi_k^{(4)}\| = \|\varphi_k^{(3)} - \varphi_k^{(4)}\| \leqslant 1/2,$$

$$\varphi_k^{(3)} - \varphi_k^{(4)} = \frac{1}{2i}(\varphi_k - \varphi_k^*).$$

因此，$\|[\varphi_k]\| \leqslant 1$，这里 $[\varphi_k] = \sum_{j=1}^{4} \varphi_k^{(j)}, \forall k$。进而

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}[\varphi_k] = \varphi \in M_*,$$

记 $p = s(\varphi)$，则 $\varphi_k^{(j)}(1-p) = 0, \forall k, j$。所以，$\varphi_k^{(j)}(a) = \varphi_k^{(j)}(pap), \forall k, j$ 及 $a \in M$。进而

$$\varphi_k(a) = \varphi_k(pap), \ \forall k \text{ 及 } a \in M.$$

显然，$pa_np \xrightarrow{s^*(M, M_*)} 0$，从而可限于 pMp 来考虑问题，即可设 $p = 1$ 或者 φ 是忠实的。

用 φ 于 $(M)_1$，如引理 1.11.2 构造距离 d。对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 及正整数 m，定义

$$H_m = \{a \in (M)_1 \mid |\varphi_k(a) - \varphi_0(a)| \leqslant \varepsilon, \forall k \geqslant m\}.$$

显然 H_m 是 $((M)_1, d)$ 的闭子集。由于 $\varphi_k \xrightarrow{\sigma(M_*, M)} \varphi_0$，所以，

$$(M)_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m.$$

$((M)_1, d)$ 是完备的，依 Baire 纲定理，有 $a_0 \in (M)_1$，$\mu > 0$ 及 m_0，使得

$$\{b \in (M)_1 \mid d(a_0, b) \leqslant \mu\} \subset H_{m_0}.$$

由于 $\left\{\frac{1}{2}(a_n + a_n^*)\right\}$ 及 $\left\{\frac{1}{2i}(a_n - a_n^*)\right\} \subset (M)_1$ 且都依 $s(M, M_*)$ 收敛于 0，因此无妨设 $a_n = a_n^*$，$\forall n$。今取 $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$，依引理 1.11.1，有 M 的投影列 $\{p_n\}$，使得

$$p_n \xrightarrow{s(M, M_*)} 1, \quad \|a_n p_n\| \leqslant \delta, \quad \forall n.$$

记 $\phi_k = \varphi_k - \varphi_0$，则

$$\begin{aligned} |\phi_k(a_n)| &\leqslant |\phi_k(p_n a_n p_n)| + |\phi_k((1 - p_n) a_n p_n)| \\ &\quad + |\phi_k(p_n a_n (1 - p_n))| \\ &\quad + |\phi_k((1 - p_n) a_n (1 - p_n))| \\ &\leqslant 3\delta + |\phi_k((1 - p_n) a_n (1 - p_n))|. \end{aligned} \tag{1}$$

令 $b_n = p_n a_0 p_n + (1 - p_n) a_n (1 - p_n)$，则 $b_n \in (M)_1$，并且易见 $b_n \xrightarrow{s(M, M_*)} a_0$。所以存在 n_1，使得 $b_n \in H_{m_0}$，$\forall n \geqslant n_1$。从而依 H_{m_0} 的定义，

$$|\phi_k(b_n)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall k \geqslant m_0, n \geqslant n_1. \tag{2}$$

由于 $p_n a_0 p_n \xrightarrow{s(M, M_*)} a_0$，所以有 n_2，使得 $p_n a_0 p_n \in H_{m_0}$，$\forall n \geqslant n_2$。从而

$$|\phi_k(p_n a_0 p_n)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall k \geqslant m_0, n \geqslant n_2. \tag{3}$$

今若 $n \geqslant n_1, n_2$，$k \geqslant m_0$，由 (1)，(2)，(3)

$$|\varphi_k(a_n) - \varphi_0(a_n)| = |\phi_k(a_n)|$$

$$\leqslant 3\delta + |\phi_k((1-p_n)a_n(1-p_n))|$$
$$\leqslant 3\delta + |\phi_k(b_n)| + |\phi_k(p_n a_0 p_n)| \leqslant 3\varepsilon,$$

这正表明对 k 一致地有 $\lim\limits_n \varphi_k(a_n) = 0$。 证毕。

引理 1.11.4 设 A 是 M_* 的 $\sigma(M_*, M)$ 紧子集，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 及 A 的有限子集 F，使得只要 $a \in (M)_1$，并且

$$[\varphi](a^*a + aa^*) < \delta, \ \forall \varphi \in F,$$

这里 $[\varphi] = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$，而 $(\varphi_1 - \varphi_2)$ 是 $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*)$ 的直交分解（定义 1.9.10），$(\varphi_3 - \varphi_4)$ 是 $\frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*)$ 的直交分解，那么就有

$$|\varphi(a)| < \varepsilon, \ \forall \varphi \in A.$$

证。设存在某个 $\varepsilon > 0$，使得引理不成立。于是对 $\frac{1}{2}$ 及任意取定的 $\varphi_0 \in A$，有 $a_1 \in (M)_1$，及 $\varphi_1 \in A$，使得

$$[\varphi_0](a_1^*a_1 + a_1a_1^*) < \frac{1}{2}, \ |\varphi_1(a_1)| \geqslant \varepsilon$$

对 $\frac{1}{2^2}$ 及 $\{\varphi_0, \varphi_1\}$，又有 $a_2 \in (M)_1$，及 $\varphi_2 \in A$，使得

$$[\varphi_i](a_2^*a_2 + a_2a_2^*) < \frac{1}{2^2}, \ i = 0, 1, \ |\varphi_2(a_2)| \geqslant \varepsilon$$

$\cdots$，一般得到 $\{\varphi_n | n = 0, 1, \cdots\} \subset A$，及 $\{a_n | n = 1, 2, \cdots\} \subset (M)_1$，使得

$$[\varphi_i](a_j^*a_j + a_ja_j^*) < \frac{1}{2^j}, \ 0 \leqslant i \leqslant j-1,$$
$$|\varphi_j(a_j)| \geqslant \varepsilon, \ j = 1, 2, \cdots.$$

由于 A 是 $\sigma(M_*, M)$ 紧集，依 Eberlein-Šmulian 定理（见 [22]），有子列 $\{n_k\} \subset \{0, 1, \cdots\}$ 及 $\phi \in A$，使得

$$\varphi_{n_k} \xrightarrow{\sigma(M_*, M)} \phi.$$

A 自然是有界的，从而 $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}[\varphi_{n_k}] \in M_*$。又

$$|\varphi(a_j^*a_j + a_ja_j^*)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}|[\varphi_{n_k}](a_j^*a_j + a_ja_j^*)| + \sum_{k>m} 2^{-k+1}\|[\varphi_{n_k}]\| < 2^{-j} + 2^{-m+2}\sup_n \|\varphi_n\|,$$

这里m使得 $n_1, \cdots, n_m \leqslant j-1$，而 $n_{m+1} > j-1$. 自然当 $j \to +\infty$ 时，$m \to \infty$，从而

$$\varphi(a_j^*a_j + a_ja_j^*) \to 0,$$

记 $p = s(\varphi)$，由 Schwartz 不等式，易见

$$\varphi((pa_jp)^*(pa_jp)) \to 0,\ \varphi((pa_jp)\cdot(pa_jp)^*) \to 0$$

φ在 pMp 上是忠实的，依引理 1.11.2，

$$pa_jp \xrightarrow{s^*(M, M_*)} 0.$$

依引理 1.11.3 及 $p \geqslant s([\varphi_{n_k}])\ (\forall k)$，可见对$k$一致有

$$\lim_j \varphi_{n_k}(pa_jp) = \lim_j \varphi_{n_k}(a_j) = 0.$$

这与

$$|\varphi_{n_k}(a_{n_k})| \geqslant \varepsilon,\ \forall k$$

相矛盾. 证毕.

引理1.11.5 设A是M_*的 $\sigma(M_*, M)$ 紧子集，则有 $\psi \in M_*$，$\psi \geqslant 0$，使得对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，只要 $a \in (M)_1$，$\psi(a^*a + aa^*) < \delta$，就有

$$|\varphi(a)| < \varepsilon,\ \forall \varphi \in A.$$

证. 对 $\frac{1}{n}$，依引理 1.11.4，有A的有限子集 F_n 及 $\delta_n > 0$，使得只要 $a \in (M)_1$，$[\varphi](a^*a + aa^*) < \delta_n$，$\forall \varphi \in F_n$，就有 $|\varphi(a)| < 1/n$，$\forall \varphi \in A$.

令

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+m_n)} \sum_{\varphi \in F_n} [\varphi].$$

这里 $m_n = {}^{\#}F_n$，$[\varphi]$ 的定义如引理 1.11.4 所述. 对任意的 $\varepsilon >$

0，取 $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$，并令 $\delta=\delta_{n_0}/2^{k_{n_0}+m_{n_0}}$。于是，如果 $a\in(M)_1$，并且 $\psi(a^*a+aa^*)<\delta$，则

$$[\varphi](a^*a+aa^*)<\delta_{n_0},\ \forall\varphi\in F_{n_0}.$$

因此，$|\varphi(a)|<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$，$\forall\varphi\in A$。 证毕.

定理 1.11.6 设 M 是 vN 代数，则在 M 的有界球中，$s^*(M,M_*)\sim\tau(M,M_*)$。

证. 设网 $\{a_l\}\subset(M)_1$，且 $a_l\xrightarrow{s^*(M,M_*)}0$，及 A 是 M_* 的 $\sigma(M_*,M)$ 紧子集，我们需要证明

$$\varphi(a_l)\to 0,\ 对\ \varphi\in A\ 一致$$

取引理 1.11.5 中的 $0\leqslant\psi\in M_*$，及对任意 $\varepsilon>0$ 的相应的 $\delta>0$。对此 $\delta>0$，有指标 l_0，当 $l\geqslant l_0$ 时，

$$\psi(a_l^*a_l+a_la_l^*)<\delta.$$

从而，依引理 1.11.5，$|\varphi(a_l)|<\varepsilon$，$\forall l\geqslant l_0$ 及 $\varphi\in A$。这正表明 $\varphi(a_l)\to 0$，对 $\varphi\in A$ 一致. 证毕.

命题 1.11.7 设M是无限维的 vN 代数，则在整个M中，$s^*(M,M_*)$ 与 $\tau(M,M_*)$ 并不等价；在 $(M)_1$ 中，$\tau(M,M_*)$ 与一致拓扑也不等价。特别，如果M作为 Banach 空间是自反的，则 $\dim M<\infty$。

证。$s^*(M,M_*)\not\sim\tau(M,M_*)$，完全可仿命题 1.2.5 来证。今若 $\dim M=\infty$，取M的相互直交的非零投影无穷列 $\{p_n\}$，令 $p=\sum_n p_n$，依命题 1.2.10 及定理 1.11.6，$\sum_{n=1}^m p_n\xrightarrow{\tau(M,M_*)}p$。另一方面却有

$$\left\|p-\sum_{n=1}^m p_n\right\|=1,\ \forall m.$$

因此，在 $(M)_1$ 中，$\tau(M,M_*)$ 并不等价于一致拓扑.

如M自反，则 $\tau\sim$ 一致拓扑，因此，$\dim M<\infty$。 证毕。

注 本节见参考文献〔1〕，〔93〕。

§12. 正规 * 同态

定义 1.12.1 vN 代数M到 vN 代数N中的 *(代数)同态Φ称为正规的，指对M_+的任意有界递增网$\{a_l\}$有

$$\sup_l \Phi(a_l) = \Phi(\sup_l a_l).$$

请注意，如果Φ是M到N的 * 同态，首先Φ是保序的，即$\Phi(M_+)\subset N_+$，这是因为M_+的元必有形式$a^*a\ (a\in M)$；其次$\|\Phi\|\leqslant 1$，事实上，$\Phi(1)=p$是N的投影，对于任意的$h=h^*\in M$，由于$-\|h\|\leqslant h\leqslant\|h\|$，因此，$-\|h\|p\leqslant\Phi(h)\leqslant\|h\|p$，从而，$\|\Phi(h)\|\leqslant\|h\|$. 进而，$\|\Phi(a)\|^2=\|\Phi(a^*a)\|\leqslant\|a^*a\|=\|a\|^2$，$\forall a\in M$，可见$\|\Phi\|\leqslant 1$. 由此，如果$\{a_l\}$是$M_+$的有界递增网，则$\{\Phi(a_l)\}$也是$N_+$的有界递增网.

命题 1.12.2 设Φ是 vN 代数M到 vN 代数N中的 * 同态，则下列是相互等价的：1) Φ是$\sigma(M,M_*)$-$\sigma(N,N_*)$连续的；2) Φ是正规的；3) Φ是全可加的，即若$\{p_l\}$是M的相互直交的投影族，则有$\Phi\left(\sum_l p_l\right)=\sum_l\Phi(p_l)$. 这时$\Phi(M)$还是$N$的$\sigma(N,N_*)$闭 * 子代数.

证. 依命题 1.2.10，可见由 1) 可以推导2). 2) 推导 3) 是显然的. 今设Φ是全可加的，于是对任意的$0\leqslant\varphi\in N_*$，$\phi\circ\Phi$是M上全可加的正泛函，依定理 1.8.6，$\phi\circ\Phi\in M_*$. 再依系 1.9.9，可见Φ是$\sigma-\sigma$连续的.

今设Φ是正规的及$N\subset B(\mathscr{H})$. 令$\vartheta=\{a\in M\,|\,\Phi(a)=0\}$，它是$M$的$\sigma$-闭双侧理想，所以有$M$的中心投影$z$，使得$\vartheta=M(1-z)$. 于是$\Phi$是$Mz$到$B(\mathscr{H})$中的 * 同构. 现在完全可仿照命题 1.8.13 的证明，指出$\Phi(M)$的单位球是弱算子闭的，因此，$\Phi(M)$是$\sigma(N,N_*)$闭的. 证毕.

命题 1.12.3 设Φ是 vN 代数M到 vN 代数N上的 *(代数)同构，则Φ必然是正规的，并且等距.

证．设$\{a_l\}$是M_+的有界递增网，$a=\sup_l a_l$，于是，$\sup_l \Phi(a_l) = b \leqslant \Phi(a)$．同样，$\Phi^{-1}$是$N$到$M$上的$*$同构，因此，

$$\sup_l \Phi^{-1}(\Phi(a_l)) = a \leqslant \Phi^{-1}(b).$$

所以，$b = \Phi(a)$，即Φ是正规的．证毕．

定理 1.12.4 M，N分别是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$，$\mathscr{K}$ 中的 vN 代数，Φ是M到N上的正规$*$同态，则

$$\Phi = \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1.$$

这里Φ_1是M的增补，即存在 Hilbert 空间 $\mathscr{L}$，使得

$$\Phi_1(a) = a \otimes 1_{\mathscr{L}}, \ \forall a \in M,$$

Φ_2是诱导，即有 $(M\overline{\otimes}\mathbb{C}1_{\mathscr{L}})'$ 的投影 p'，使得

$$\Phi_2(a\otimes 1_{\mathscr{L}}) = (a\otimes 1_{\mathscr{L}})p', \ \forall a \in M.$$

而Φ_3是 $(M\overline{\otimes}\mathbb{C}1_{\mathscr{L}})\,p'(p'(\mathscr{H}\otimes\mathscr{L})$ 中的 vN 代数) 到N上的空间$*$同构．

证．首先假定N有循环矢η，并令

$$\varphi(a) = \langle \Phi(a)\eta, \eta\rangle, \ \forall a \in M,$$

则φ是M上的正规正泛函． 依命题 1.10.5，可见有 $\{\xi_n\}\subset\mathscr{H}$，$\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$，使得

$$\varphi(a) = \sum_n \langle a\xi_n, \xi_n\rangle, \ \forall a \in M.$$

设 $\mathscr{L} = l^2$，$\xi = (\xi_n) \in \mathscr{H}\otimes\mathscr{L}$，$\Phi_1(a) = a\otimes 1_{\mathscr{L}}$，$\forall a \in M$，则

$$\varphi(a) = \langle \Phi_1(a)\xi, \xi\rangle, \ \forall a \in M,$$

记p'是 $\mathscr{H}\otimes\mathscr{L}$ 到 $\overline{\Phi_1(M)\xi}$ 上的投影，则

$$p' \in \Phi_1(M)' = (M\overline{\otimes}\mathbb{C}1_{\mathscr{L}})'.$$

令 $\Phi_2(a\otimes 1_{\mathscr{L}}) = (a\otimes 1_{\mathscr{L}})p'$，$\forall a \in M$，显然

$$\varphi(a) = \langle (\Phi_2\circ\Phi_1)(a)\xi, \xi\rangle, \ \forall a \in M.$$

定义 $\mathscr{K}$ 到 $p'(\mathscr{H}\otimes\mathscr{L})$ 的映象 u:

$$u\Phi(a)\eta = (\Phi_2\circ\Phi_1)(a)\xi = p'(a\xi_n) = (a\xi_n)$$

$\forall a \in M$． 由于 $\langle \Phi(a)\eta, \eta\rangle = \varphi(a) = \langle (\Phi_2\circ\Phi_1)(a)\xi, \xi\rangle$，可见

u 是等距的。此外，$\Phi(M)\eta=N\eta$ 在 $\mathscr{K}$ 中稠及 $(\Phi_2\circ\Phi_1)(M)\xi=\Phi_1(M)\xi$ 在 $p'(\mathscr{H}\otimes\mathscr{L})$ 中稠，因此，u 可唯一扩张为 $\mathscr{K}$ 到 $p'(\mathscr{H}\otimes\mathscr{L})$ 上的酉算子，并且

$$u\Phi(a)u^{-1}=(\Phi_2\circ\Phi_1)(a),\ \forall a\in M.$$

如果用 $u^{-1}\cdot u$ 来决定 $(\Phi_2\circ\Phi_1)(M)$ 到 N 上的空间 * 同构 Φ_3，则 $\Phi=\Phi_3\circ\Phi_2\circ\Phi_1$。

对于一般情形，分解

$$\mathscr{K}=\sum_l\oplus\mathscr{K}_l,\ \mathscr{K}_l=\overline{N\eta_l},\ \forall l.$$

令 p'_l 是 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{K}_l$ 上的投影，则 $p'_l\in N'$，$\forall l$。于是，$\Phi_l=p'_l\Phi$ 是 M 到 $N_l=Np'_l$ 上的正规 * 同态，$\forall l$。依前一段的讨论，$\Phi_l=\Phi_3^{(l)}\circ\Phi_2^{(l)}\circ\Phi_1^{(l)}$，$\forall l$。令

$$\Phi_i=\sum_l\oplus\Phi_i^{(l)},\ i=1,2,3,$$

即见有 $\Phi=\Phi_3\circ\Phi_2\circ\Phi_1$，且 Φ_1,Φ_2,Φ_3 满足要求。证毕。

命题 1.12.5 设 Φ 是 vN 代数 M 到 vN 代数 N 上的 * 同构，则存在某个 Hilbert 空间中的 vN 代数 V 及 V' 的中心覆盖为 1 的投影 p'，q'，使得 M，N 分别空间 * 同构于 Vq'，Vp'，而 Φ 相应地变成：$vq'\to vp'$ $(\forall v\in V)$ 的 * 同构。

证. 保持定理 1.12.4 的符号，取 $V=M\overline{\otimes}C1_{\mathscr{L}}$。由于 Φ 是 * 同构，Φ_1，Φ_3 显然是 * 同构，从而 Φ_2 也是 * 同构，依命题 1.5.10，p' 在 V' 中的中心覆盖是 1，并且在定理 1.12.4 的证明中已指出：N 空间 * 同构于 Vp'。

注意

$$\mathscr{H}\otimes\mathscr{L}=\sum_{\dim\mathscr{L}}\oplus\mathscr{H},\ V=\left\{\begin{pmatrix}a & & 0\\ & a & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix}\middle|\, a\in M\right\}.$$

取

$$q'=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix},$$

则 $q'\in V'$，且 q' 在 V' 中的中心覆盖为 1 以及 M 空间 * 同构于

Vq'。余皆显然。证毕。

定理 1.12.6 设 M_i，N_i 分别是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_i$，$\mathscr{K}_i$ 中的 vN 代数，Φ_i 是 M_i 到 N_i 上的正规 * 同态，$i=1, 2$，则存在唯一的由 $M_1\overline{\otimes}M_2$ 到 $N_1\overline{\otimes}N_2$ 上的正规 * 同态 Φ，使得

$$\Phi(a_1\otimes a_2)=\Phi_1(a_1)\otimes\Phi_2(a_2),\ \forall a_1\in M_1,\ a_2\in M_2.$$

此外，如果 Φ_i 还是 * 同构（或者空间 * 同构），$i=1, 2$，则 Φ 亦然。

证。依定理 1.12.4，可写

$$\Phi_i(a_i)=u_i(a_i\otimes 1_i)p_i'u_i^{-1},\ \forall a_i\in M_i,\ i=1, 2.$$

这里 1_i 是 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_i$ 中的恒等算子，$p_i'\in(M_i\overline{\otimes}C1_i)'$，$u_i$ 是 $p_i'(\mathscr{H}_i\otimes\mathscr{L}_i)$ 到 $\mathscr{K}_i$ 上的酉算子，$i=1, 2$。记 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_1\otimes\mathscr{L}_2$，于是

$$\begin{aligned}p'=p_1'\otimes p_2'&\in(M_1\overline{\otimes}C1_1)'\,\overline{\otimes}\,(M_2\overline{\otimes}C1_2)'\\&=(M_1\overline{\otimes}M_2\overline{\otimes}C1_{\mathscr{L}})'\end{aligned}$$

及 $u=u_1\otimes u_2$ 为 $p_1'(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{L}_1)\otimes p_2'(\mathscr{H}_2\otimes\mathscr{L}_2)=p'(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2\otimes\mathscr{L})$ 到 $\mathscr{K}_1\otimes\mathscr{K}_2$ 上的酉算子。今命

$$\Phi(a)=u(a\otimes 1_{\mathscr{L}})p'u^{-1},\quad \forall a\in M_1\overline{\otimes}M_2.$$

显然 Φ 是 $M_1\overline{\otimes}M_2$ 到 $u(M_1\overline{\otimes}M_2\overline{\otimes}C1_{\mathscr{L}})p'u^{-1}$ 上的正规 * 同态，使得

$$\Phi(a_1\otimes a_2)=\Phi_1(a_1)\otimes\Phi_2(a_2),\ \forall a_1\in M_1,\ a_2\in M_2.$$

既然 Φ 是正规的，$\{a_1\otimes a_2|a_1\in M_1,\ a_2\in M_2\}$ 又生成 $M_1\overline{\otimes}M_2$，从而 $\{\Phi(a_1\otimes a_2)=\Phi_1(a_1)\otimes\Phi_2(a_2)|a_1\in M_1,\ a_2\in M_2\}$ 生成 $u(M_1\overline{\otimes}M_2\overline{\otimes}C1_{\mathscr{L}})p'u^{-1}$，所以

$$N_1\overline{\otimes}N_2=u(M_1\overline{\otimes}M_2\overline{\otimes}C1_{\mathscr{L}})p'u^{-1}.$$

即 Φ 是 $M_1\overline{\otimes}M_2$ 到 $N_1\overline{\otimes}N_2$ 上满足要求的正规 * 同态。至于 Φ 的唯一性，由它的正规性立见。

今若 Φ_i 还是 * 同构，$i=1, 2$。在命题 1.12.5 中已指出：p_i' 在 $(M_i\overline{\otimes}C1_i)'$ 中的中心覆盖为 1，$i=1, 2$，从而 p' 在 $(M_1\overline{\otimes}$

$M_2\overline{\otimes}C1_{\mathscr{K}})'$ 中的中心覆盖也为 1. 再依命题 1.5.10，可见 Φ 也是 $*$ 同构。

当 Φ_i 是空间 $*$ 同构时，$i=1,2$，可以直接证明结论。证毕。

注　本节见参考文献〔21〕,〔72〕,〔76〕,〔126〕。

§ 13. 循环投影的比较与空间*同构定理

定义 1.13.1　设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，$\xi\in\mathscr{H}$，记 p_ξ 为 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{M'\xi}$ 上的投影（显然 $p_\xi\in M$），并称它为 M 的相应于矢 ξ 的循环投影；记 p'_ξ 为 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{M\xi}$ 上的投影（显然 $p'_\xi\in M'$），并称它为 M' 的相应于矢 ξ 的循环投影。

定理 1.13.2　设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，$\xi,\eta\in\mathscr{H}$，则在 M 中，$p_\xi\gtrsim p_\eta$，必须且只须，在 M' 中，$p'_\xi\gtrsim p'_\eta$。

证。设有 $u'\in M'$，使得

$$u'^*u'=p'_\eta,\quad u'u'^*\leqslant p'_\xi.$$

显然 $u'u'^*=p'_{u'\eta}$，$p_\eta=p_{u'\eta}$，因此，我们可以用 $u'\eta$ 替代 η 来证明，即可设 $\eta\in\overline{M\xi}$。

考虑 M 上的泛函 $\varphi(a)=\langle a\eta,\xi\rangle\ (\forall a\in M)$。极分解 $\varphi=R_v\omega$，$\omega=R_{v^*}\varphi$，于是，$\varphi=R_{vv^*}\varphi$。从而 $(\eta-vv^*\eta)\in(M\xi)^\perp$。另一方面，$\eta\in\overline{M\xi}$。因此

$$\eta=vv^*\eta. \tag{1}$$

由于 $p_\xi\xi=\xi$ 及 $\omega=R_{v^*}\varphi$，可见 $\omega=L_{p_\xi}\omega$。但 $\omega\geqslant 0$，从而，$\omega=R_{p_\xi}\omega$，即

$$\langle v^*\eta,a\xi\rangle=\langle p_\xi v^*\eta,a\xi\rangle,\ \forall a\in M.$$

因此，$(v^*\eta-p_\xi v^*\eta)\in(M\xi)^\perp$。另一方面，$\eta\in\overline{M\xi}$，因此，$v^*\eta=p_\xi v^*\eta$，即

$$v^*\eta\in p_\xi\mathscr{H}=\overline{M'\xi}, \tag{2}$$

依 (2)，$v^*\overline{M'\eta}=\overline{M'v^*\eta}\subset\overline{M'\xi}$；依 (1)，$vv^*\overline{M'\eta}=\overline{M'\eta}$。因

此，v^*p_η 是M的部分等距元，它以$\overline{M'\eta}$为始域，以 $v^*p_\eta\mathscr{H}=v^*\overline{M'\eta}(\subset\overline{M'\xi})$ 为终域．这就说明在M中，$p_\eta\lesssim p_\xi$．证毕．

定义 1.13.3 设M是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，我们已经定义过：$\mathscr{H}$ 的矢 ξ 是M的循环矢，指 $M\xi$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠．今我们说 $\mathscr{H}$ 的矢 η 是M的分离矢(或矢 η 对M是分离的)，指若 $a\in M$，使得 $a\eta=0$，则 $a=0$．这相当于说 η 是 M' 的循环矢．

命题 1.13.4 设M是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，并且有循环矢 ξ 及分离矢 η，则存在 $\zeta\in\mathscr{H}$，它同时是M的循环矢及分离矢．

证．由 $p'_\xi=1\geqslant p'_\eta$，依定理 1.13.2，$p_\xi\gtrsim p_\eta=1$，因此，$p_\xi\sim p_\eta$，即有 $v\in M$，使得 $v^*v=p_\xi$，$vv^*=p_\eta=1$．令 $\zeta=v\xi$，则 $\overline{M'\zeta}=v\overline{M'\xi}=\mathscr{H}$，$\overline{M\zeta}\supset\overline{Mv^*v\xi}=\overline{M\xi}=\mathscr{H}$，即 ζ 满足要求．证毕．

定理 1.13.5 设 M_i 是 $\mathscr{H}_i$ 中的 vN 代数，既有循环矢也有分离矢，$i=1,2$，又若 Φ 是 M_1 到 M_2 上的 * 同构，则 Φ 是空间 * 同构．

证．依命题 1.12.3，Φ 是正规的，所以

$$M=\{a\oplus\Phi(a)\,|\,a\in M_1\}$$

是 $(\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2)$ 中的 vN 代数．命 p'_i 为 $(\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2)$ 到 $\mathscr{H}_i$ 上的投影，$i=1,2$，显然

$$p'_1,\ p'_2\in M',\ M_{p'_1}=M_1,\ M_{p'_2}=\Phi(M_1)=M_2,$$

依命题 1.5.2，只须证明，p'_1 与 p'_2 在 M' 中是等价的．设 ξ_i 是 M_i 的循环且分离的矢(命题 1.13.4)，注意 $p'_i(\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2)=\mathscr{H}_i=\overline{M'_i\xi_i}=\overline{M'\xi_i}$，$i=1,2$，从而依定理 1.13.2，只须证明 p_1 与 p_2 在 M 中是等价的，这里 p_i 是 $(\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2)$ 到 $\overline{M'\xi_i}$ 上的投影，$i=1,2$．实际上我们可以证明 $p_1=p_2=1$．事实上，由于

$$\{a'_1\oplus a'_2\,|\,a'_1\in M'_1,\ a'_2\in M'_2\}\subset M',\ \overline{M'_1\xi_1}=\mathscr{H}_1,\ \ \overline{M'_2\xi_2}=\mathscr{H}_2,$$

因此，$p_i\geqslant p'_i$，$(1-p_i)p'_i=0$，$i=1,2$．又由于 $(1-p_i)\in M$，所以有 $a,b\in M_1$，使得

$$a\oplus\Phi(a)=1-p_1,\ b\oplus\Phi(b)=1-p_2.$$

但 $(1-p_i)p_i'=0$，从而 $a=\Phi(b)=0$，$a=b=0$，即 $p_1=p_2=1$. 证毕.

命题 1.13.6 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，ξ 是 M 的分离矢，φ 是 M 上的正规正泛函，则存在 $\eta\in\overline{M\xi}$，使得 $\varphi(a)=\langle a\eta,\eta\rangle$，$\forall a\in M$.

证. 设 $\{\pi_\varphi,\mathscr{H}_\varphi\}$ 是 φ 产生的 M 的 $*$ 表示，$\widetilde{\mathscr{H}}=\mathscr{H}_\varphi\oplus\mathscr{H}$，$\widetilde{M}=\{\tilde{a}=\pi_\varphi(a)\oplus a\,|\,a\in M\}$. 依命题 1.8.13，$\widetilde{M}$ 是 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 中的 vN 代数. 定义

$$\tilde{\varphi}(\tilde{a})=\langle\tilde{a}\tilde{1}_\varphi,\tilde{1}_\varphi\rangle=\langle\pi_\varphi(a)1_\varphi,1_\varphi\rangle=\varphi(a),\ \forall a\in M$$

这里 $\tilde{a}=\pi_\varphi(a)\oplus a$，$\tilde{1}_\varphi=(1_\varphi,0)$. 记 $\tilde{\xi}=(0,\xi)$，它是 $\widetilde{M}$ 的分离矢，从而 $\overline{\widetilde{M}'\tilde{\xi}}=\widetilde{\mathscr{H}}\supset\overline{\widetilde{M}'\tilde{1}_\varphi}$. 依定理 1.13.2，在 $\widetilde{M}'$ 中，$p'_{\tilde{\xi}}\gtrsim p'_{\tilde{1}_\varphi}$. 注意 $p'_{\tilde{1}_\varphi}\widetilde{\mathscr{H}}=\overline{\widetilde{M}\tilde{1}_\varphi}=\overline{\pi_\varphi(M)1_\varphi}=\mathscr{H}_\varphi$，因此，$p'_{\tilde{1}_\varphi}=p'_\varphi$ 即为 $\widetilde{\mathscr{H}}$ 到 $\mathscr{H}_\varphi$ 上的投影. 于是存在 $v'\in\widetilde{M}'$，使得 $v'^*v'=p'_\varphi$，$v'v'^*\leqslant p'_{\tilde{\xi}}$. 注意 $p'_{\tilde{\xi}}\widetilde{\mathscr{H}}=\overline{\widetilde{M}\tilde{\xi}}=(0,\overline{M\xi})$，因此可写

$$v'\tilde{1}_\varphi=(0,\eta)=\tilde{\eta},$$

其中 $\eta\in\overline{M\xi}$. 于是对任意的 $a\in M$，

$$\begin{aligned}\varphi(a)&=\langle\tilde{a}\tilde{1}_\varphi,\tilde{1}_\varphi\rangle=\langle\tilde{a}\tilde{1}_\varphi,v'^*v'\tilde{1}_\varphi\rangle\\&=\langle\tilde{a}v'\tilde{1}_\varphi,v'\tilde{1}_\varphi\rangle=\langle\tilde{a}\tilde{\eta},\tilde{\eta}\rangle=\langle a\eta,\eta\rangle.\end{aligned}$$

证毕.

系 1.13.7 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，并有分离矢，又 $\varphi\in M_*$，则存在 $\xi,\eta\in\mathscr{H}$，使得

$$\varphi(a)=\langle a\xi,\eta\rangle,\ \forall a\in M.$$

事实上，把 φ 极分解，并依命题 1.13.6 立见。

注 本节见参考文献 [49]，[74]，[119]，[131].

§ 14. σ-有限的 vN 代数

定义 1.14.1 vN 代数 M 称为 σ-有限的[1]，指如果 $\{p_l\}$ 是 M 的

---

1) 也有的作者把这类 vN 代数称作可数分解的.

相互直交的投影族，则除去可数多个 l 外，其余的 p_l 都为零.

命题 1.14.2 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，则下列条件是相互等价的：1) M 是 σ-有限的；2) M 有分离矢列 $\{\xi_n\}$，即若 $a\in M$，使得 $a\xi_n=0$，$\forall n$，则 $a=0$；3) M' 有循环矢列 $\{\eta_n\}$，即 $[a'\eta_n|n, a'\in M']$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠；4) M 上有忠实的正规正泛函.

证. 列 $\{\xi_n\}$ 对 M 是分离的，当且仅当，$\{\xi_n\}$ 对 M' 是循环的，因此，2) 与 3) 等价.

今设 $\{\xi_n\}$ 是 M 的分离矢列，$\{p_l\}$ 是 M 的相互直交的投影族，由于 $\sum_l \|p_l\xi_n\|^2\leqslant\|\xi_n\|^2$，$\forall n$，因此，除去可数多个 l 外，其余的 p_l 满足：$p_l\xi_n=0$，$\forall n$，即 $p_l=0$. 从而，M 是 σ-有限的.

如果 M 是 σ-有限的，写

$$\mathscr{H}=\sum_l\oplus\mathscr{H}_l,\ \mathscr{H}_l=\overline{M'\eta_l}=p_l\mathscr{H},\ \forall l.$$

于是 $\{p_l\}$ 中仅可数个非零，换言之，可写

$$\mathscr{H}=\sum_n\oplus\overline{M'\eta_n}$$

易见 $\{\eta_n\}$ 是 M' 的循环矢列. 以上说明 1), 2), 3) 相互等价.

今设 φ 是 M 上的忠实的正规正泛函，$\{p_l\}$ 是 M 的相互直交投影族，于是

$$\sum_l\varphi(p_l)=\varphi\left(\sum_l p_l\right)<\infty.$$

所以除去可数多个 l 外，其余的 p_l 都满足：$\varphi(p_l)=0$，即 $p_l=0$. 从而，M 是 σ-有限的. 反之，若 M 是 σ-有限的，于是 M 有分离矢列 $\{\xi_n\}$. 无妨设 $\sum_n\|\xi_n\|^2<\infty$，令

$$\varphi(a)=\sum_n\langle a\xi_n,\xi_n\rangle,\ \forall a\in M,$$

即见 φ 是 M 上忠实的正规正泛函. 证毕.

命题 1.14.3 如果 M_* 是可分的，则 M 是 σ-有限的。

证. 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $\{\phi\in M_*|\phi\geqslant 0, \|\phi\|\leqslant 1\}$ 的可数稠子集，并令 $\varphi=\sum_n 2^{-n}\varphi_n$，自然 $0\leqslant\varphi\in M_*$. 如果 $a\in M_+$，使得

$\varphi(a)=0$，于是 $\varphi_n(a)=0$，$\forall n$. 进而 $\psi(a)=0$，$\forall 0\leqslant\psi\in M_*$. 再依系 1.9.9，$a=0$，即 φ 是忠实的，从而 M 是 σ-有限的. 证毕.

注. 如果 M 的作用空间 $\mathscr{H}$ 是可分的，则 M_* 可分. 事实上，设 $\{\xi_n\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的可数稠集，令 $\omega_{nm}(a)=\langle a\xi_n,\xi_n\rangle$，$\forall a\in M$. 如果 $[\omega_{nm}|n,m]$ 不在 M_* 中稠，则有 $0\neq a\in M$，使得 $\omega_{nm}(a)=0$，$\forall n,m$. 这便与 $\{\xi_n\}$ 为 $\mathscr{H}$ 的稠子集相矛盾. 因此，M_* 可分.

命题 1.14.4 设 M 是 σ-有限的 vN 代数，$(M)_1$ 是 M 的单位球，则

$$((M)_1, s(M,M_*)),\quad ((M)_1, \tau(M,M_*))$$

都可以赋予等价于拓扑的距离，使之成为完备的距离空间.

证. 在 $(M)_1$ 中，$s(M,M_*)\sim$ 强算子拓扑，以及 $\tau(M,M_*)\sim s^*(M,M_*)\sim$ 强 * 算子拓扑，如果 $\{\xi_n\}$ 是 M 的分离矢列，并且 $\sum\limits_n\|\xi_n\|^2<\infty$，分别命

$$d_\tau(a,b)=\left\{\sum_n(\|(a-b)\xi_n\|^2+\|(a-b)^*\xi_n\|^2)\right\}^{1/2},$$

$$d_s(a,b)=\left(\sum_n\|(a-b)\xi_n\|^2\right)^{1/2},$$

$\forall a,b\in(M)_1$，即为所求.

命题 1.14.5 如果 M 是 $\mathscr{H}$ 中 σ-有限的交换 vN 代数，则 M 有分离矢.

证. 依命题 1.14.2 的证明，可写

$$\mathscr{H}=\sum_n\oplus\mathscr{H}_n,\quad \mathscr{H}_n=p_n\mathscr{H}=\overline{M'\eta_n},\ \forall n.$$

无妨设 $\sum\limits_n\|\eta_n\|<\infty$，并令 $\eta=\sum\limits_n\eta_n$，我们说 η 即为 M 的分离矢. 事实上，如果 $a\in M$，而 $a\eta=0$，由于 M 是交换的，从而

$$0=p_na\eta=ap_n\eta=a\eta_n,\ \forall n,$$

但 $\{\eta_n\}$ 对 M 是分离的，因此，$a=0$. 证毕.

定义 1.14.6 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，M 的投影 p 称为 σ-有限的，指 $p\mathscr{H}$ 中的 vN 代数 $M_p = pMp$ 是 σ-有限的.

命题 1.14.7 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数.

1) 如果 φ 是 M 上的正规正泛函，则其支持 $s(\varphi)$ 是 M 的 σ-有限投影；

2) p, q 是 M 的投影，并且 $p \sim q$，如果 p 是 σ-有限的，则 q 也是 σ-有限的；

3) 如果 $\{p_n\}$ 是 M 的 σ-有限投影列，则 $\sup\limits_n p_n$ 也是 σ-有限的.

证. 1) 由于 φ 是 $s(\varphi)Ms(\varphi)$ 上忠实的正规正泛函立见. 2) 由于 M_p 与 M_q *同构立见.

3) 设 $p = \sup\limits_n p_n$. 对每个 n，设 $\{\xi_k^{(n)}\}_k$ 是 $M'p_n$ 在 $p_n\mathscr{H}$ 中的循环矢列，于是 $\{\xi_k^{(n)} | n, k\}$ 将是 $M'p$ 在 $p\mathscr{H} = \left[\bigcup\limits_n p_n\mathscr{H}\right]$ 中的循环矢列，因此，p 也是 σ-有限的. 证毕.

命题 1.14.8 设 p，q 分别是 vN 代数 M，N 的 σ-有限投影，则 $p\otimes q$ 是 $M\overline{\otimes}N$ 的 σ-有限投影.

证. 由于 $p\otimes q(M\overline{\otimes}N)p\otimes q = pMp\overline{\otimes}qNq$，因此只须证明 σ-有限 vN 代数的张量积仍然是 σ-有限的.

设 N_i 是 $\mathscr{H}_i$ 中的 σ-有限 vN 代数，于是 N_i' 在 $\mathscr{H}_i$ 中有循环矢列 $\{\xi_n^{(i)}\}_n$，$i = 1, 2$. 由此

$$(N_1\overline{\otimes}N_2)' = N_1'\overline{\otimes}N_2'$$

在 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 中将有循环矢列 $\{\xi_n^{(1)}\otimes\xi_m^{(2)}\}_{n,m}$，即见 $N_1\overline{\otimes}N_2$ 也是 σ-有限的. 证毕.

定理 1.14.9 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，则可写

$$M = \sum_l \oplus M_l,$$

其中每个 M_l 或者是 σ-有限的，或者空间 * 同构于 $N_l\overline{\otimes}B(\mathscr{H}_l)$，这里 N_l 是 σ-有限的 vN 代数，$\mathscr{H}_l$ 是某个 Hilbert 空间.

证. 设φ是M上非零的正规正泛函，$s(\varphi)$是其支持，于是$s(\varphi)$是M的σ-有限投影.

令$\{p_l\}_{l\in\Lambda}$是M的相互直交的投影极大族，使得$p_l\sim s(\varphi)$，$\forall l$. 记$q=1-\sum_{l\in\Lambda}p_l$，对$q$与$s(\varphi)$使用定理1.5.4，有$M$的中心投影$z$，使得

$$qz\precsim s(\varphi)z,\quad s(\varphi)(1-z)\precsim q(1-z),$$

由族$\{p_l\}$的极大性，$s(\varphi)z\neq 0$.

今设$v_l\in M$，使得$v_l^*v_l=s(\varphi)z$，$v_lv_l^*=p_lz$，$\forall l\in\Lambda$. 又令$v_0\in M$，使得$v_0v_0^*=qz$，$v_0^*v_0\leqslant s(\varphi)z$.

当$\Lambda=\{1,2,\cdots\}$可数时，令

$$\phi(a)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\varphi(v_n^*av_n),\quad\forall a\in Mz,$$

则$0\leqslant\phi\in M_*$. 如果$a\in Mz$，使得$\phi(a^*a)=0$，则

$$\varphi(v_n^*a^*av_n)=0,\quad\forall n\geqslant 0.$$

依v_n的定义，$v_n^*a^*av_n\in s(\varphi)Ms(\varphi)$，因此，$av_n=0$，$\forall n\geqslant 0$. 于是，$ap_lz=aqz=0$，$\forall l\in\Lambda$. 由此，$a=az=a\left(qz+\sum_{l\in\Lambda}p_lz\right)=0$，即$\phi$在$Mz$上是忠实的，从而$Mz$是$\sigma$-有限的.

如果Λ不是可数的，可写

$$\Lambda=\bigcup_{\beta\in\mathrm{I}}\Lambda_\beta,\quad\Lambda_\beta\cap\Lambda_{\beta'}=\phi,\quad\forall\beta\neq\beta'\in\mathrm{I},$$

使得每个Λ_β都是可数无穷的. 固定I的一个指标β_0，并令

$$\gamma_{\beta_0}=q+\sum_{l\in\Lambda_{\beta_0}}p_l,\qquad\gamma_\beta=\sum_{l\in\Lambda_\beta}p_l,\quad\forall\beta\neq\beta_0,$$

易见$\{\gamma_\beta z|\beta\in\mathrm{I}\}$是相互直交且等价的投影族，以及$\sum_{\beta\in\mathrm{I}}\gamma_\beta z=z$.

依定理1.5.6，Mz将空间*同构于$N\overline{\otimes}B(\mathscr{H})$，其中$\dim\mathscr{H}=\#\mathrm{I}$，$N=\gamma_{\beta_0}Mz\gamma_{\beta_0}$. 由于$\Lambda_{\beta_0}$是可数的，仿前段可证，$N$是$\sigma$-有限的.

总之，M有非零中心投影z，使得Mz或者σ-有限，或者空间

*同构于 $N\overline{\otimes}B(\mathscr{H})$ 且N是σ-有限的. 再对 $M(1-z)$ 作同样处理及用 Zorn 辅理,即可得证.

命题 1.14.10 设M是 vN 代数,则存在M的相互直交的σ-有限投影族$\{p_l\}$,使得 $\sum_l p_l = 1$.

证. 设$\{p_l\}$是M的相互直交的σ-有限投影的极大族,令 $p=\sum_l p_l$. 如果 $1-p\neq 0$,依定理 1.14.9,$(1-p)M(1-p)$必包含非零的σ-有限投影q. 当然q也是M的σ-有限投影,这便与$\{p_l\}$的极大性相矛盾. 证毕.

注 本节见参考文献[12],[21],[55],[97].

第二章 c^*-代数的基础

本章开始介绍另一类算子代数——c^*-代数.在第一章 §2 中，对于 $B(\mathscr{H})$，引入许多线性拓扑. 除去一致拓扑外，$B(\mathscr{H})$ 的 * 子代数依其它拓扑的闭包都是一样的(即为 von Neumann 代数);而依一致拓扑的闭包，正是本章要介绍的 c^*-代数.

§1 引入 c^*-代数的抽象定义，即为 Banach 代数，其中定义 * 运算，并且满足 $\|x^*x\| = \|x\|^2$. 依照 Gelfand 理论，半单纯的交换 Banach 代数可表示为 $C(\Omega)$ 的一个子代数 (Ω 是它的谱空间). 然而交换 c^*-代数有更强的性质，I. M. Gelfand 指出它同构于 $C(\Omega)$ (2.1.4). §2 指出 c^*-代数正元的全体是一个锥，这为 §3 的研究打下基础. 在 §3 中，首先引入 c^*-代数上的态的概念(在正元上取非负实值且范数为 1 的线性泛函)，这是一个十分重要的概念. 如果 c^*-代数相应于量子系统的观察量代数，那么 c^*-代数上的态相应于量子系统的状态。通过 c^*-代数上的态，可以构造该 c^*-代数的一个循环 * 表示 (2.3.18)，这就是极为重要而又著名的 GNS (Gelfand-Naimark-Segal) 构造. 通过这个构造，c^*-代数将与由 Hilbert 空间中有界线性算子所组成的一致闭 * 代数等距同构 (2.3.20). 这个构造首先出现在 I. M. Gelfand 与 M. A. Naimark 的关于 c^*-代数理论的奠基性工作(1943)中，而完全的形式属于 I. E. Segal. §4 指出 c^*-代数虽然可以没有单位元，但必有起到类似于单位元作用的逼近单位元. 由此证明，c^*-代数模以它的闭双侧理想仍将是 c^*-代数. §5 给出 c^*-代数单位球端点的特征 (2.5.1)，这结果属于 R. V. Kadison. §6 证明 Kadison 的迁移定理 (2.6.5)，由此指出对于 c^*-代数，拓扑不可约 * 表示与代数不可约 * 表示是等价的. §7，§8 是 c^*-代数的理想、纯态、不可约 * 表示的进一步研究. §10 提出 * 表示的比较、分离性

与拟等价性的概念，这对于进一步研究 c^*-代数的表示理论是重要的。§11 指出 c^*-代数的包络 vN 代数（即在泛表示空间中的弱算子闭包）与 c^*-代数的二次共轭空间等距同构（2.11.2）。§12 c^*-代数公理的研究起源于 Gelfand-Naimark 猜测。1943 年，他们猜测：c^*-代数的假设 $\|x^*x\|=\|x\|^2$，可以减弱为 $\|x^*x\|=\|x^*\|\cdot\|x\|$。这引起了许多研究。1960 年，J. G. Glimm 与 R. V. Kadison 研究了 c^*-代数的酉元性质（2.12.1），给予这个猜测以肯定的回答。后来又有进一步的推广（2.12.26）。与公理问题相联系的，有 c^*-等价的问题，这方面有 R. Arens 等的结果（2.12.22，2.12.23，2.12.24）。

§1. c^*-代数的定义及其简单的性质

定义 2.1.1 设 A 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的 Banach 代数，并在其中定义 $*$ 运算，满足

$$(\lambda x+\mu y)^*=\bar{\lambda}x^*+\bar{\mu}y^*,\ (xy)^*=y^*x^*,$$
$$(x^*)^*=x,\ \|x^*x\|=\|x\|^2,$$

$\forall x, y\in A$，$\lambda, \mu\in\mathbf{C}$，则称 A 是 c^*-代数。

如果 A 是 c^*-代数，易见 $\|x^*\|=\|x\|$，$\forall x\in A$，因此，$*$ 运算在 A 中是连续的。如果 A 有单位元，记以 1_A，不混淆时，简写为 1，显然 $\|1\|=1$[1]。如果 $m\subset A$，B 称为由 m 生成的（A 的）c^*-子代数，指 B 是包含 m 的（A 的）最小 c^*-子代数。

命题 2.1.2 如果 A 是 c^*-代数，并且无单位元，在 $A\dotplus\mathbf{C}$ 上定义

$$\|x+\lambda\|=\sup\{\|xy+\lambda y\|\mid y\in A,\ \|y\|\leqslant 1\},\ \forall x\in A,\ \lambda\in\mathbf{C},$$

则 $A\dotplus\mathbf{C}$ 是有单位元的 c^*-代数，并保持 A 上的范数不变。

证. 只须对任意的 $x\in A$，$\lambda\in\mathbf{C}$，证明

$$\|(x+\lambda)^*(x+\lambda)\|=\|x+\lambda\|^2.$$

---

1) 请读者注意识别代数单位元 1 与数值 1。

设 $0<\mu<1$，于是有 $y\in A$，$\|y\|\leqslant 1$，使得

$$\mu^2\|x+\lambda\|^2\leqslant\|xy+\lambda y\|^2=\|y^*(x+\lambda)^*(x+\lambda)y\|$$
$$\leqslant\|(x+\lambda)^*(x+\lambda)\|.$$

令 $\mu\to 1-$，则

$$\|x+\lambda\|^2\leqslant\|(x+\lambda)^*(x+\lambda)\|$$
$$\leqslant\|(x+\lambda)^*\|\cdot\|x+\lambda\|. \tag{1}$$

所以，$\|x+\lambda\|\leqslant\|(x+\lambda)^*\|$. 进而，$\|x+\lambda\|=\|(x+\lambda)^*\|$. 用此代回 (1)，即见 $\|x+\lambda\|^2=\|(x+\lambda)^*(x+\lambda)\|$. 证毕.

注. 如果 A 有单位元 e，在 $A\dotplus\mathbf{C}$ 上定义

$$\|x+\lambda\|=\max\{\|x+\lambda e\|,|\lambda|\},\ \forall x\in A,\ \lambda\in\mathbf{C},$$

则 $A\dotplus\mathbf{C}$ 成为有新单位元 1 的 c^*-代数，并以 A 为它的 c^*-子代数. 当然，这时 A 的任意元 x 考虑为 $A\dotplus\mathbf{C}$ 的元时，它的谱多了零点.

命题 2.1.3 设 A 是 c^*-代数，h 是 A 的自伴元，即 $h=h^*$，则 $\sigma(h)$ 由实数构成，且 $\|h\|=\nu(h)$[1].

证. 无妨设 A 有单位元. 由于 $*$ 运算的连续性，

$$(e^{ith})^*=e^{-ith},\ \forall t\in\mathbf{R}.$$

于是，如果 $\lambda\in\sigma(h)$，

$$|e^{it\lambda}|^2\leqslant\|e^{ith}\|^2=\|(e^{ith})^*e^{ith}\|=1,\ \forall t\in\mathbf{R}.$$

因此，$\lambda=\bar{\lambda}$. 此外

$$\|h\|=\|h^*h\|^{1/2}=\|h^2\|^{1/2}=\cdots=\|h^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}\to\nu(h)$$

所以，$\|h\|=\nu(h)$. 证毕.

定理 2.1.4 设 A 是交换的 c^*-代数，则 A 等距 $*$ 同构于 $C_0^\infty(\Omega)$，这里 Ω 是某个局部紧 Hausdorff 空间，$C_0^\infty(\Omega)$ 是 Ω 上在 ∞ 处为 0 的复值连续函数的全体. 此外，当 A 有单位元时，Ω 可以是紧的.

证. 考虑 $A\dotplus\mathbf{C}$，设其谱空间为 Ω'，依弱 $*$ 拓扑，Ω' 是紧

---

1) 这里对任意的 $a\in A$，$\sigma(a)$ 表示 a 的谱集，$\nu(a)$ 表示 a 的谱半径，即 $\nu(a)=\max\{|\lambda|\mid\lambda\in\sigma(a)\}$.

Hausdorff 空间. 对任意的 $x\in A\dotplus C$，依命题 2.1.3，$x^*(t)=\overline{x(t)}$，$\forall t\in\Omega'$（这里 $x(\cdot)\in C(\Omega')$ 是 x 的 Gelfand 变换），进而由命题 2.1.3，

$$\|x\|^2=\|x^*x\|=\nu(x^*x)=\max_{t\in\Omega'}|x^*x(t)|=\max_{t\in\Omega'}|x(t)|^2.$$

因此，$A\dotplus C$ 等距 * 同构于 $C(\Omega')$ 的一个包含常数函数的 * 子代数. 若 $t_1\neq t_2\in\Omega'$，它们对应的 $A\dotplus C$ 的极大理想是不同的，因此有 $x\in A\dotplus C$，使得 $x(t_1)\neq x(t_2)$. 今依 Stone-Weierstrass 定理（例见 [22]），

$$A\dotplus C\cong C(\Omega').$$

A 是 $A\dotplus C$ 的极大理想，对应 Ω' 的点 t_0，令 $\Omega=\Omega'\backslash\{t_0\}$，则 Ω 是局部紧 Hausdorff 空间，并且 $A\cong C_0^\infty(\Omega)$. 证毕.

引理 2.1.5 设 A 是有单位元的 c^*-代数，$h=h^*\in A$，且 $0\notin\sigma(h)$，则存在常数项为 0 的多项式列 $\{p_n(\cdot)\}$，使得 $\|p_n(h)-h^{-1}\|\to 0$.

证. 用 $\{(h-\lambda),(h-\lambda)^{-1}|\lambda\notin\sigma(h)\}$ 生成 A 的 c^*-子代数 B，则 B 交换且包含 A 的单位元. 依定理 2.1.4，$B\cong C(\Omega)$. 显然，h 作为 A 或 B 的元时，谱集是相同的，即 $\sigma_B(h)=\sigma(h)=\{h(t)|t\in\Omega\}$. 又依命题 2.1.3，$h(t)=\overline{h(t)}$，$\forall t\in\Omega$. 此外，因 $0\notin\sigma(h)$，$\min_{t\in\Omega}|h(t)|=\varepsilon>0$. 作 $[-\|h\|,\|h\|]$ 上的连续函数 $f(\lambda)$，使得

$$f(0)=0,\ f(\lambda)=\lambda^{-1},\ \forall\lambda\in[-\|h\|,\|h\|]\backslash(-\varepsilon,\varepsilon),$$

并取常数项为 0 的多项式列 $\{p_n(\cdot)\}$，使得

$$\max\{|p_n(\lambda)-f(\lambda)||-\|h\|\leqslant\lambda\leqslant\|h\|\}\to 0.$$

于是

$$\|p_n(h)-h^{-1}\|=\max_{t\in\Omega}|p_n(h(t))-h(t)^{-1}|$$
$$\leqslant\max_{-\|h\|\leqslant\lambda\leqslant\|h\|}|p_n(\lambda)-f(\lambda)|\to 0.$$

证毕.

命题 2.1.6 设 A 是有单位元的 c^*-代数，B 是 A 的包含单位元的 c^*-子代数，则对任意的 $b\in B$，$\sigma_B(b)=\sigma_A(b)$.

证．依引理 2.1.5，$\sigma_B(b^*b)=\sigma_A(b^*b)$，$\sigma_B(bb^*)=\sigma_A(bb^*)$．于是如果 b 在 A 中有逆，则 b^*b，bb^* 分别在 B 中有逆，即 b 在 B 中分别有左逆与右逆，从而 b 在 B 中有逆．证毕．

命题 2.1.7 设 A 是有单位元的 c^*-代数，u 是 A 的酉元，即 $u^*u=uu^*=1$，则 $\sigma(u)$ 由绝对值为 1 的复数组成．此外，A 是其酉元全体的线性包．

易证，从略（参照命题 1.3.4 的 3）．

命题 2.1.8 设 A 是有单位元的 c^*-代数，a 是 A 的正规元，即 $a^*a=aa^*$，B 是由 $\{a,1\}$ 生成的 c^*-子代数，则 $B\cong C(\sigma(a))$，且 a 对应的 $C(\sigma(a))$ 的函数 $a(\lambda)=\lambda\ (\forall\lambda\in\sigma(a))$．特别，$\|a\|=\nu(a)$．

证．依定理 2.1.4，$B\cong C(\Omega)$．显然 $t\to a(t)$ 是 Ω 到 $\sigma(a)$ 上的一一连续映象，又 Ω 与 $\sigma(a)$ 均紧，因此，Ω 与 $\sigma(a)$ 同胚．证毕．

命题 2.1.9 设 A 是交换 c^*-代数，$\|\cdot\|_1$ 是 A 上另一个范数，使得

$$\|ab\|_1\leqslant\|a\|_1\cdot\|b\|_1,\ \forall a,\ b\in A,\ \text{则}\ \|\cdot\|\leqslant\|\cdot\|_1.$$

证．无妨设 A 有单位元，于是 $A\cong C(\Omega)$．令 $\Omega_1=\{t\in\Omega|$ 如果 $\{x_n\}\subset A$，且 $\|x_n\|_1\to0$，则 $x_n(t)\to0\}$．如果 Ω_1 不在 Ω 中稠，则有 Ω 的非空开集 U，使得 $\Omega_1\cap\overline{U}=\emptyset$．于是有 $a\in A$，使得 $a(\Omega_1)=1$，$a(U)=0$．记 A_1 是 A 依照 $\|\cdot\|_1$ 完备化的 Banach 代数，如果 a 在 A_1 中无逆，则有 A_1 上非零乘法泛函 ρ，使得 $\rho(a)=0$．记 $\rho|_A=t$，则 $t\in\Omega_1$，这便与 $a(\Omega_1)=1$ 相矛盾，因此，a 在 A_1 中有逆．另一方面，显然可取 $0\neq b\in A$，使得 $\mathrm{supp}\,b(\cdot)\subset U$，于是 $ab=0$．这又将与 a 在 A_1 中有逆相矛盾．因此，Ω_1 必在 Ω 中稠．由此，对任意的 $a\in A$，$\|a\|_1\geqslant\max\{\rho(a)|\rho$ 是 A_1 上的非零乘法泛函$\}=\max\limits_{t\in\Omega_1}|a(t)|=\|a\|$．证毕．

命题 2.1.10 设 A 是 c^*-代数，$\|\cdot\|_1$ 是 A 上另一个范数，使得 $\|ab\|_1\leqslant\|a\|_1\cdot\|b\|_1$，$\|a^*a\|_1=\|a\|_1^2$，$\forall a,b\in A$，则 $\|\cdot\|=\|\cdot\|_1$．

证．依命题 2.1.2，无妨设 A 有单位元．设 $h=h^*\in A$，B 是

由$\{1, h\}$生成的A的交换c^*-子代数. B_1是B依$\|\cdot\|_1$完备化所得的交换c^*-子代数. 如果Ω是B的谱空间，依命题 2.1.9 的证明，$\{\rho$限于$B \mid \rho$是B_1上的非零乘法泛函$\}$在Ω中是稠的. 从而，$\|h\|_1 = \max\{|\rho(h)| \mid \rho$ 是B_1上的非零乘法泛函$\} = \|h\|$. 由此，对任意的 $a \in A$，$\|a\| = \|a^*a\|^{1/2} = \|a^*a\|_1^{1/2} = \|a\|_1$. 证毕.

注 本节见参考文献[38]，[54].

§2. c^*-代数的正元

定义 2.2.1 设A是c^*-代数，$a \in A$称为正的，记作 $a \geqslant 0$，指 $a = a^*$，并且 $\sigma(a)$ 由非负实数组成. A的正元全体记以A_+.

命题 2.2.2 设A是c^*-代数，$h = h^* \in A$，则有唯一的 h_+，$h_- \in A_+$，使得

$$h = h_+ - h_-, \quad h_+ \cdot h_- = 0.$$

证. 在 $A \dotplus \mathbb{C}$ 中考虑时，由于要求 $h = h_+ - h_-$ 及 $h_+ \cdot h_- = 0$，可见 h_+，h_- 仍然$\in A$，因此无妨设A有单位元. 用$\{1, h\}$生成A的交换c^*-子代数B，依定理 2.1.4，可见这样的 h_+，h_- 在B中存在. 又依命题 2.1.6，$h_+, h_- \in A_+$. 如果又有A的正元 h'_+，h'_- 满足要求，用 $\{1, h, h'_+, h'_-\}$ 生成A的交换c^*-子代数 $C(\supset B)$，再依定理 2.1.4，即见 $h'_+ = h_+$，$h'_- = h_-$. 证毕.

命题 2.2.3 设A是有单位元的c^*-代数，$h = h^* \in A$，$\|h\| \leqslant 1$，则 $h \geqslant 0$，当且仅当，$\|1 - h\| \leqslant 1$.

证. 用$\{1, h\}$生成交换c^*-子代数 $B \cong C(\Omega)$立见.

命题 2.2.4 A_+是锥，即若 $a, b \in A_+$，则 $a + b \in A_+$. 此外，$A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$.

证. 无妨设A有单位元，依命题 2.2.3，

$$\|1 - a/\|a\|\| \leqslant 1, \quad \|1 - b/\|b\|\| \leqslant 1.$$

于是，

$$\left\|1-\frac{a+b}{\|a\|+\|b\|}\right\| \leqslant \frac{\|a\|\cdot\left\|1-\frac{a}{\|a\|}\right\|+\|b\|\cdot\left\|1-\frac{b}{\|b\|}\right\|}{\|a\|+\|b\|} \leqslant 1.$$

再由命题 2.2.3，$a+b\in A_+$。 此外，如 $h\in A_+\cap(-A_+)$，则 $\sigma(h)=\{0\}$. 再由命题 2.1.3，$h=0$。证毕。

注. 以后我们在 $A_h=\{a\in A\,|\,a=a^*\}$ 中引入偏序，$a\geqslant b$，指 $(a-b)\in A_+$.

命题 2.2.5 设 $a\in A_+$，则有唯一的 $a^{1/2}\in A_+$，使得 $a^{1/2}$ 与 a 交换，并且 $(a^{1/2})^2=a$. 此外，这 $a^{1/2}$ 还是 a 的常数项为 0 的多项式列的极限.

证明与命题 2.2.2 相似。

引理 2.2.6 设 B 是有单位元的复域 C 上的代数，$a,b\in B$，则 $\sigma(ab)\cup\{0\}=\sigma(ba)\cup\{0\}$.

证. 如果 $\lambda\neq0$，使得 $(ab-\lambda)$ 在 B 中有逆 u，则 $(bua-1)\cdot(ba-\lambda)=(ba-\lambda)(bua-1)=\lambda$，因此，$(ba-\lambda)$ 在 B 中也有逆. 证毕.

命题 2.2.7 设 A 是 c^*-代数，$a\in A$，则 $a\in A_+$，当且仅当，存在 $b\in A$，使得 $a=b^*b$.

证. 必要性由命题 2.2.5 立见. 反之设 $a=b^*b$，自然 $a^*=a$，于是依命题 2.2.2 及 2.2.5，可写 $a=u^2-v^2$，这里 $u,v\in A_+$，并且 $uv=0$。于是

$$(bv)^*(bv)=vav=-v^4\leqslant 0.$$

如果写 $bv=h+ik$，这里 $h^*=h$，$k^*=k$，则

$$(bv)^*(bv)+(bv)(bv)^*=2(h^2+k^2)\geqslant 0.$$

所以，$(bv)(bv)^*=-(bv)^*(bv)+2(h^2+k^2)=v^4+2(h^2+k^2)\geqslant 0$。但依引理 2.2.6，$\sigma((bv)^*(bv))\cup\{0\}=\sigma((bv)(bv)^*)\cup\{0\}$，所以，$\sigma((bv)^*(bv))=\{0\}$，即 $v^4=0$。 由命题 2.2.5，$v=0$。从而，$a=u^2\in A_+$。证毕。

命题 2.2.8 设 A 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 c^*-代数（即为 $B(\mathscr{H})$ 的一致闭 $*$ 子代数），$a\in A$，则 $a\in A_+$，当且仅当，a 是

$\mathscr{H}$ 中的正算子.

证. 必要性由命题 2.2.7 立见. 反之，设 a 是 $\mathscr{H}$ 中的正算子，于是至少 a 是 A 的自伴元. 依命题 2.2.2，可写 $a = a_+ - a_-$，$a_+, a_- \in A_+$，且 $a_+a_- = 0$. 对任意的 $\xi \in \mathscr{H}$，

$$0 \leqslant \langle aa_-\xi, a_-\xi \rangle = -\langle a_-^3\xi, \xi \rangle \leqslant 0.$$

所以，$a_-^3 = 0$，$a_- = 0$，及 $a = a_+ \in A_+$. 证毕.

命题 2.2.9 设 A 是 c^*-代数.

1) 如果 $a, b \in A_+$，$a \leqslant b$，则 $\|a\| \leqslant \|b\|$，及 $cac^* \leqslant c^*bc$，$\forall c \in A$;

2) A_+ 是 A 的闭子集;

3) 如果 A 有单位元，$a, b \in A_+$，$a \leqslant b$，并且 a，b 在 A 中都有逆，则 $b^{-1} \leqslant a^{-1}$.

证. 1) 易见，从略.

2) 设 $a_n \in A_+$，且 $a_n \to a$. 显然 $a = a^*$，于是可写 $a = a_+ - a_-$，这里 $a_+, a_- \in A_+, a_+ \cdot a_- = 0$. 令 $b_n = a_-a_na_- \in A_+$，则 $b_n \to b = a_-aa_- = -a_-^3$. 于是

$$0 \leqslant -b \leqslant b_n - b \leqslant \|b_n - b\| \to 0.$$

即 $b = 0$，$a_- = 0$，及 $a = a_+ \in A_+$.

3) 由于 $(a^{-1})^{1/2}(b-a)(a^{-1})^{1/2} \geqslant 0$，因此，$(a^{-1})^{1/2}b(a^{-1})^{1/2} \geqslant 1$. 由函数表示立见，$a^{1/2}b^{-1}b^{1/2} \leqslant 1 = a^{1/2}a^{-1}a^{1/2}$. 所以，$b^{-1} \leqslant a^{-1}$. 证毕.

命题 2.2.10 设 A 是 c^*-代数，$a, b \in A_+$，并且 $a \leqslant b$，则对任意的数 $\lambda \in [0, 1]$，$a^\lambda \leqslant b^\lambda$，这里 a^λ, b^λ 可以由命题 2.1.8 来理解.

证. 无妨设 A 有单位元. 首先考虑 a，b 有逆的情况. 令 $E = \{\lambda \in \mathbf{R} | a^\lambda \leqslant b^\lambda\}$，由于 A_+ 是闭的，因此，E 是 $\mathbf{R}$ 的闭子集. 显然，$0, 1 \in E$，所以只须对任意的 $\lambda, \mu \in E$，证明 $\dfrac{\lambda+\mu}{2}$ 也 $\in E$. 由

$$b^{-\frac{\lambda}{2}}a^\lambda b^{-\frac{\lambda}{2}} \leqslant 1,\ b^{-\frac{\mu}{2}}a^\mu b^{-\frac{\mu}{2}} \leqslant 1.$$

因此，$\|b^{-\frac{\lambda}{2}}a^{\lambda}b^{-\frac{\lambda}{2}}\|\leqslant 1$，$\|b^{-\frac{\mu}{2}}a^{\mu}b^{-\frac{\mu}{2}}\|\leqslant 1$，进而，$\|a^{\frac{\lambda}{2}}b^{-\frac{\lambda}{2}}\|\leqslant 1$，$\|b^{-\frac{\mu}{2}}a^{\frac{\mu}{2}}\|\leqslant 1$。依引理 2.2.6，

$$1\geqslant\|b^{-\frac{\mu}{2}}a^{\frac{\lambda+\mu}{2}}b^{-\frac{\lambda}{2}}\|\geqslant\nu(b^{-\frac{\mu}{2}}a^{\frac{\lambda+\mu}{2}}b^{-\frac{\lambda}{2}})$$
$$=\nu(b^{-\frac{\lambda+\mu}{4}}a^{\frac{\lambda+\mu}{2}}b^{-\frac{\lambda+\mu}{4}})=\|b^{-\frac{\lambda+\mu}{4}}a^{\frac{\lambda+\mu}{2}}b^{-\frac{\lambda+\mu}{4}}\|$$

即 $\frac{\lambda+\mu}{2}\in E$。

对一般情况，设 $\varepsilon>0$，依前段，$(a+\varepsilon)^{\lambda}\leqslant(b+\varepsilon)^{\lambda}$，再令 $\varepsilon\to 0+$，即得证。

命题 2.2.11 设 A 是 c^*-代数，$S=\{a\in A\mid\|a\|\leqslant 1\}$ 是 A 的单位球，则 $\mathring{S}\cap A_+=\{a\in A_+\mid\|a\|<1\}$ 依正元的序是定向的，即若 $x,y\in\mathring{S}\cap A_+$，则有 $z\in\mathring{S}\cap A_+$，使得 $z\geqslant x$，$z\geqslant y$。

证. 在 $A\dot{+}\mathbb{C}$ 中考虑问题. 令

$$a=x(1-x)^{-1},\ b=y(1-y)^{-1},$$
$$z=(a+b)\left(\frac{1}{2}+a+b\right)^{-1},$$

则 $a,b,z\in A$，且 $z\in A_+\cap\mathring{S}$。

证明 $z\geqslant x$，等价于要证明 $1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+a+b\right)^{-1}\geqslant x$ 或 $(1-x)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+a+b\right)^{-1}$。依命题 2.2.9，这等价于证 $(1-x)^{-1}\leqslant(1+2a+2b)$。但依 a 的定义，显然有 $(1+2a)\geqslant(1-x)^{-1}$。因此，$z\geqslant x$。类似证明 $z\geqslant y$。证毕。

注 本节见参考文献 [37]，[54]，[61]，[119]。

§3. 态与 GNS 构造

定义 2.3.1 设 A 是 c^*-代数，A 上的线性泛函 ρ 称为正的，记作 $\rho\geqslant 0$，指 $\rho(a)\geqslant 0$，$\forall a\in A_+$。正泛函 ρ 称为态，指 $\|\rho\|=1$。A 上态的全体记为 $\mathscr{S}(A)$，在不致混淆时，简写为 $\mathscr{S}$。

显然，如果 $\rho\geqslant 0$，则 $\rho(a^*)=\overline{\rho(a)}$，$\forall a\in A$，以及有

Schwartz 不等式

$$|\rho(b^*a)| \leqslant \rho(b^*b)^{1/2}\rho(a^*a)^{1/2}, \ \forall a, b \in A.$$

命题 2.3.2 如果 ρ 是 c^*-代数 A 上的正泛函，则 ρ 是连续的。此外，如果 A 有单位元，则 $\|\rho\| = \rho(1)$.

证. 首先，我们说 ρ 在 $S \cap A_+ = \{a \in A_+ | \|a\| \leqslant 1\}$ 上是有界的. 若否，则有 $x_n \in S \cap A_+$，使得

$$\rho(x_n) \geqslant n^2, \ \forall n.$$

依命题 2.2.9，A_+ 是闭的，所以，$x = \sum_n \frac{1}{n^2} x_n \in A_+$. 于是对任意的正整数 N，

$$N \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\rho(x_n) = \rho\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} x_n\right) \leqslant \rho(x),$$

这不可能. 因此，存在正常数 K，使得

$$\rho(a) \leqslant K, \ \forall a \in S \cap A_+.$$

再依命题 2.2.2，可见 $\|\rho\| \leqslant 4K$，即 ρ 是连续的.

如果 A 有单位元，依 Schwartz 不等式

$$\begin{aligned}|\rho(a)| &\leqslant \rho(1)^{1/2}\rho(a^*a)^{1/2} \leqslant \|a^*a\|^{1/2}\rho(1)\\ &= \|a\|\rho(1), \ \forall a \in A\end{aligned}$$

即见 $\|\rho\| = \rho(1)$. 证毕.

命题 2.3.3 设 A 是 c^*-代数，$\rho \in A^*$.

1) 如果有 $a \in A_+$，$\|a\| \leqslant 1$，使得 $\rho(a) = \|\rho\|$，则 $\rho \geqslant 0$;

2) 如果 $\|\rho\| \leqslant 1$，并且有 $0 \neq a \in A_+$，使得 $\rho(a) = \|a\|$，则 $\rho \in \mathscr{S}$.

证. 1) 必要时把 ρ 保范开拓到 $A \dotplus \mathbb{C}$ 上，因此可设 A 有单位元. 现在完全可以仿照引理 1.9.2（并注意定理 2.1.4）来证明 $\rho \geqslant 0$.

2) 依条件，显然 $\|\rho\| = 1$，及 $\rho\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \|\rho\|$. 再由 1)，$\rho \in \mathscr{S}$. 证毕.

命题 2.3.4 设 ρ 是 c^*-代数 A 上的正泛函，$a \in A_+$，并且

$\|a\| < 1$，则

$$\|\rho\| = \sup\{\rho(b) | b \in A_+, \|b\| \leqslant 1\}$$
$$= \sup\{\rho(b) | b \in A_+, \|b\| \leqslant 1, b \geqslant a\}.$$

证. 由于 $\rho(x^*) = \overline{\rho(x)}$，$\forall x \in A$，因此有 $h_n = h_n^*$，$\|h_n\| \leqslant 1$，使得 $\rho(h_n) \to \|\rho\|$。依命题 2.2.2，可写 $h_n = h_n^+ - h_n^-$，这里 $h_n^+, h_n^- \in A_+$，且 $\|h_n^+\|$ 及 $\|h_n^-\|$ 都 $\leqslant \|h_n\| \leqslant 1$。必要时代以子列，可设 $\lim\limits_n \rho(h_n^+)$ 与 $\lim\limits_n \rho(h_n^-)$ 都存在. 于是易见

$$\lim_n \rho(h_n^+) = \|\rho\|, \ \lim_n \rho(h_n^-) = 0.$$

因此，$\|\rho\| = \sup\{\rho(b) | b \in A_+, \|b\| \leqslant 1\}$.

对任意 $\varepsilon > 0$，依上面，可取 $c \in A_+$，$\|c\| < 1$，使得 $\rho(c) \geqslant \|\rho\| - \varepsilon$. 再由命题 2.2.11，有 $b \in A_+$，$\|b\| < 1$，使得 $b \geqslant c$，$b \geqslant a$. 于是，$\rho(b) \geqslant \rho(c) \geqslant \|\rho\| - \varepsilon$. 证毕.

命题 2.3.5 设 A 是 c^*-代数，ρ 是 A 上的正泛函，在 $A \dot{+} \mathbf{C}$ 上，如果命

$$\tilde{\rho}(a + \lambda) = \rho(a) + \lambda\mu_0, \ \forall a \in A, \lambda \in \mathbf{C}$$

这里数 $\mu_0 \geqslant \|\rho\|$，则 $\tilde{\rho}$ 是 $A \dot{+} \mathbf{C}$ 上的正泛函.

证. 只须对 $A \dot{+} \mathbf{C}$ 的任意正元 $(a + \lambda)$，这里 $a \in A$，$\lambda \in \mathbf{C}$，证明 $\rho(a) + \lambda\mu_0 \geqslant 0$.

显然，$a^* = a, \lambda = \bar{\lambda}$. 用 $\{1, a\}$ 生成 $A \dot{+} \mathbf{C}$ 的交换 c^*-子代数 $B \cong C(\Omega)$，于是 $\lambda + a(t) \geqslant 0$，$\forall t \in \Omega$. 注意 a 作为 $A \dot{+} \mathbf{C}$ 的元是没有逆的，因此有 $t_0 \in \Omega$，使得 $a(t_0) = 0$. 从而 $\lambda \geqslant 0$.

如果 $a \geqslant 0$ 或者 $\|\rho\| = 0$，立见 $\rho(a) + \lambda\mu_0 \geqslant 0$. 今设 $\rho \neq 0$，$a = a_+ - a_-$，这里 $a_+, a_- \in A_+$，$a_+ \cdot a_- = 0$，并且 $a_- \neq 0$，于是 $\inf\{a(t) | t \in \Omega\} = -\|a_-\|$. 从而

$$0 \leqslant \lambda + \inf\{a(t) | t \in \Omega\} = \lambda - \|a_-\|$$
$$\leqslant \lambda - \|\rho\|^{-1}\rho(a_-) \leqslant \|\rho\|^{-1}\{\lambda\mu_0 + \rho(a_+) - \rho(a_-)\},$$

即见 $\rho(a) + \lambda\mu_0 \geqslant 0$. 证毕.

系 2.3.6 如果 ρ 是 c^*-代数 A 上的态，令

$$\tilde{\rho}(a + \lambda) = \rho(a) + \lambda, \ \forall a \in A, \lambda \in \mathbf{C},$$

则 $\tilde{\rho}$ 是 $A \dotplus \mathbf{C}$ 上的态，且是 ρ 的扩张。

命题 2.3.7 设 A 是 c^*-代数，则其态空间 $\mathscr{S}$ 是 A^* 的凸子集。

证. 对任意的 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}$，及数 $\lambda \in (0, 1)$，要证明 $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 \in \mathscr{S}$。对任意的 $\varepsilon > 0$，取 $a \in A_+$，$\|a\| < 1$，使得 $\varphi_1(a) \geqslant \|\varphi_1\| - \varepsilon = 1 - \varepsilon$。今依命题 2.3.4，

$$
\begin{aligned}
1 &\geqslant \|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\| \\
&= \sup\{\lambda\varphi_1(b) + (1-\lambda)\varphi_2(b) \mid b \in A_+, \|b\| \leqslant 1, b \geqslant a\} \\
&\geqslant \lambda\varphi_1(a) + (1-\lambda)\sup\{\varphi_2(b) \mid b \in A_+, \|b\| \leqslant 1, b \geqslant a\} \\
&\geqslant \lambda(1-\varepsilon) + (1-\lambda)
\end{aligned}
$$

$\varepsilon > 0$ 是任意的，因此 $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 \in \mathscr{S}$。证毕。

定义 2.3.8 设 A 是 c^*-代数，$\mathscr{S}$ 是它的态空间，称 $\mathscr{S}$ 的端点为 A 的纯态，纯态全体记为 $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A)$。

命题 2.3.9 设 A 是有单位元的交换 c^*-代数，则 ρ 是 A 的纯态，当且仅当，ρ 是 A 的非零乘法泛函。

证. 设 ρ 是纯态，由于 A 是 A_+ 的线性包，只须对任意固定的 $a, b \in A_+$，证明 $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$。如果 $\rho(a) = 0$，由 Schwartz 不等式

$$
|\rho(ab)|^2 = |\rho(a^{1/2} \cdot a^{1/2}b)|^2 \leqslant \rho(a)\rho(bab) = 0,
$$

因此，$\rho(ab) = 0 = \rho(a)\rho(b)$。所以可以假定

$$
1 > \rho(a) > 0, \quad 1 \geqslant a \geqslant 0.
$$

令 $\rho_1(\cdot) = \rho(a)^{-1}\rho(a\cdot)$，$\rho_2(\cdot) = \rho(1-a)^{-1}\rho((1-a)\cdot)$，易见 $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{S}$，以及 $\rho = \rho(a)\rho_1 + (1-\rho(a))\rho_2$。但 ρ 是纯态，因此，$\rho = \rho_1 = \rho_2$，即有 $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$。

反之，设 ρ 是 A 上的非零乘法泛函，自然 $\rho \in \mathscr{S}$。如果有 $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{S}$ 及数 $\lambda \in (0, 1)$，使得

$$
\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2,
$$

对任意的 $h = h^* \in A$，有

$$
\begin{aligned}
\lambda\rho_1(h^2) + (1-\lambda)\rho_2(h^2) &= \rho(h^2) = \rho(h)^2 \\
&= [\lambda\rho_1(h) + (1-\lambda)\rho_2(h)]^2.
\end{aligned}
$$

由 Schwartz 不等式，$\rho_i(h)^2 \leqslant \rho_i(h^2)$，$i = 1, 2$，于是

$$
\begin{aligned}
0 = & -[\lambda\rho_1(h)+(1-\lambda)\rho_2(h)]^2 \\
& +\lambda\rho_1(h^2)+(1-\lambda)\rho_2(h^2) \\
\geqslant & -[\lambda^2\rho_1(h)^2+(1-\lambda)^2\rho_2(h)^2 \\
& +2\lambda(1-\lambda)\rho_1(h)\rho_2(h)] \\
& +\lambda\rho_1(h)^2+(1-\lambda)\rho_2(h)^2 \\
= & \lambda(1-\lambda)[\rho_1(h)-\rho_2(h)]^2.
\end{aligned}
$$

所以，$\rho_1(h)=\rho_2(h)$. 进而，$\rho=\rho_1=\rho_2$，即ρ是纯态. 证毕.

命题 2.3.10 设A是c^*-代数. 1) 如果ρ是A上的纯态，则ρ可自然地扩张为 $A\dotplus\mathbf{C}$ 上的纯态$\tilde{\rho}$，即令 $\tilde{\rho}(1)=1$; 2) 如果$\tilde{\rho}$是 $A\dotplus\mathbf{C}$ 上的纯态，$\rho=\tilde{\rho}|A$，则$\rho=0$或者为A上的纯态.

证. 1) 设有 $A\dotplus\mathbf{C}$ 上的态 $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2$ 及数 $\lambda\in(0,1)$，使得$\tilde{\rho}=\lambda\tilde{\rho}_1+(1-\lambda)\tilde{\rho}_2$. 注意

$$1=\|\rho\|\leqslant\lambda\|\tilde{\rho}_1|A\|+(1-\lambda)\|\tilde{\rho}_2|A\|\leqslant 1,$$

因此，$\tilde{\rho}_i$限于A仍为态，$i=1,2$. 但ρ是纯的，从而 $\rho=\tilde{\rho}_i|A$，$i=1,2$. 又 $\tilde{\rho}(1)=\tilde{\rho}_1(1)=\tilde{\rho}_2(1)=1$，所以，$\tilde{\rho}=\tilde{\rho}_1=\tilde{\rho}_2$，即$\tilde{\rho}$为 $A\dotplus\mathbf{C}$ 上的纯态.

2) 易见$\rho=0$的情形是可能的. 今设 $\rho\neq 0$. 如果 $\lambda=\|\rho\|<1$，依命题 2.3.5，

$$\bar{\rho}(a+\mu)=\lambda^{-1}\rho(a)+\mu,\ \forall a\in A,\ \mu\in\mathbf{C}$$

是 $A\dotplus\mathbf{C}$ 上的态，并且 $\tilde{\rho}=\lambda\bar{\rho}+(1-\lambda)\tilde{\rho}_0$，这里$\tilde{\rho}_0$是 $A\dotplus\mathbf{C}$ 上的(纯)态，使得 $\tilde{\rho}_0|A=0$. 这便与$\tilde{\rho}$是 $A\dotplus\mathbf{C}$ 上纯态并且$\rho\neq 0$相矛盾. 所以ρ是A上的态.

进而如果有A上的态ρ_1, ρ_2及数 $\lambda\in(0,1)$，使得$\rho=\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2$. 把$\rho_1, \rho_2$自然地扩张为 $A\dotplus\mathbf{C}$ 上的态，又$\tilde{\rho}$是纯的，可见 $\rho=\rho_1=\rho_2$，即ρ是A上纯态. 证毕.

命题 2.3.11 设A是有单位元的c^*-代数，E是A的包含单位元的$*$线性子空间(即若 $a\in E$，也有 $a^*\in E$)，记

$$\mathscr{F}=\left\{f\ \middle|\ \begin{array}{l} f\text{是}E\text{上的态,即}f\text{是}E\text{上的线性泛函; }f(1)=1; \\ f(a^*)=\overline{f(a)},\ \forall a\in E;\text{ 以及 }f(a)\geqslant 0,\ \forall a\in E\cap A_+ \end{array}\right\}$$

则1) $\mathscr{F}$ 的任意元可以扩张为A上的态;

2) $\mathscr{F}$ 的任意端点(显然 $\mathscr{F}$ 是凸集)可以扩张为 A 上的纯态。

证. 1) 设 $f\in\mathscr{F}$. 对任意的 $h=h^*\notin E$, 由于 E 中存在大于或小于 h 的元 (例 $-\|h\|\leqslant h\leqslant\|h\|$), 以及 A_+ 是锥 (命题 2.2.4), 我们可以这样地把 f 从 E 开拓到 $E\dotplus[h]$ 上去, 即取 $f(h)$ 满足

$$\sup\{f(b)\mid b=b^*\in E,\ b\leqslant h\}\leqslant f(h)\leqslant\inf\{f(c)\mid c=c^*\in E,\ c\geqslant h\}.$$

我们说 f 仍将为 $E\dotplus[h]$ 上的态, 即若 $(a+\lambda h)\in A_+$, 这里 $a\in E$, 要证明 $f(a+\lambda h)\geqslant 0$. 当 $\lambda=0$, 这不待言, 因此可设 $\lambda\neq 0$. 显然 $a^*=a$, $\lambda=\bar{\lambda}$. 如果 $\lambda>0$, $h\geqslant-\lambda^{-1}a$, 依 $f(h)$ 的定义, $f(h)\geqslant-\lambda^{-1}f(a)$, 即 $f(a+\lambda h)\geqslant 0$; 如果 $\lambda<0$, $h\leqslant-\lambda^{-1}a$, 又依 $f(h)$ 的定义, $f(h)\leqslant-\lambda^{-1}f(a)$, 即 $f(a+\lambda h)\geqslant 0$. 因此, f 是 $E\dotplus[h]$ 上的态. 如此手续继续下去, 由 Zorn 辅理, f 便可扩张为 A 上的态.

2) 设 f 是 $\mathscr{F}$ 的端点, 令

$$\mathscr{L}=\{\rho\in\mathscr{S}\mid\rho\text{ 限于 }E=f\},$$

依 1) $\mathscr{L}$ 是非空的, 也易见 $\mathscr{L}$ 是 A^* 的弱 * 紧凸集, 依 Krein Milmann 定理, $\mathscr{L}$ 至少有一个端点 ρ. 现在只要证明 ρ 是 A 的纯态. 设有 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{S}$, 及数 $\lambda\in(0,1)$, 使得 $\rho=\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2$. 显然 $f_i=\rho_i|E\in\mathscr{F}$, $i=1,2$. 又 $\lambda f_1+(1-\lambda)f_2=\rho|E=f$, 但 f 是 $\mathscr{F}$ 的端点, 因此, $f=f_1=f_2$. 由此, $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{L}$. 又 ρ 是 $\mathscr{L}$ 的端点, 从而 $\rho=\rho_1=\rho_2$, 即 ρ 是 A 的纯态. 证毕.

系 2.3.12 设 A 是 c^*-代数, B 是 A 的 c^*-子代数, 则 B 上的每个态或纯态都可以扩张为 A 上的态或纯态.

事实上, B 上的态或纯态可扩张为 $B\dotplus\mathrm{C}$ 上的态或纯态 (2.3.6 及 2.3.10), 继而又可扩张为 $A\dotplus\mathrm{C}$ 上的态或纯态 (2.3.11). 再依命题 2.3.10, 限制到 A 上即为所求.

注. 如果 A 有单位元, B 包含 A 的单位元, 依命题 2.3.3, B 上每个态在 A 上的保范扩张必为 A 的态.

命题 2.3.13 设 A 是 c^*-代数，$h=h^*\in A$，如果 $\lambda\in\sigma(h)$，并且 $\lambda\neq 0$，则有 A 上的纯态 ρ，使得 $\rho(h)=\lambda$.

证. 考虑 $A\dot{+}\mathbb{C}$，λ 仍然是 h 作为 $A\dot{+}\mathbb{C}$ 元的谱点. 用 $\{1, h\}$ 生成 $A\dot{+}\mathbb{C}$ 的交换 c^*-子代数 $B\cong C(\Omega)$. 于是有 $t\in\Omega$，使得 $h(t)=\lambda$. 定义 $f(b)=b(t)\ (\forall b\in B)$，则 f 是 B 上的纯态（命题 2.3.9）. 由系 2.3.12，f 可扩张为 $A\dot{+}\mathbb{C}$ 上的纯态 $\tilde{\rho}$. 再由命题 2.3.10 及 $\tilde{\rho}(h)=f(h)=\lambda\neq 0$，可见 $\rho=\tilde{\rho}|A$ 即满足要求. 证毕.

注. 如假定 A 有单位元，不必要求 $\lambda\neq 0$.

系 2.3.14 设 $h=h^*\in A$，则有 A 上的纯态 ρ，使得 $|\rho(h)|=\|h\|$，特别，$\|h\|=\sup\{|\rho(h)|\,|\,\rho\in\mathscr{P}\}$.

系 2.3.15 设 $a\in A$，使得 $\rho(a)\geqslant 0$，$\forall\rho\in\mathscr{P}$，则 $a\in A_+$.

在第一章 §8，我们讨论过 vN 代数上的正泛函产生的 GNS 构造，同样的做法，可以对 c^*-代数进行. 由于这个构造的重要性，我们再详细地叙述一下.

定义 2.3.16 设 A 是 c^*-代数，$\{\pi, \mathscr{H}\}$ 称为 A 的一个 $*$ 表示，指 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间，而 π 是 A 到 $B(\mathscr{H})$ 中的 $*$ 同态，即

$$\pi(\lambda a+\mu b)=\lambda\pi(a)+\mu\pi(b),\quad \pi(ab)=\pi(a)\pi(b),$$
$$\pi(a^*)=\pi(a)^*$$

$\forall a, b\in A$，$\lambda, \mu\in\mathbb{C}$.

如果有 $\xi\in\mathscr{H}$，使得 $\pi(A)\xi$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠，则称 ξ 为这 $*$ 表示的循环矢及称这 $*$ 表示是循环的.

$*$ 表示 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 称为忠实的，指 π 是一一的.

两个 $*$ 表示 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$，$i=1, 2$，称为酉等价的[1]，指有 $\mathscr{H}_1$ 到 $\mathscr{H}_2$ 上的酉算子 u，使得

$$u\pi_1(a)u^{-1}=\pi_2(a),\ \forall a\in A.$$

命题 2.3.17 设 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 c^*-代数 A 的 $*$ 表示，则 $\|\pi\|\leqslant 1$，并且 π 是保序的，即 $\pi(a)$ 是 $\mathscr{H}$ 中的正算子，$\forall a\in A_+$. 此

1) 今后也记以 $\{\pi_1, \mathscr{H}_1\}\cong\{\pi_2, \mathscr{H}_2\}$.

外，如果 π 还是忠实的，则 π 是等距的，并且 π 也是反保序的，即若 $\pi(a)$ 是 $\mathscr{H}$ 中的正算子，那么 $a\in A_+$.

证。考虑 $A\dotplus\mathbf{C}$，并令 $\pi(1)=1_{\mathscr{H}}$，因此，可设 A 有单位元 1，并且 $\pi(1)=1_{\mathscr{H}}$. 于是 $\sigma(\pi(a))\subset\sigma(a)$，$\forall a\in A$. 进而对任意的 $h=h^*\in A$，

$\|\pi(h)\|=\sup\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\sigma(\pi(h))\}\leqslant\sup\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\sigma(h)\}=\|h\|$.

从而，$\|\pi(a)\|^2=\|\pi(a^*a)\|\leqslant\|a^*a\|=\|a\|^2$，$\forall a\in A$，即 $\|\pi\|\leqslant 1$. 至于 π 保序是显然的。

今设 π 是忠实的。 如果 $1_{\mathscr{H}}\in\pi(A)$，即有 $e\in A$，使得 $\pi(e)=1_{\mathscr{H}}$，这时易见 e 是 A 的单位元. 如果 $1_{\mathscr{H}}\notin\pi(A)$，考虑 $A\dotplus\mathbf{C}$，并令 $\pi(1)=1_{\mathscr{H}}$. 总之可设 A 有单位元 1，并且 $\pi(1)=1_{\mathscr{H}}$. 现在仿照命题 1.8.13 的证明，即见 π 是反保序并且等距的。证毕.

今设 A 是 c^*-代数，$\rho\in\mathscr{S}$，令

$$\vartheta_\rho=\{a\in A\,|\,\rho(a^*a)=0\},$$

它称为 ρ 的左核. 由 Schwartz 不等式，易见 ϑ_ρ 是 A 的闭左理想. 设

$$a\to a_\rho=a+\vartheta_\rho,\ \forall a\in A$$

是作为线性空间的 A 到其商线性空间 A/ϑ_ρ 上的正则映象，并在 A/ϑ_ρ 上定义

$$\langle a_\rho, b_\rho\rangle=\rho(b^*a),\ \forall a,b\in A.$$

易见这是可以定义的，并且为内积，依此完备化，得到 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_\rho$. 对任意的 $a\in A$，令

$$\pi_\rho(a)b_\rho=(ab)_\rho,\ \forall b\in A$$

由于在 A 中，$b^*a^*ab\leqslant\|a\|^2b^*b$，于是

$$\|\pi_\rho(a)b_\rho\|^2=\rho(b^*a^*ab)\leqslant\|a\|^2\|b_\rho\|^2,\ \forall b\in A.$$

因此，$\pi_\rho(a)$ 可以由 A/ϑ_ρ 唯一地扩张为 $\mathscr{H}_\rho$ 中的有界线性算子，仍然记以 $\pi_\rho(a)$. 容易证明，$\{\pi_\rho,\mathscr{H}_\rho\}$ 是 A 的 * 表示.

命题 2.3.18 设 A 是 c^*-代数，$\rho\in\mathscr{S}$.

1) ρ 产生的 * 表示是循环的，即有 $\xi_\rho\in\mathscr{H}_\rho$，使得 $\pi_\rho(A)\xi_\rho$

在 $\mathscr{H}_\rho$ 中稠，并且 ξ_ρ 还可以这样地选取，使得

$$\pi_\rho(a)\xi_\rho = a_\rho, \ \rho(a) = \langle \pi_\rho(a)\xi_\rho, \xi_\rho \rangle, \ \forall a \in A;$$

2) 设 $\tilde{\rho}$ 是 ρ 在 $A \dotplus \mathbb{C}$ 上自然开拓的态，$\{\pi_{\tilde{\rho}}, \mathscr{H}_{\tilde{\rho}}\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 产生的 $A \dotplus \mathbb{C}$ 的 * 表示，则有 $\mathscr{H}_\rho$ 到 $\mathscr{H}_{\tilde{\rho}}$ 上的酉算子 u，使得 $u\pi_\rho(a)u^{-1} = \pi_{\tilde{\rho}}(a)$，$\forall a \in A$。

证。定义 $ua_\rho = a_{\tilde{\rho}}$ $(\forall a \in A)$，易见 u 可扩张为 $\mathscr{H}_\rho$ 到 $\mathscr{H}_{\tilde{\rho}}$ 中的等距算子。

依命题 2.3.4，可取 $a_n \in A_+$，$\|a_n\| \leqslant 1$，使得 $\rho(a_n) \to 1$。又依 Schwartz 不等式，$\rho(a_n) = \tilde{\rho}(a_n) \leqslant \rho(a_n^2)^{1/2} \leqslant 1$，因此，$\rho(a_n^2) \to 1$。从而 $\tilde{\rho}((1-a_n)^2) \to 0$。即在 $\mathscr{H}_{\tilde{\rho}}$ 中，$u(a_n)_\rho \to 1_{\tilde{\rho}}$，因此 u 是 $\mathscr{H}_\rho$ 到 $\mathscr{H}_{\tilde{\rho}}$ 上的酉算子。由于 $u\pi_\rho(a)b_\rho = (ab)_{\tilde{\rho}} = \pi_{\tilde{\rho}}(a)b_{\tilde{\rho}} = \pi_{\tilde{\rho}}(a)ub_\rho$，$\forall a, b \in A$，可见 $u\pi_\rho(a)u^{-1} = \pi_{\tilde{\rho}}(a)$，$\forall a \in A$。再取 $\xi_\rho = u^{-1}1_{\tilde{\rho}}$，即得证。

命题 2.3.19 设 A 是 c^*-代数，$\Delta \subset \mathscr{S}$，使得

$$\sup\{\rho(a) \mid \rho \in \Delta\} = \|a\|, \ \forall a \in A_+,$$

则

$$\left\{\pi_\Delta = \sum_{\rho \in \Delta} \oplus \pi_\rho, \ \mathscr{H}_\Delta = \sum_{\rho \in \Delta} \oplus \mathscr{H}_\rho\right\}$$

是 A 的忠实的 * 表示。

证。对任意的 $a \in A$，依命题 2.3.17 及 2.3.18

$$\begin{aligned}\|a\|^2 \geqslant \|\pi_\Delta(a)\|^2 &= \sup\{\|\pi_\rho(a^*a)\| \mid \rho \in \Delta\} \\ &\geqslant \sup\{\langle \pi_\rho(a^*a)\xi_\rho, \xi_\rho \rangle \mid \rho \in \Delta\} \\ &= \sup\{\rho(a^*a) \mid \rho \in \Delta\} = \|a\|^2,\end{aligned}$$

因此，$\|a\| = \|\pi_\Delta(a)\|$。 证毕。

注。由系 2.3.14，Δ 可以是 $\mathscr{P}$，$\mathscr{S}$，或者 $\mathscr{S}$ 的任意 $\sigma(A^*, A)$ 稠集等。

定理 2.3.20 任意的 c^*-代数必可等距 * 同构于某个 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 c^*-代数（即为 $B(\mathscr{H})$ 的一致闭 * 子代数）。

命题 2.3.21 设 A 是 c^*-代数，$\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 * 表示。

1) 如果 π 有循环矢 ξ，令 $\rho(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ $(\forall a \in A)$，则

$\{\pi, \mathscr{H}\}$ 酉等价于 ρ 产生的 * 表示 $(\pi_\rho, \mathscr{H}_\rho)$;

2）存在 $\Delta \subset \mathscr{S}$，使得 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 酉等价于 $\{\pi_\rho, \mathscr{H}_\rho\}$，$\rho \in \Delta$，与零表示的直和。

证. 1）令 $u\pi(a)\xi = a_\rho$，则 u 可扩张为 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_\rho$ 上的酉算子，并易见 $u\pi(a)u^{-1} = \pi_\rho(a)$，$\forall a \in A$。

2）由 Zorn 辅理，可写

$$\mathscr{H} = \sum_{l \in \Lambda} \oplus \mathscr{H}_l \oplus \mathscr{H}_0.$$

这里 $\mathscr{H}_l = \overline{\pi(A)\xi_l}$，$\forall l \in \Lambda$，及 $\pi(a)\xi = 0, \forall a \in A, \xi \in \mathscr{H}_0$。对每个 $l \in \Lambda$，令 $\rho_l(a) = \langle \pi(a)\xi_l, \xi_l \rangle$，$\forall a \in A$，适当调整 ξ_l 的范数，可以认为 $\rho_l \in \mathscr{S}$。由此，$\Delta = \{\rho_l | l \in \Lambda\}$ 满足要求。证毕。

下面的命题可以看作 Radon-Nikodym 定理的一种说法。

命题 2.3.22 设 φ, ψ 是 c^*-代数 A 上的正泛函，并且 $\varphi \leqslant \psi$，即 $\varphi(a) \leqslant \psi(a)$，$\forall a \in A_+$，则存在唯一的 $t' \in \pi_\psi(A)'$，$0 \leqslant t' \leqslant 1$，使得

$$\varphi(a) = \langle \pi_\psi(a) t' \xi_\psi, \xi_\psi \rangle, \ \forall a \in A.$$

这里 $\{\pi_\psi, \mathscr{H}_\psi, \xi_\psi\}$ 是 ψ 产生的循环 * 表示（如命题 2.3.18）。

证. 在 $\mathscr{H}_\psi$ 的稠子空间 $A/\mathscr{I}_\psi$ 上定义

$$[a_\psi, b_\psi] = [\pi_\psi(a)\xi_\psi, \pi_\psi(b)\xi_\psi] = \varphi(b^* a), \ \forall a, b \in A.$$

由于 $\varphi \leqslant \psi$，$|[a_\psi, b_\psi]| \leqslant \|a_\psi\| \cdot \|b_\psi\|$，$\forall a, b \in A$。因此有唯一的 $t' \in B(\mathscr{H}_\psi)$，使得

$$\varphi(b^* a) = \langle t' \pi_\psi(a)\xi_\psi, \pi_\psi(b)\xi_\psi \rangle, \ \forall a, b \in A.$$

其余证明与引理 1.10.1 相仿。证毕。

现在讨论厄米泛函的直交分解，特别可见 A^* 是 $\mathscr{S}$ 的线性包。

设 A 是 c^*-代数，$X = \{\rho \in A^* | \rho \geqslant 0 \text{ 且 } \|\rho\| \leqslant 1\}$，依弱 * 拓扑 $\sigma(A^*, A)$，显然 X 是紧 Hausdorff 空间。记 $R(X)$ 是 X 上实值连续函数的全体，当 $a \in A_h$（$= A$ 的自伴元全体）时，定义 $a(\rho) = \rho(a)$，$\forall \rho \in X$，则 $a(\cdot) \in R(X)$。依系 2.3.14，2.3.15，

$a\to a(\cdot)$ 是 A_h 到 $R(X)$ 中的等距(即 $\|a\|=\sup_{\rho\in X}|a(\rho)|$)、保序(即如 $a\in A_+$，则 $a(\rho)\geqslant 0,\forall\rho\in X$) 且反保序(即如 $a(\rho)\geqslant 0,\forall\rho\in X$，则 $a\in A_+$) 的映象.

今若 f 是 A 上的厄米连续线性泛函，即 $f\in A^*$，并且 $f=f^*$，这里 f^* 定义为：$f^*(a)=\overline{f(a^*)}$，$\forall a\in A$. 于是，$\|f\|=\|f|A_h\|$. $f|A_h$ 也可以看为 $R(X)$ 的子空间 $\{a(\cdot)|a\in A_h\}$ 上的连续泛函，保范扩张为 $R(X)$ 上的连续泛函 F. 依照 Riesz 表示定理，可写

$$F=F_+-F_-\ ,\|F\|=\|F_+\|+\|F_-\|.$$

这里 $F_\pm$ 是 $R(X)$ 上的正泛函. 当把 $F_\pm$ 限于 $\{a(\cdot)|a\in A_h\}$ 时，便得到 A_h 上的正泛函 $f_\pm$. 当然 $f_\pm$ 可自然地开拓为 A 上的正泛函，仍记为 $f_\pm$. 于是，$f=f_+-f_-$. 此外，$\|f\|=\|f|A_h\|=\|F\|=\|F_+\|+\|F_-\|$，以及 $\|F_\pm\|\geqslant\|f_\pm\|$，从而 $\|f\|=\|f_+\|+\|f_-\|$.

上面的这种分解，称为厄米泛函 f 的直交分解. 今证明这分解是唯一的.

依命题 2.3.18，对每个 $\rho\in X$，可以产生 A 的循环 $*$ 表示 $\{\pi_\rho,\mathscr{H}_\rho,\xi_\rho\}$，并且 $\rho(a)=\langle\pi_\rho(a)\xi_\rho,\xi_\rho\rangle$，$\forall a\in A$. 令

$$\pi=\sum_{\rho\in X}\oplus\pi_\rho,\quad \mathscr{H}=\sum_{\rho\in X}\oplus\mathscr{H}_\rho,$$

则 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 A 的忠实的 $*$ 表示. 命 $M=\pi(A)''$，它是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数. 无妨设 $\|f\|\leqslant 1$，于是 $f_\pm\in X$. 如果记 $\xi_\pm=\xi_{f_\pm}$，则 $f_\pm(a)=\langle\pi(a)\xi_\pm,\xi_\pm\rangle$，$\forall a\in A$. 自然地把 f, $f_\pm$ 扩张到 M 之上，即

$$f_\pm(b)=\langle b\,\xi_\pm,\xi_\pm\rangle,\ f(b)=f_+(b)-f_-(b),\ \forall b\in M$$

(这里把 A 与 $\pi(A)$ 等同起来). 依 Kaplansky 稠密性定理，$f_\pm$ 扩张到 M 上后范数是不变的. 另一方面，$\|f\|\leqslant\|f\|_M\leqslant\|f_+\|_M+\|f_-\|_M=\|f_+\|+\|f_-\|=\|f\|$，因此

$$\|f\|_M=\|f_+\|_M+\|f_-\|_M.$$

这里 $\|f\|_M$，$\|f_\pm\|_M$ 表示 f, $f_\pm$ 扩张到 M 上的范数. 今依定理 1.9.8，便得到

定理 2.3.23 设 A 是 c^*- 代数，f 是 A 上的厄米连续线性泛函，即 $f\in A^*$，并且 $f(a^*)=\overline{f(a)}$，$\forall a\in A$，则存在 A 上唯一的正泛函 f_+，f_-，使得

$$f=f_+-f_-,\ \|f\|=\|f_+\|+\|f_-\|.$$

系 2.3.24 A^* 是 $\mathscr{S}$ 的线性包。

注 本节见参考文献 [39]，[102]。

§4. 逼近单位元与商 c^*-代数

命题 2.4.1 设 $\mathfrak{I}$ 是 c^*-代数 A 的左理想，则有网 $\{d_l\}\subset\mathfrak{I}$，使得

$$d_l\in A_+,\ \|d_l\|\leqslant 1,\ d_l\leqslant d_{l'},\ \forall l\leqslant l'$$

$$\|x d_l-x\|\to 0,\ \forall x\in\mathfrak{I}.$$

证. 令 Λ 是 $\mathfrak{I}$ 的有限子集全体，依包含关系，Λ 是定向指标集。对任意的 $l=\{x_1,\cdots,x_n\}\in\Lambda$，令

$$h_l=\sum_{i=1}^n x_i^*x_i,\ d_l=nh_l(1+nh_l)^{-1}.$$

显然，$h_l, d_l\in\mathfrak{I}\cap A_+$，$\|d_l\|\leqslant 1$。

如果 $l'\geqslant l$，即可写 $l=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$l'=\{x_1,\cdots,x_m\}$，这里 $m\geqslant n$，$x_i\in\mathfrak{I}$，$1\leqslant i\leqslant m$。因此，$\left(\frac{1}{n}+h_l\right)\leqslant\left(\frac{1}{n}+h_{l'}\right)$。依命题 2.2.9，$\left(\frac{1}{n}+h_l\right)^{-1}\geqslant\left(\frac{1}{n}+h_{l'}\right)^{-1}$。又 $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+h_{l'}\right)^{-1}\geqslant\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}+h_{l'}\right)^{-1}$，所以，$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+h_l\right)^{-1}\geqslant\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}+h_{l'}\right)^{-1}$。从而

$$d_l=1-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+h_l\right)^{-1}\leqslant 1-\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}+h_{l'}\right)^{-1}=d_{l'}.$$

今设 $l=\{x_1,\cdots,x_n\}\in\Lambda$，由函数表示易见

$$\|(1-d_l)h_l(1-d_l)\|=\|h_l(1+nh_l)^{-2}\|\leqslant\frac{1}{4n}.$$

另一方面，$(1-d_l)h_l(1-d_l)=\sum_{i=1}^{n}(x_i(1-d_l))^*(x_i(1-d_l))$，因此，$\|x_i-x_id_l\|\leqslant(2\sqrt{n})^{-1}$，$1\leqslant i\leqslant n$。

对任意的 $x\in\mathfrak{B}$ 及 $\varepsilon>0$，取 $l_\varepsilon\in\Lambda$，使得 $x\in l_\varepsilon$，及 $^{\#}l_\varepsilon>(4\varepsilon^2)^{-1}$，即见 $\|x-xd_l\|<\varepsilon$，$\forall l\geqslant l_\varepsilon$。 证毕。

定义 2.4.2 设 A 是 c^*-代数，网 $\{d_l\}\subset A$ 如果满足

$$d_l\in A_+,\ \|d_l\|\leqslant 1,\ d_l\leqslant d_{l'},\ \forall l\leqslant l',$$

$$\|ad_l-a\|\to 0,\ \|d_la-a\|\to 0,\ \forall a\in A,$$

则称 $\{d_l\}$ 为 A 的一个逼近单位元。

在命题 2.4.1 中，如果令 $\mathfrak{B}=A$，即见

定理 2.4.3 任何的 c^*-代数至少有一个逼近单位元。

命题 2.4.4 设 A 是 c^*-代数，$\{d_l\}$ 是 A 的逼近单位元. 1) 对每个 $\rho\in\mathscr{S}$，有 $\lim\limits_l\rho(d_l)=\lim\limits_l\rho(d_l^2)=1$； 2) 如果 A 无单位元，则 $A\dotplus\mathbb{C}$ 上的 c^*-范（见命题 2.1.2）可以这样表达：$\|x+\lambda\|=\lim\limits_l\|xd_l+\lambda d_l\|=\lim\limits_l\|d_lx+\lambda d_l\|$，$\forall x\in A$，$\lambda\in\mathbb{C}$。

证. 1) 当 $a\in A$，$\|a\|\leqslant 1$ 时，由 Schwartz 不等式

$$1\geqslant\rho(d_l)\geqslant\rho(d_l^2)\geqslant\rho(d_l^2)\rho(a^*a)\geqslant|\rho(d_la)|^2\to|\rho(a)|^2.$$

继而取 a，$\|a\|\leqslant 1$，使得 $|\rho(a)|$ 任意接近 $\|\rho\|=1$，即有

$$\lim_l\rho(d_l)=\lim_l\rho(d_l^2)=1;$$

2) 对任意 $\varepsilon>0$，可取 $y\in A$，$\|y\|\leqslant 1$，使得

$$\|x+\lambda\|\geqslant\|xy+\lambda y\|>\|x+\lambda\|-\varepsilon.$$

由于 $d_ly\to y$，因此 l 充分大，

$$\|x+\lambda\|\geqslant\|(x+\lambda)d_l\|\geqslant\|(x+\lambda)d_ly\|\geqslant\|x+\lambda\|-\varepsilon,$$

即有 $\|x+\lambda\|=\lim\limits_l\|xd_l+\lambda d_l\|$。证毕。

定义 2.4.5 设 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 c^*-代数 A 的 $*$ 表示，$\{\pi(a)\xi|a\in A,\xi\in\mathscr{H}\}$ 张成的闭子空间（$\subset\mathscr{H}$），称为该表示的本质子空间。如果本质子空间就是 $\mathscr{H}$，则称该表示是非退化的。

显然，本质子空间的直交余是表示的零空间，即$\{\pi(a)\xi|a\in A,$

$\xi\in\mathscr{H}\}^{\perp}=\{\eta\in\mathscr{H}\mid\pi(a)\eta=0,\forall a\in A\}$. 因此，非退化表示的零空间是平凡的，这时 $\pi(A)$ 的弱算子闭包是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数。

命题 2.4.6 设 A 是 c^*-代数，$\{d_l\}$是 A 的逼近单位元，$\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 A 的 * 表示，则依强算子拓扑，$\pi(d_l)\to p$，这里 p 是 $\mathscr{H}$ 到 π 的本质子空间上的投影. 特别，当 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 非退化时，$\pi(d_l)\xrightarrow{\text{强算子}}1$。

证. 依命题 1.2.10，$\pi(d_l)\xrightarrow{\text{强算子}}p=\sup\pi(d_l)$. 设 $\mathscr{K}$ 是表示的本质子空间，当 $\eta\in\mathscr{K}^{\perp}$ 时，$\pi(d_l)\eta=0,\forall l$，因此，$p\eta=0$. 另一方面，对任意的 $a\in A$，$\xi\in\mathscr{H}$，$\|\pi(d_la)\xi-\pi(a)\xi\|\leqslant\|\xi\|\cdot\|d_la-a\|\to 0$，因此，$p\pi(a)\xi=\pi(a)\xi$. 从而，$p\mathscr{H}=\mathscr{K}$. 证毕.

注. 如果 $\{\pi,\mathscr{H},\xi\}$ 是 A 的循环表示，$\|\xi\|=1$，依命题 2.4.4 及 2.4.6，$\rho(\cdot)=\langle\pi(\cdot)\xi,\xi\rangle\in\mathscr{S}$.

命题 2.4.7 如果 ϑ 是 c^*-代数 A 的闭双侧理想，则 ϑ 对 * 运算是封闭的，即 $\vartheta^*=\vartheta$.

证. 依命题 2.4.1，有网 $\{d_l\}\subset\vartheta$，使得对任意的 $a\in\vartheta$，$ad_l\to a$. 于是

$$\|d_la^*-a^*\|=\|(ad_l-a)^*\|=\|ad_l-a\|\to 0,$$

由于 $d_la^*\in\vartheta$ 及 ϑ 是闭的，因此，$a^*\in\vartheta$，$\forall a\in\vartheta$. 证毕.

今设 A 是 c^*-代数，ϑ 是 A 的闭双侧理想，依命题 2.4.7 及商范数，易见 A/ϑ 是 Banach * 代数. 设 $\{d_l\}$ 是 ϑ 的逼近单位，$a\to\tilde{a}$ 是 A 到 A/ϑ 上的正则映象，我们说对任意的 $a\in A$，有

$$\|\tilde{a}\|=\lim_l\|ad_l-a\|.$$

事实上，对任意的 $b\in\vartheta$，由于 $bd_l\to b$，

$$\overline{\lim_l}\|ad_l-a\|=\overline{\lim_l}\|ad_l-a+bd_l-b\|$$

$$=\overline{\lim_l}\|(a+b)(1-d_l)\|\leqslant\|a+b\|,$$

因此，$\overline{\lim_l}\|ad_l-a\|\leqslant\|\tilde{a}\|$. 又由于 $ad_l\in\vartheta$,

$$\|\tilde{a}\| \geq \overline{\lim_l}\|ad_l - a\| \geq \underline{\lim_l}\|ad_l - a\| \geq \|\tilde{a}\|,$$

因此，$\|\tilde{a}\| = \lim_l \|ad_l - a\|$，$\forall a \in A$。

今对任意的 $a \in A$，$b \in \mathscr{I}$，由于 $bd_l \to b$，

$$\begin{aligned}\|\tilde{a}\|^2 &= \lim_l \|ad_l - a\|^2 = \lim_l \|(a - ad_l)^*(a - ad_l)\| \\ &= \lim_l \|(1 - d_l)a^*a(1 - d_l)\| \\ &= \lim_l \|(1 - d_l)(a^*a + b)(1 - d_l)\| \\ &\leq \|a^*a + b\|,\end{aligned}$$

因此，$\|\tilde{a}\|^2 \leq \|\widetilde{a^*a}\| \leq \|(\tilde{a})^*\| \cdot \|\tilde{a}\|$。进而可见，$\|\tilde{a}\|^2 = \|(\tilde{a})^* \cdot \tilde{a}\|$，$\forall a \in A$。从而我们有

定理 2.4.8 设 A 是 c^*-代数，$\mathscr{I}$ 是 A 的闭双侧理想（$\mathscr{I}$ 必对 $*$ 运算封闭），则 $A/\mathscr{I}$ 也是 c^*-代数（其中范数、乘法及 $*$ 运算作自然的理解）。

命题 2.4.9 设 Φ 是 c^*-代数 A 到 c^*-代数 B 中的 $*$ 同态，则 $\Phi(A)$ 是 B 的 c^*-子代数。特别，如果 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 A 的 $*$ 表示，则 $\pi(A)$ 是 $\mathscr{H}$ 中的 c^*-代数。

证. 由定理 2.3.20，只须证后一情形。$\mathscr{I} = \{a \in A | \pi(a) = 0\}$ 是 A 的闭双侧理想。如果命 $\tilde{\pi}(\tilde{a}) = \pi(a)$，$\forall \tilde{a} \in A/\mathscr{I}$，$a \in \tilde{a}$，则 $\{\tilde{\pi}, \mathscr{H}\}$ 是 c^*-代数 $A/\mathscr{I}$ 的忠实的 $*$ 表示。依命题 2.3.17，$\pi(A) = \tilde{\pi}(A/\mathscr{I})$ 是 $\mathscr{H}$ 中的 c^*-代数。证毕。

命题 2.4.10 设 A 是 c^*-代数，B 是 A 的 c^*-子代数，$\mathscr{I}$ 是 A 的闭双侧理想，则 $(B + \mathscr{I})$ 也是 A 的 c^*-子代数。

证. 设 $a \to \tilde{a}$ 是 A 到 $A/\mathscr{I}$ 上的正则映象，它也是 $*$ 同态。于是依命题 2.4.9，$\tilde{B} = \{\tilde{b} | b \in B\}$ 是 $A/\mathscr{I}$ 的 c^*-子代数。

我们只须证明 $(B + \mathscr{I})$ 是 A 的闭子集。设 $x_n \to x$，这里 $x_n \in (B + \mathscr{I})$，$\forall n$，于是 $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$。但已指出 $\tilde{B} = \widetilde{(B + \mathscr{I})}$ 是 $A/\mathscr{I}$ 的 c^*-子代数，因此，$\tilde{x} \in \tilde{B}$，即 $x \in (B + \mathscr{I})$。证毕。

命题 2.4.11 设 A 是 c^*-代数，$\mathscr{I}$ 是 A 的闭双侧理想。如果 ρ 是 A 上的态（或纯态），并且，$\rho(\mathscr{I}) = \{0\}$，命 $\tilde{\rho}(\tilde{a}) = \rho(a)$，

$\forall \tilde{a}\in A/\vartheta$, $a\in\tilde{a}$, 则 $\tilde{\rho}$ 是 A/ϑ 上的态(或纯态). 反之, 如果 $\tilde{\rho}$ 是 A/ϑ 上的态(或纯态), 则有 A 上唯一的态(或纯态) ρ, 使得 $\rho(\vartheta)=\{0\}$, $\rho(a)=\tilde{\rho}(\tilde{a})$, $\forall a\in A$.

证. 设 ρ 是 A 上的态, 且 $\rho(\vartheta)=\{0\}$, 于是可以定义 $\tilde{\rho}(\tilde{a})=\rho(a)$, $\forall \tilde{a}\in A/\vartheta$, $a\in\tilde{a}$. 易见 $\tilde{\rho}$ 是 A/ϑ 上的正泛函, 且由 $|\tilde{\rho}(\tilde{a})|=|\rho(a)|\leqslant\|a\|$, $\forall a\in\tilde{a}$, $\|\tilde{\rho}\|\leqslant 1$. 另一方面, 当 $a\in A$, $\|a\|\leqslant 1$ 时, $|\rho(a)|=|\tilde{\rho}(\tilde{a})|\leqslant\|\tilde{\rho}\|$, 令 $|\rho(a)|$ 任意逼近 $\|\rho\|=1$, 即见 $\|\tilde{\rho}\|=1$, 从而 $\tilde{\rho}$ 是 A/ϑ 上的态.

反之, 设 $\tilde{\rho}$ 是 A/ϑ 上的态, 定义 $\rho(a)=\tilde{\rho}(\tilde{a})$, $\forall a\in A$, 易见 ρ 是 A 上的正泛函, 且 $\rho(\vartheta)=\{0\}$. 依前段所证, $\tilde{\rho}\|\rho\|^{-1}$ 是 A/ϑ 上的态. 但 $\|\tilde{\rho}\|=1$, 因此, $\|\rho\|=1$, 即 ρ 是 A 上的态. 至于 ρ 的唯一性是显然的.

今设 ρ 是 A 上的纯态, 并且 $\rho(\vartheta)=\{0\}$. 依前面, $\tilde{\rho}$ 是 A/ϑ 上的态. 如果有 A/ϑ 上的态 $\tilde{\rho}_1$, $\tilde{\rho}_2$ 及数 $\lambda\in(0,1)$, 使得 $\tilde{\rho}=\lambda\tilde{\rho}_1+(1-\lambda)\tilde{\rho}_2$. 前面已证, 对 $\tilde{\rho}_i$, 有 A 上唯一的态 ρ_i, 使得

$$\rho_i(\vartheta)=\{0\},\ \rho_i(a)=\tilde{\rho}_i(\tilde{a}),\ \forall a\in A,$$

$i=1,2$. 易见 $\rho=\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2$, 但 ρ 是纯态, 因此, $\rho=\rho_1=\rho_2$. 进而 $\tilde{\rho}=\tilde{\rho}_1=\tilde{\rho}_2$, 即 $\tilde{\rho}$ 是 A/ϑ 上的纯态.

最后设 $\tilde{\rho}$ 是 A/ϑ 上的纯态, 于是有 A 上唯一的态 ρ, 使得 $\rho(\vartheta)=\{0\}$, $\rho(a)=\tilde{\rho}(\tilde{a})$, $\forall a\in A$. 如果有 A 上的态 ρ_1, ρ_2 及数 $\lambda\in(0,1)$, 使得 $\rho=\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2$. 对任意的 $a\in\vartheta\cap A_+$, 由 $\rho(a)=0$, 可见 $\rho_1(a)=\rho_2(a)=0$. 进而 $\rho_1(\vartheta)=\rho_2(\vartheta)=\{0\}$. 由此, $\tilde{\rho}=\lambda\tilde{\rho}_1+(1-\lambda)\tilde{\rho}_2$. 但 $\tilde{\rho}$ 是纯态, 因此, $\tilde{\rho}=\tilde{\rho}_1=\tilde{\rho}_2$. 进而 $\rho=\rho_1=\rho_2$, 即 ρ 是 A 上的纯态. 证毕.

注 本节见参考文献 [18], [39], [54], [102], [103].

§5. 单位球的端点与单位元的存在性

定理 2.5.1 设 A 是 c^*-代数, $S=\{a\in A\,|\,\|a\|\leqslant 1\}$ 是它的单位球, $x\in S$, 则 x 是 S 的端点(注意 S 自然是 A 的凸子集), 必

须且只须，

$$(1-x^*x)A(1-xx^*)=\{0\}.$$

这时，x 并且是 A 的部分等距元，即 x^*x 与 xx^* 均为投影。

证．设 x 是 S 的端点． 首先证明 x^*x 是投影． 若不然，用 x^*x 生成 A 的交换 c^*-子代数 $B=C_0^\infty(\Omega)$，则有 $t_0\in\Omega$，使得 $x^*x(t_0)\in(0,1)$．依连续性，有 t_0 的开邻域 $U(\subset\Omega)$ 及 $\varepsilon\in(0,1)$，使得

$$0<x^*x(t)<1-\varepsilon,\ \forall t\in U$$

取 $d(t)\in C_0^\infty(\Omega)$，使得

$$0\leqslant d(t)\leqslant 1,\ \forall t\in\Omega,\ d(t_0)=1,\ d(\Omega\backslash U)=\{0\},$$

又设 $0<\eta<1$，使得 $2\eta+\eta^2\leqslant\varepsilon$，于是

$$0\leqslant(1\pm\eta d(t))^2x^*x(t)=\begin{cases}x^*x(t)(\leqslant 1),\ \forall t\notin U,\\ \leqslant(1+\eta)^2(1-\varepsilon)(<1),\ \forall t\in U,\end{cases}$$

所以，如果取 $c\in B$，使得 $c(t)=\eta d(t)$，$\forall t\in\Omega$，则由于 x^*x 与 c 是交换的，$\|x\pm xc\|=\|(x(1\pm c))^*(x(1\pm c))\|^{1/2}=\|(1\pm c)^2\cdot x^*x\|^{1/2}\leqslant 1$． 令 $x=\frac{1}{2}(x+xc)+\frac{1}{2}(x-xc)$，而 x 是 S 的端点，因此，$xc=0$，$x^*xc=0$． 这便与 $x^*x(t_0)\cdot c(t_0)=\eta x^*x(t_0)>0$ 相矛盾．所以，x^*x 是投影，同证 xx^* 是投影．

记 $x^*x=p$，$xx^*=q$． 如果 $y\in(1-q)A(1-p)$，$\|y\|\leqslant 1$，则 $qy=0$． 于是 $0=y^*qy=(x^*y)^*\cdot(x^*y)$，所以，$x^*y=0$． 从而由定理 2.3.20，

$$\begin{aligned}\|x\pm y\|^2&=\|(x\pm y)^*(x\pm y)\|=\|x^*x+y^*y\|\\&=\|px^*xp+(1-p)y^*y(1-p)\|\\&=\max\{\|x^*x\|,\|y^*y\|\}\leqslant 1,\end{aligned}$$

但 $x=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)$，及 x 是 S 的端点，所以，$y=0$，即 $(1-xx^*)A(1-x^*x)=\{0\}$．

反之，设 x 满足 $(1-x^*x)A(1-xx^*)=\{0\}$． 于是

$$0=x^*(1-xx^*)x(1-x^*x)=x^*x(1-x^*x)^2,$$

因此，$\sigma(x^*x)\subset\{0, 1\}$，即 x^*x 是投影．同证 xx^* 是投影．记 $p=x^*x$，$q=xx^*$．由于 $(xp-x)^*(xp-x)=px^*xp-px^*x-x^*xp+x^*x=0$，因此

$$xp=x,\ px^*=x^*. \tag{1}$$

如果有 $a, b\in S$，数 $\lambda\in(0, 1)$，使得 $x=\lambda a+(1-\lambda)b$，于是，$p=x^*xp=\lambda x^*ap+(1-\lambda)x^*bp$．由(1)，$p\cdot x^*ap=x^*ap\cdot p$，因此，$\{p, x^*ap, x^*bp\}$ 可生成有单位元 p 的交换 c^*-子代数．再由函数表示可见

$$p=x^*ap=x^*bp, \tag{2}$$

左乘 x 于(2)，并依(1)，有

$$x=qap=qbp, \tag{3}$$

由(2)，(3)，$pa^*qap=pa^*x=(x^*ap)^*=p$，所以

$$\begin{aligned}1\geqslant\|pa^*ap\|&=\|pa^*qap+pa^*(1-q)ap\|\\&=\|p+p_a^*(1-q)ap\|,\end{aligned}$$

但 $pa^*(1-q)ap$ 是有单位元 p 的 c^*-代数 pAp 的正元，因此，$pa^*(1-q)ap=0$，即 $(1-q)ap=0$，$ap=qap$．依(3)，

$$x=ap. \tag{4}$$

由 $x=\lambda a+(1-\lambda)b$，有 $y=\lambda c+(1-\lambda)d$，这里 $y=x^*$，$c=a^*$，$d=b^*$．由于 $y^*y=q$，$yy^*=p$，用 $\{y, c, d, q, p\}$ 代替 $\{x, a, b, p, q\}$，重复(1)—(4)的过程，可见 $y=cq$，即

$$x=qa. \tag{5}$$

由 $(1-q)a(1-p)\in(1-q)A(1-p)=\{0\}$，因此依(3)，(4)，(5)

$$a=ap+qa-qap=x.$$

进而，$x=a=b$，即 x 为 S 的端点．证毕．

系 2.5.2 如果 c^*-代数 A 有单位元，则其单位元必为其单位球 S 的端点．

定理 2.5.3 设 A 是 c^*-代数，S 是其单位球，则 A 有单位元，必须且只须，S 至少有一个端点．

证．必要性由系 2.5.2 立见．反之设 S 有端点 x．令 $x^*x=$

p, $xx^* = q$ 及 $\{d_l\}$ 是 A 的逼近单位元。依定理 2.5.1，$(1-q)\cdot d_l(1-p)=0$，$\forall l$。因此，

$$d_l \to p+q-qp,$$

易见 $e = p+q-qp$ 将是 A 的单位元。证毕。

命题 2.5.4 设 A 是 c^*-代数，$\mathscr{S}$ 是它的态空间，则 A 有单位元，当且仅当，$\mathscr{S}$ 依照弱 * 拓扑 $\sigma(A^*, A)$ 是紧的。

证. 必要性不待言. 反之设 A 无单位元，我们来证明 $\mathscr{S}$ 不是 $\sigma(A^*, A)$ 紧的，只须证明 $0 \in \bar{\mathscr{S}}^\sigma$ ($\mathscr{S}$ 的 $\sigma(A^*, A)$ 闭包). 于是要对 0 的任意 $\sigma(A^*, A)$ 邻域 $U = U(0, a_1, \cdots, a_n, \varepsilon)$，证明 $U \cap \mathscr{S} \neq \varnothing$. 由于 A 是 A_+ 的线性包，无妨设 $a_i \in A_+$，$1 \leqslant i \leqslant n$. 令 $a = a_1 + \cdots + a_n$，只要证明 $U(0, a, \varepsilon) \cap \mathscr{S} \neq \varnothing$. 依定理 2.3.20，可设 $A \subset B(\mathscr{H})$ (某 Hilbert 空间)，并且 A 在 $\mathscr{H}$ 中是非退化的. 既然 A 无单位元，$a \in A$，从而 a 在 $A \dotplus \mathbb{C}$ (这里 $1 = 1_{\mathscr{H}}$) 中是无逆的. 由此，存在 $\xi \in \mathscr{H}$，$\|\xi\| = 1$，使得 $\langle a\xi, \xi\rangle < \varepsilon$. 令 $\rho(\cdot) = \langle \cdot\xi, \xi\rangle$，依命题 2.4.6，$\rho \in \mathscr{S}$. 因此，$\rho \in U(0, a, \varepsilon) \cap \mathscr{S}$. 证毕.

命题 2.5.5 如果 A 是无单位元的 c^*-代数，$\mathscr{S}$ 是它的态空间，则

$$\bar{\mathscr{S}}^\sigma = \overline{Co\{0, \mathscr{P}\}}^\sigma = \{\rho \in A^* | \rho \geqslant 0, \text{ 且 } \|\rho\| \leqslant 1\}.$$

这里 $\bar{\mathscr{S}}^\sigma$ 是 $\mathscr{S}$ 在 A^* 中的 $\sigma(A^*, A)$ 闭包，$\overline{Co\{\cdots\}}^\sigma$ 是 $\{\cdots\}$ 在 A^* 中的 $\sigma(A^*, A)$ 凸闭包.

证. 设 $\tilde{\mathscr{S}}$，及 $\tilde{\mathscr{P}}$ 分别是 $A \dotplus \mathbb{C}$ 上态及纯态的全体. 依命题 2.3.5，$\tilde{\mathscr{S}}|A = \{\rho \in A^* | \rho \geqslant 0, \text{ 且 } \|\rho\| \leqslant 1\}$. 依命题 2.3.10，$\tilde{\mathscr{P}}|A = \{0, \mathscr{P}\}$. 因此，由 Krein-Milmann 定理，$\overline{Co\{0, \mathscr{P}\}}^\sigma = \{\rho \in A^* | \rho \geqslant 0, \text{ 且 } \|\rho\| \leqslant 1\}$. 在命题 2.5.4 中，已证 $0 \in \bar{\mathscr{S}}^\sigma$，因此，$\overline{Co\{0, \mathscr{P}\}}^\sigma \subset \bar{\mathscr{S}}^\sigma$. 又显然，$\bar{\mathscr{S}}^\sigma \subset \{\rho \in A^* | \rho \geqslant 0, \text{ 且 } \|\rho\| \leqslant 1\}$. 从而得证.

注 本节见参考文献 [51]，[103].

§6. 迁移定理与不可约$*$表示

定义 2.6.1 设A是c^*-代数，$\{\pi, \mathscr{H}\}$是A的$*$表示。$\{\pi, \mathscr{H}\}$称为代数不可约的，指如果$\mathscr{K}$是$\mathscr{H}$的线性子空间，使得$\pi(a)\xi\in\mathscr{K}$，$\forall a\in A$，$\xi\in\mathscr{K}$，则$\mathscr{K}=\{0\}$或$\mathscr{H}$。$\{\pi, \mathscr{H}\}$称为拓扑不可约的，指要求前面的$\mathscr{K}$是闭的。

显然，代数不可约必然是拓扑不可约的。但本节中，将指出两者是等价的。

命题 2.6.2 c^*-代数A的$*$表示$\{\pi, \mathscr{H}\}$是拓扑不可约的，当且仅当，$\pi(A)$在$B(\mathscr{H})$中是弱算子稠的。

证. 设$\{\pi, \mathscr{H}\}$是拓扑不可约的，则$\pi(A)'$不包含异于0，1的投影，所以，$\pi(A)'=\mathbf{C}$，$\pi(A)''=B(\mathscr{H})$。当然π是非退化的，因此，$\pi(A)$在$B(\mathscr{H})$中弱算子稠（定理 1.3.10）。反之，如果$\pi(A)$在$B(\mathscr{H})$中弱算子稠，自然$\pi(A)'=\mathbf{C}$，因此，$\{\pi, \mathscr{H}\}$是拓扑不可约的。 证毕。

引理 2.6.3 设$\mathscr{H}$是 Hilbert 空间，$\xi_i, \eta_i\in\mathscr{H}$，$1\leqslant i\leqslant n$，并且$\langle\xi_i, \xi_j\rangle=\delta_{ij}$，$\forall i, j$，则存在$b\in B(\mathscr{H})$，使得

$$b\xi_i=\eta_i,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ \|b\|^2\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\|\eta_i\|^2.$$

此外，如果已有$h=h^*\in B(\mathscr{H})$，使得$h\xi_i=\eta_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，则上面的b也可满足$b^*=b$。

证. 令$\mathscr{K}$是由$\{\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n\}$张成的线性子空间，且$\{\xi_1, \cdots, \xi_m\}$是$\mathscr{K}$的直交规范基，这里$m\geqslant n$。于是可写

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\xi_j,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

今取$b\in B(\mathscr{H})$，使得$b\mathscr{K}^\perp=\{0\}$，$b\mathscr{K}\subset\mathscr{K}$，且在$\mathscr{K}$的基$\{\xi_j\}_{1\leqslant j\leqslant m}$中，$b$有阵表示为

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \cdots, & \alpha_{1n} & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \triangle \\ \alpha_{n1}, & \cdots, & \alpha_{nn} & \vdots & \\ \hline \alpha_{n+1,1}, & \cdots & \alpha_{n+1,n} & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & 0 \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & \vdots & \end{pmatrix}$$

对于引理前一部分，取 $\triangle=(0)$，即见 b 满足要求；对于后一部分，令

$$(\triangle)=\begin{pmatrix} \overline{\alpha_{n+1,1}}, & \cdots, & \overline{\alpha_{m1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{\alpha_{n+1,n}} & \cdots & \overline{\alpha_{mn}} \end{pmatrix}$$

由于 $\alpha_{ji}=\langle\eta_i,\xi_j\rangle=\langle h\xi_i,\xi_j\rangle=\langle\xi_i,h\xi_j\rangle=\langle\xi_i,\eta_j\rangle=\overline{\alpha_{ij}}$，$\forall 1\leqslant i,j\leqslant n$，因此，$b^*=b$. 同时

$$\|b\|^2=\|b^*b\|=\max\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\sigma(b^*b)\}\leqslant\operatorname{tr}(b^*b)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\|b\,\xi_i\|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\|\eta_i\|^2+\sum_{i=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|^2\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\|\eta_i\|^2.$$

证毕.

引理 2.6.4 设 $\mathscr{H}_1,\cdots,\mathscr{H}_n$ 是 Hilbert 空间，$\mathscr{H}=\sum_{j=1}^{n}\oplus\mathscr{H}_j$，$M=\sum_{j=1}^{n}\oplus B(\mathscr{H}_j)$（它是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数）. 又设 A 是 $\mathscr{H}$ 中的 c^*-代数，$A\subset M$，并且 A 在 M 中是弱算子稠的. 设 $t_j\in B(\mathscr{H}_j)$，e_j 是 $\mathscr{H}_j$ 中的有限秩投影，p_j 是 $\mathscr{H}_j$ 到 $[e_j\mathscr{H}_j, t_je_j\mathscr{H}]$ 上的投影，$1\leqslant j\leqslant n$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $b\in A$，使得

$$be_j=t_je_j,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ \|b\|\leqslant\varepsilon+\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|p_jt_jp_j\|.$$

此外，如果 $t_j^*=t_j$，$1\leqslant j\leqslant n$，则上面的 b 还可满足 $b^*=b$，

$\|b\| \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|p_i t_i p_i\|$.

证. 令 $t=\sum\limits_{j=1}^{n}\oplus t_j$, $p=\sum\limits_{j=1}^{n}\oplus p_j$, 则 $t, p\in M$. 取 $p\mathscr{H}=\sum\limits_{j=1}^{n}\oplus p_j\mathscr{H}_j$ 的直交规范基 $\{\xi_1,\cdots,\xi_m\}$, 使得 ξ_i 属于某个 $p_j\mathscr{H}_j$, $\forall i$.

对 $\varepsilon_1>0$, 依定理 1.6.1, 有 $b_0\in A$, 使得

$$\|b_0\xi_i-ptp\xi_i\|<\varepsilon_1,\ 1\leqslant i\leqslant m,\ \|b_0\|\leqslant\|ptp\|.$$

由于M的定义, $b_0\xi_i$, $ptp\xi_i$ 及 ξ_i 将同属于某个 $\mathscr{H}_j$, $\forall i$, 于是依引理 2.6.3, 有 $a_1\in M$, 使得

$$a_1\xi_i=ptp\xi_i-b_0\xi_i,\ 1\leqslant i\leqslant m,$$

$$\|a_1\|^2\leqslant 2\sum_{i=1}^{m}\|ptp\xi_i-b_0\xi_i\|^2<2m\varepsilon_1^2.$$

同样对 $\varepsilon_2>0$, 有 $b_1\in A$, 使得

$$\|b_1\xi_i-a_1\xi_i\|<\varepsilon_2,\ 1\leqslant i\leqslant m,\ \|b_1\|\leqslant\|a_1\|<\sqrt{2m}\varepsilon_1$$

$\cdots$, 一般有 $\{a_0=ptp, a_1,\cdots\}\subset M$, $\{b_0,b_1,\cdots\}\subset A$, 使得

$$\|a_k\xi_i-b_k\xi_i\|<\varepsilon_{k+1},\ 1\leqslant i\leqslant m,\ k=0,1,\cdots,$$

$$a_{k+1}\xi_i=a_k\xi_i-b_k\xi_i,\ 1\leqslant i\leqslant m,\ k=0,1,\cdots,$$

$$\|b_k\|\leqslant\|a_k\|<\sqrt{2m}\varepsilon_k,\ k=1,2,\cdots,\ \|b_0\|\leqslant\|a_0\|.$$

此外, 如果 $t_j^*=t_j$, $1\leqslant j\leqslant n$, 依引理 2.6.3 及命题 1.6.4, 可取 $a_k=a_k^*$, $b_k=b_k^*$, $k=0,1,\cdots$.

如果设 $\varepsilon_k=(2m)^{-\frac{1}{2}}2^{-k}\varepsilon$, 则 $\|a_k\|<2^{-k}\varepsilon$, $k=1,2,\cdots$, 并命 $b=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k$, 则 $b\in A$, 及

$$\|b\|<\varepsilon+\|ptp\|=\varepsilon+\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|p_jt_jp_j\|,$$

并且, $b\xi_i=\lim\limits_N\sum\limits_{k=0}^{N}b_k\xi_i=\lim\limits_N(a_0\xi_i-a_{N+1}\xi_i)=ptp\xi_i$, $1\leqslant i\leqslant m$. 特别, $be_j=ptpe_j=t_je_j$, $1\leqslant j\leqslant n$.

最后, 如果 $t_j^*=t_j$, $1\leqslant j\leqslant n$, 可取 $p\mathscr{H}$ 的直交规范基

$\{\eta_1, \cdots, \eta_m\}$ 及实数 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$，使得

$$ptp\eta_i = \lambda_i\eta_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

对于前面得到的 $b^* = b$，也将有 $b\eta_i = \lambda_i\eta_i$，$1 \leqslant i \leqslant m$。作实值连续函数 f 如下

$$f(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{如果 } |\lambda| \leqslant \|ptp\|, \\ -\|ptp\| & \text{如果 } \lambda \leqslant -\|ptp\|, \\ \|ptp\| & \text{如果 } \lambda \geqslant \|ptp\|, \end{cases}$$

由于 $|\lambda_i| \leqslant \|ptp\|$，因此，$f(b)\eta_i = \lambda_i\eta_i$，$1 \leqslant i \leqslant m$。从而 $f(b)^* = f(b) \in A$，$\|f(b)\| \leqslant \|ptp\| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \|p_jt_jp_j\|$，以及 $f(b)e_j = ptpe_j = t_je_j$，$1 \leqslant j \leqslant n$。证毕。

定理 2.6.5 设 A 是 c^*-代数，$\{\pi_j, \mathscr{H}_j\}$，$1 \leqslant j \leqslant n$，是 A 的 n 个相互并非酉等价的拓扑不可约 $*$ 表示。又设 $t_j \in B(\mathscr{H}_j)$，e_j 是 $\mathscr{H}_j$ 中的有限秩投影，$1 \leqslant j \leqslant n$。

1）对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $a \in A$，使得

$$\pi_j(a)e_j = t_je_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \|a\| \leqslant \varepsilon + \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|p_jt_jp_j\|.$$

这里 p_j 是 $\mathscr{H}_j$ 到 $[e_j\mathscr{H}_j, t_je_j\mathscr{H}_j]$ 上的投影，$1 \leqslant j \leqslant n$；此外，如果 $t_j^* = t_j$，$1 \leqslant j \leqslant n$，则 a 也可是自伴的；

2）如果 t_j 是 $\mathscr{H}_j$ 中的酉表示，$1 \leqslant j \leqslant n$，则可取 $A \dotplus \mathbb{C}$ 的酉元 $u = e^{ih}$，这里 $h^* = h \in A$，使得

$$\pi_j(u)e_j = t_je_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

这里表示 π_j 由 A 扩张到 $A \dotplus \mathbb{C}$ 作自然的理解。此外，如果 A 本身有单位元，可取 $u \in A$。

证. 命 $\mathscr{H} = \sum\limits_{j=1}^{n} \oplus \mathscr{H}_j$，$\pi = \sum\limits_{j=1}^{n} \oplus \pi_j$。依命题 2.4.9，$\pi(A)$ 是 $\mathscr{H}$ 中的 c^*-代数，并且 $\pi(A) \subset M = \sum\limits_{j=1}^{n} \oplus B(\mathscr{H}_j)$。

设 p_j' 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_j$ 上的投影，显然 $p_j' \in \pi(A)'$，$1 \leqslant j \leqslant n$。令 z_j 是 p_j' 在 $\pi(A)'$ 中的中心覆盖，我们说 $\{z_1, \cdots, z_n\}$ 是两两直交的。事实上，设 z_l 与 z_k 并非直交，依命题 1.5.9，有 $\pi(A)$

的非零投影 p_j''，p_k''，使得 $p_j''\leqslant p_j'$，$p_k''\leqslant p_k'$，$p_j''\sim p_k''$. 但表示 π_j，π_k 都是拓扑不可约的，因此，$p_j''=p_j'$，$p_k''=p_k'$. 于是 p_j' 与 p_k' 在 $\pi(A)'$ 中相互等价，这又将与 π_j，π_k 相互并非酉等价相矛盾. 因此，$\{z_1,\cdots,z_n\}$ 两两直交. 又 $\sum_{j=1}^{n}p_j'=1$，$z_j\geqslant p_j'$，$\forall j$，所以，$z_j=p_j'$，$1\leqslant j\leqslant n$. 从而

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\oplus\pi_j(a_j)\,\middle|\,a_j\in A,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}\subset\pi(A)''\subset M.$$

依命题 2.6.2，$\pi_j(A)$ 在 $B(\mathscr{H}_j)$ 中是弱算子稠的，$1\leqslant j\leqslant n$，因此，$\pi(A)$ 在 M 中弱算子稠. 今依引理 2.6.4，1) 即得证.

今设 t_j 是 $\mathscr{H}_j$ 中的酉算子，$1\leqslant j\leqslant n$. 于是，$\dim e_j\mathscr{H}_j=\dim t_je_j\mathscr{H}_j$，因此可构作 $p_j\mathscr{H}_j$ 中的酉算子 u_j，使得 $u_je_j=t_je_j$，$1\leqslant j\leqslant n$. 取 $p_j\mathscr{H}_j$ 的直交规范基 $\{\xi_k^{(j)}\}$，使得 $u_j\xi_k^{(j)}=\exp(i\lambda_k^{(j)})\xi_k^{(j)}$，这里 $\lambda_k^{(j)}$ 是实数，$\forall j,k$. 再作 $\mathscr{H}_j$ 中的有界自伴算子 h_j，使得 $h_j\xi_k^{(j)}=\lambda_k^{(j)}\xi_k^{(j)}$，$h_j(1-p_j)=0$，$\forall j,k$. 依 1)，有 A 的自伴元 h，使得 $\pi_j(h)p_j=h_jp_j$，从而由 $h_jp_j=p_jh_j$，

$$\pi_j(e^{ih})e_j=\pi_j(e^{ih})p_je_j=e^{ih_j}p_je_j=u_je_j=t_je_j,$$

$1\leqslant j\leqslant n$. 证毕.

定理 2.6.6 C^*-代数的拓扑不可约 * 表示也必是代数不可约的.

证. 设 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 C^*-代数 A 的拓扑不可约 * 表示，$\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的真非零线性子空间，使得 $\pi(a)\mathscr{K}\subset\mathscr{K}$，$\forall a\in A$. 于是有 $0\neq\xi\in\mathscr{K}$，$\eta\in\mathscr{H}\backslash\mathscr{K}$. 依定理 2.6.5，必有 $a\in A$，使得 $\pi(a)\xi=\eta$，这与 $\pi(a)\xi\in\mathscr{K}$ 相矛盾. 证毕.

注. 以后称 C^*-代数的不可约 * 表示，即是指上面相互等价的意义.

注 本节见参考文献 [53].

§7. 纯态与正则极大左理想

定理 2.7.1 设 A 是 C^*-代数，ρ 是 A 上的态，则 ρ 是纯态，必须且只须，ρ 所产生的 $*$ 表示 $\{\pi_\rho, \mathscr{H}_\rho\}$ 是不可约的. 这时并且有 $\mathscr{H}_\rho = A/\vartheta_\rho$，这里 $\vartheta_\rho = \{a \in A | \rho(a^*a) = 0\}$ 是 ρ 的左核.

证. 设 $\xi_\rho \in \mathscr{H}_\rho$ 如命题 2.3.18 所述.

如果 π_ρ 是不可约的，又设 $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{S}$ 及数 $\lambda \in (0, 1)$，使得 $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$. 在 A/ϑ_ρ 上定义

$$[a_\rho, b_\rho] = \rho_1(b^*a), \ \forall a, b \in A.$$

这里 $a \to a_\rho$ 是 A 到 A/ϑ_ρ 上的正则映象. 由于

$$|[a_\rho, b_\rho]|^2 \leqslant \rho_1(b^*b)\rho_1(a^*a) \leqslant \lambda^{-2}\|a_\rho\|^2\|b_\rho\|^2,$$

因此有 $h = h^* \in B(\mathscr{H}_\rho)$，使得

$$\rho_1(b^*a) = \langle ha_\rho, b_\rho\rangle, \ \forall a, b \in A.$$

易证 $h \in \pi_\rho(A)'$. 但 π_ρ 是不可约的，因此有 $\mu \in \mathbf{R}$，使得 $h = \mu$，即 $\rho_1(b^*a) = \mu\rho(b^*a)$，$\forall a, b \in A$. 由于 $\rho_1, \rho \in \mathscr{S}$，依命题 2.4.4，可见 $\mu = 1$，即有 $\rho = \rho_1 = \rho_2$，所以，ρ 是纯态.

反之设 ρ 是纯态. 如果 $\pi_\rho(A)'$ 包含异于 0，1 的投影 p'. 我们说 $p'\xi_\rho \neq 0$. 事实上，若否，则

$$\{\pi_\rho(a)\xi_\rho | a \in A\} = \{\pi_\rho(a)(1-p')\xi_\rho | a \in A\} \subset (1-p')\mathscr{H}_\rho.$$

这与 ξ_ρ 为循环矢相矛盾. 因此，$p'\xi_\rho \neq 0$. 同样 $(1-p')\xi_\rho \neq 0$. 于是 $\lambda = \|p'\xi_\rho\|^2 \in (0, 1)$. 令

$$\rho_1(a) = \lambda^{-1}\langle\pi_\rho(a)p'\xi_\rho, p'\xi_\rho\rangle,$$
$$\rho_2(a) = (1-\lambda)^{-1}\langle\pi_\rho(a)(1-p')\xi_\rho, (1-p')\xi_\rho\rangle,$$

$\forall a \in A$，由命题 2.4.6，可见 $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{S}$. 显然，$\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$，但 ρ 是纯态，因此，$\rho = \rho_1 = \rho_2$. 于是

$$\|\lambda^{-\frac{1}{2}}p'\pi_\rho(a)\xi_\rho\|^2 = \rho_1(a^*a) = \rho(a^*a) = \|\pi_\rho(a)\xi_\rho\|^2, \forall a \in A,$$

即 $\lambda^{-\frac{1}{2}}p'$ 是 $\mathscr{H}_\rho$ 中的等距算子. 这与 p' 是异于 0，1 的投影相矛盾. 所以，$\pi_\rho(A)' = \mathbf{C}$，即 π_ρ 是不可约的.

最后，A/ϑ_ρ 是 $\mathscr{H}_\rho$ 的稠线性子空间，且对 $\pi_\rho(A)$ 不变.

因此，如果 π_ρ 是不可约的，依定理 2.6.6，$\mathscr{H}_\rho = A/\vartheta_\rho$. 证毕.

定义 2.7.2 c^*-代数 A 的左理想 ϑ 称为正则的，指有 A 的元 x_0，使得 $(bx_0 - b) \in \vartheta$，$\forall b \in A$.

自然，当 A 有单位元时，任何左理想都是正则的. 如果 A 无单位元，ρ 是 A 上的态，$\tilde{\rho}$ 是 ρ 在 $A \dotplus \mathbb{C}$ 上的自然开拓，ϑ，$\tilde{\vartheta}$ 分别是 ρ，$\tilde{\rho}$ 的左核. 当然 $\vartheta \subset \tilde{\vartheta}$，也易见 $\tilde{\vartheta}$ 至多比 ϑ 多一维. 如果 $\tilde{\vartheta} \neq \vartheta$，则 ϑ 就是 A 的正则左理想；如果 $\tilde{\vartheta} = \vartheta$，则 ϑ 是非正则的. 这两种情况都可能发生.

定理 2.7.3 设 ρ 是 c^*-代数 A 的纯态，则其左核是 A 的正则极大左理想[1]，并且

$$\mathfrak{N}(\rho) = \{a \in A \mid \rho(a) = 0\} = \vartheta_\rho + \vartheta_\rho^*.$$

证. 设 ϑ 是 A 的包含 ϑ_ρ 的左理想，$\{\pi_\rho, \mathscr{H}_\rho\}$ 是 ρ 产生的不可约 * 表示. 由于 ϑ/ϑ_ρ 是 $\pi_\rho(A)$ 的不变子空间，因此 $\vartheta = \vartheta_\rho$，即 ϑ_ρ 是极大左理想.

设 ξ_ρ 如命题 2.3.18 所述. 若 $b = b^* \in \mathfrak{N}(\rho)$，则 $\langle b_\rho, \xi_\rho\rangle = \rho(b) = 0$. 于是可作 $\mathscr{H}_\rho$ 中的有界自伴算子，它把 ξ_ρ 变成 0，并保持 b_ρ 不变. 依定理 2.6.5，有 $h = h^* \in A$，使得

$$\pi_\rho(h)\xi_\rho = 0,\ \pi_\rho(h)b_\rho = b_\rho,$$

因此，$0 = \|\pi_\rho(h)b_\rho - b_\rho\|^2 = \rho((b - hb)^*(b - hb))$，即

$$c = b - hb \in \vartheta_\rho$$

于是，$b = hb + c$，$b = b^* = bh + c^*$，$c^* \in \vartheta_\rho^*$. 注意

$$\rho((bh)^* \cdot (bh)) \leqslant \|b\|^2\rho(h^2) = \|b\|^2 \cdot \|\pi_\rho(h)\xi_\rho\|^2 = 0,$$

因此，$bh \in \vartheta_\rho$，即 $b = bh + c^* \in \vartheta_\rho + \vartheta_\rho^*$. 又 $\mathfrak{N}(\rho) = \mathfrak{N}(\rho)^*$，因此，$\mathfrak{N}(\rho) \subset \vartheta_\rho + \vartheta_\rho^*$. 反向的包含关系是显然的（Schwartz 不等式），所以 $\mathfrak{N}(\rho) = \vartheta_\rho + \vartheta_\rho^*$.

依定理 2.7.1，$\mathscr{H}_\rho = A/\vartheta_\rho$，所以有 $a \in A$，使得 $\xi_\rho = a_\rho$. 于是 $\pi_\rho(b)a_\rho = \pi_\rho(b)\xi_\rho = b_\rho$，$\forall b \in A$，即

$$\rho((ba - b)^*(ba - b)) = \|\pi_\rho(b)a_\rho - b_\rho\|^2 = 0,\ \forall b \in A,$$

---

1) 指极大左理想同时是正则的.

$(ba-b)\in\mathfrak{J}_\rho$, $\forall b\in A$. 所以，$\mathfrak{J}_\rho$ 是正则的。　证毕。

引理 2.7.4 设 A 是有单位元的 c^*-代数，$\mathfrak{J}$ 是 A 的闭左理想，$a\in A_+$. 如果对任意的 $\varepsilon>0$，有 $a_\varepsilon\in\mathfrak{J}\cap A_+$，使得 $a\leqslant a_\varepsilon+\varepsilon$，则 $a\in\mathfrak{J}$.

证. 依命题 2.2.5，$a_\varepsilon^{1/2}\in\mathfrak{J}$. 注意

$$\|a^{1/2}(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}a_\varepsilon^{1/2}-a^{1/2}\|^2=\|\varepsilon^{1/2}a^{1/2}(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}\|^2$$
$$=\varepsilon\|(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}a(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}\|,$$

由于 $0\leqslant a\leqslant a_\varepsilon+\varepsilon$，因此

$$\begin{aligned}0&\leqslant(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}a(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}\\&\leqslant(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}(a_\varepsilon+\varepsilon)(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}\\&=(a_\varepsilon+\varepsilon)(a_\varepsilon+2\varepsilon^{1/2}a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon)^{-1}\leqslant 1.\end{aligned}$$

从而 $\|a^{1/2}(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}a_\varepsilon^{1/2}-a^{1/2}\|\leqslant\varepsilon$，即当 $\varepsilon\to 0+$，有

$$a^{1/2}(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}a_\varepsilon^{1/2}\to a^{1/2},$$

但 $a^{1/2}(a_\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2})^{-1}a_\varepsilon^{1/2}\in\mathfrak{J}$，因此，$a^{1/2}\in\mathfrak{J}$，$a\in\mathfrak{J}$.　证毕。

引理 2.7.5 设 $\mathfrak{J}_1$，$\mathfrak{J}_2$ 是 c^*-代数 A 的闭左理想，并且 $\mathfrak{J}_1\subset\mathfrak{J}_2$. 如果 A 上消灭 $\mathfrak{J}_1$ 的任意正泛函也必消灭 $\mathfrak{J}_2$，则 $\mathfrak{J}_1=\mathfrak{J}_2$.

证. 无妨设 A 有单位元. 设 $a\in\mathfrak{J}_2\cap A_+$，$\varepsilon>0$，并命 $\Omega_\varepsilon=\{\rho\in\mathscr{S}\,|\,\rho(a)\geqslant\varepsilon\}$，则 Ω_ε 是 A^* 的 $\sigma(A^*,A)$ 紧子集. 对任意的 $\rho\in\Omega_\varepsilon$，自然 $\rho(\mathfrak{J}_2)\neq\{0\}$，依假定，亦必有 $\rho(\mathfrak{J}_1)\neq\{0\}$，从而有 $a^{(\rho)}\in\mathfrak{J}_1$，使得 $|\rho(a^{(\rho)})|>1$. 依连续性，有 ρ 的 $\sigma(A^*,A)$ 邻域 V_ρ，使得 $|f(a^{(\rho)})|>1$，$\forall f\in V_\rho$. 自然 $\bigcup\limits_{\rho\in\Omega_\varepsilon}V_\rho\supset\Omega_\varepsilon$，依 Ω_ε 的 $\sigma(A^*,A)$ 紧性，便有 $\rho_1,\cdots,\rho_n\in\Omega_\varepsilon$，使得 $\Omega_\varepsilon\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_i$，这里 $V_i=V_{\rho_i}$，并记 $a_i=a^{(\rho_i)}$，$1\leqslant i\leqslant n$. 于是，$1<|f(a_i)|\leqslant f(a_i^*a_i)$，$\forall f\in V_i\cap\Omega_\varepsilon$，$1\leqslant i\leqslant n$. 特别，$\rho\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^*a_i\right)>1$，$\forall\rho\in\Omega_\varepsilon$. 代 a_i 以它的适当倍数，可以认为

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^*a_i\right)\geqslant\rho(a)\geqslant\varepsilon,\ \forall\rho\in\Omega_\varepsilon,$$

因此，$\rho\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i + \varepsilon - a\right) \geqslant 0$，$\forall \rho \in \mathscr{S}$. 依系 2.3.15，$\sum_{i=1}^{n} a_i^* a + \varepsilon \geqslant a$. 由于 $\sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i \in \vartheta_1$ 及 $\varepsilon > 0$ 是任意的，依引理 2.7.4，$a \in \vartheta_1$，即有

$$\vartheta_2 \cap A_+ \subset \vartheta_1 \cap A_+.$$

依命题 2.4.1，有网 $\{d_l\} \subset \vartheta_2 \cap A_+$，使得 $ad_l \to a$，$\forall a \in \vartheta_2$. 前已证，$\{d_l\}$ 也$\subset \vartheta_1$，又 ϑ_1 是闭左理想，因此，$\vartheta_2 \subset \vartheta_1$. 进而依所设，$\vartheta_1 = \vartheta_2$. 证毕.

定理 2.7.6 设 ϑ 是 c^*-代数 A 的闭左理想，则 $\vartheta = \cap\{\mathscr{L} \mid \mathscr{L}$ 是 A 的正则极大左理想，且$\supset \vartheta\}$.

证. 令 $\Omega = \{\rho \in A^* \mid \rho \geqslant 0,\ \|\rho\| \leqslant 1, \rho(\vartheta) = 0\}$，对每个 $\rho \in \Omega$，设 ϑ_ρ 是 ρ 的左核，显然，

$$\cap\{\vartheta_\rho \mid \rho \in \Omega\} \supset \vartheta.$$

依引理 2.7.5，$\vartheta = \cap\{\vartheta_\rho \mid \rho \in \Omega\}$. 显然 Ω 是 A^* 的非空 $\sigma(A^*, A)$ 紧凸集，设 $\operatorname{ex}\Omega$ 是 Ω 的端点集，则 $\vartheta = \cap\{\vartheta_\rho \mid \rho \in \operatorname{ex}\Omega\}$. 今依定理 2.7.3，只须证明：如果 $\rho \in \operatorname{ex}\Omega$，并且 $\rho \neq 0$，则 ρ 是 A 上的纯态(注意 $\operatorname{ex}\Omega \neq \{0\}$，否则 $\Omega = \{0\}$，依引理 2.7.5，将有 $\vartheta = A$，矛盾). 由于 $0 \in \Omega$ 及 $\rho \in \operatorname{ex}\Omega$，因此，$\|\rho\| = 1$，即 ρ 是 A 上的态. 今设有 $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{S}$ 及数 $\lambda \in (0, 1)$，使得 $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$. 对任意的 $a \in \vartheta$，$a^* a \in \vartheta \subset \vartheta_\rho$，因此，$0 \leqslant \rho_i(a^* a) \leqslant \max\{\lambda^{-1}, (1-\lambda)^{-1}\}\rho(a^* a) = 0$. 可见 $\rho_i(\vartheta) = \{0\}$，即 $\rho_i \in \Omega$，$i = 1, 2$. 但 $\rho \in \operatorname{ex}\Omega$，因此，$\rho = \rho_1 = \rho_2$，即 ρ 是 A 上的纯态. 证毕.

定理 2.7.7 设 ϑ 是 c^*-代数 A 的极大左理想，则 ϑ 是正则的，当且仅当，ϑ 是闭的.

证. 充分性由定理 2.7.6 立见. 今设 ϑ 是 A 的正则极大左理想，于是有 $x_0 \in A$，使得 $(bx_0 - b) \in \vartheta$，$\forall b \in A$. 令 $\tilde{\vartheta} = \vartheta \dotplus \mathbf{C}(1 - x_0)$，它是 $A \dotplus \mathbf{C}$ 的左理想. 如果 $\mathscr{L}$ 是 $A \dotplus \mathbf{C}$ 的包含 $\tilde{\vartheta}$ 的左理想，依 ϑ 的极大性，$\mathscr{L} \cap A = \vartheta$. 今若 $y = a + \lambda \in \mathscr{L}$，

这里 $a\in A$，$\lambda\in\mathbf{C}$，由于 $(1-x_0)\in\tilde{\mathscr{I}}\subset\mathscr{L}$，因此，$\lambda x_0+a=y-\lambda(1-x_0)\in\mathscr{L}\cap A=\mathscr{I}$. 从而，$\mathscr{L}=\tilde{\mathscr{I}}$，即 $\tilde{\mathscr{I}}$ 是 $A\dot{+}\mathbf{C}$ 的极大左理想. 但 $A\dot{+}\mathbf{C}$ 有单位元，因此，$\tilde{\mathscr{I}}$ 是闭的. 进而，$\mathscr{I}=\tilde{\mathscr{I}}\cap A$ 也是闭的. 证毕.

注. c^*-代数的非闭极大左理想是可能存在的.

定理 2.7.8 设 $\mathscr{I}$ 是 c^*-代数 A 的正则极大左理想，则有 A 上的唯一态 ρ，使得 $\mathfrak{N}(\rho)=\{a\in A|\rho(a)=0\}\supset\mathscr{I}$，并且这个 ρ 必是纯态及其左核为 $\mathscr{I}$，$\mathfrak{N}(\rho)=\mathscr{I}+\mathscr{I}^*$.

证. 依定理 2.7.7 及定理 2.7.6 的证明，有 A 上的纯态 ρ，使得 $\rho(\mathscr{I})=\{0\}$，及 $\mathscr{I}_\rho\supset\mathscr{I}$. 但 $\mathscr{I}$ 是极大左理想，因此，$\mathscr{I}_\rho=\mathscr{I}$. 再依定理 2.7.3，$\mathfrak{N}(\rho)=\mathscr{I}+\mathscr{I}^*$.

今设 φ 是 A 上的态，$\varphi(\mathscr{I})=\{0\}$，于是 $\varphi(\mathfrak{N}(\rho))=\{0\}$. 如果 $\{d_l\}$ 是 A 的逼近单位元，$x_0\in A$ 使得 $(bx_0-b)\in\mathscr{I},\forall b\in A$，可见

$$\rho(x_0)=\lim_l\rho(d_l),\quad \varphi(x_0)=\lim_l\varphi(d_l).$$

依命题 2.4.4，$\rho(x_0)=\varphi(x_0)=1$. 又显然 $A=\mathfrak{N}(\rho)\dot{+}\mathbf{C}x_0$，因此，$\varphi=\rho$. 证毕.

系 2.7.9 c^*-代数上的纯态与其正则极大左理想一一对应.

定理 2.7.10 设 A 是 c^*-代数，$\rho\in\mathscr{S}$，$\mathscr{I}$ 是 ρ 的左核并且是 A 的正则左理想，则下列条件是相互等价的：1) ρ 是纯态；2) $\mathscr{I}$ 是 A 的极大左理想；3) $\mathfrak{N}(\rho)=\{a\in A|\rho(a)=0\}=\mathscr{I}+\mathscr{I}^*$.

证. 依定理 2.7.3 及 2.7.8，立见 1) 与 2) 是等价的，并由 1) 可导出 3).

今设 $\mathfrak{N}(\rho)=\mathscr{I}+\mathscr{I}^*$，及 $x_0\in A$ 使得 $(bx_0-b)\in\mathscr{I},\forall b\in A$. 如果有 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{S}$ 及数 $\lambda\in(0,1)$，使得 $\rho=\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2$. 当 $x\in\mathscr{I}$ 时，$x^*x\in\mathfrak{N}(\rho)$，从而 $\rho_i(x^*x)=0$，$\rho_i(x)=0$，因此，$\rho_i(\mathfrak{N}(\rho))=\{0\}$，$i=1,2$. 再仿定理 2.7.8 的证明，有 $\rho(x_0)=\rho_1(x_0)=\rho_2(x_0)=1$. 又 $A=\mathfrak{N}(\rho)\dot{+}\mathbf{C}x_0$，因此，$\rho=\rho_1=\rho_2$，即 ρ 是纯态. 证毕.

注　本节见参考文献[53]，[54]，[102]，[103]。

§8. 理想与商 c^*-代数

定义 2.8.1　设 A 是 c^*-代数，$\mathscr{P}(A)$ 是它的纯态全体(见定义 2.3.8)，记 $\hat{A}$ 为 A 的不可约 * 表示酉等价类的全体，$\mathrm{Prim}(A)$ 为 A 的素理想全体，这里 ϑ 是 A 的一个素理想，指有 A 的不可约 * 表示 $\{\pi, \mathscr{H}\}$，使得 $\vartheta = \ker \pi = \{a \in A | \pi(a) = 0\}$，即素理想是不可约 * 表示的核。

显然，素理想是闭双侧 * 理想，并且酉等价的不可约 * 表示有相同的核，即可以自然地建立 $\hat{A}$ 到 $\mathrm{Prim}(A)$ 上的映象。此外，如果 $\rho \in \mathscr{P}(A)$，依定理 2.7.1，ρ 产生的 * 表示是不可约的；反之，如果 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 A 的不可约 * 表示，对任意的 $\xi \in \mathscr{H}$，$\|\xi\| = 1$，令 $\rho(\cdot) = \langle \pi(\cdot)\xi, \xi\rangle$，依命题 2.3.21，$\rho$ 产生的 * 表示将酉等价于 $\{\pi, \mathscr{H}\}$，再由定理 2.7.1，$\rho \in \mathscr{P}(A)$。因此，可自然地建立 $\mathscr{P}(A)$ 到 $\hat{A}$ 上的映象。

命题 2.8.2　设 ϑ 是 c^*-代数 A 的闭双侧理想，则 $\vartheta = \cap\{J \in \mathrm{Prim}(A) | J \supset \vartheta\} = \cap\{\ker \pi_\rho | \rho \in \mathscr{P}(A), \rho(\vartheta) = 0\}$，这里 $\ker \pi_\rho = \{a \in A | \pi_\rho(a) = 0\}$ 是表示 π_ρ 的核。

证。ϑ 当然也是 A 的闭左理想，依定理 2.7.6 的证明可见

$$\begin{aligned} \vartheta &= \cap\{\vartheta_\rho | \rho \in \mathscr{P}(A), \rho(\vartheta) = 0\} \\ &\supset \cap\{\ker \pi_\rho | \rho \in \mathscr{P}(A), \rho(\vartheta) = 0\}. \end{aligned}$$

这里 ϑ_ρ 是 ρ 的左核。另一方面，如 $\rho \in \mathscr{P}(A)$，$\rho(\vartheta) = \{0\}$，当 $a \in \vartheta$ 时，由于 ϑ 是双侧理想，从而 $b^*a^*ab \in \vartheta$，即 $\|\pi_\rho(a)b_\rho\|^2 = \rho(b^*a^*ab) = 0$，$\forall b \in A$，因此，$a \in \ker \pi_\rho$。所以，$\vartheta = \cap\{\ker \pi_\rho | \rho \in \mathscr{P}(A), \rho(\vartheta) = 0\}$。又显然

$$\vartheta \subset \{J \in \mathrm{Prim}(A) | J \supset \vartheta\} \subset \cap\{\ker \pi_\rho | \rho \in \mathscr{P}(A), \rho(\vartheta) = 0\}$$

由此得证。

系 2.8.3　设 Ω 是紧 Hausdorff 空间，ϑ 是 $C(\Omega)$ 的闭理想，则存在 Ω 的闭子集 Ω_0，使得

$$\mathcal{J} = \{f \in C(\Omega) \mid f(t) = 0, \forall t \in \Omega_0\}$$

这由命题 2.8.2 及 2.3.9 立见.

定义 2.8.4 设 A 是 c^*-代数，$\mathcal{J}$ 是 A 的闭双侧理想，记

$$\mathscr{P}_{\mathcal{J}}(A) = \{\rho \in \mathscr{P}(A) \mid \rho(\mathcal{J}) = 0\},$$
$$\mathscr{P}^{\mathcal{J}}(A) = \mathscr{P}(A) \backslash \mathscr{P}_{\mathcal{J}}(A),$$
$$\hat{A}_{\mathcal{J}} = \{\pi \in \hat{A} \mid \ker \pi \supset \mathcal{J}\}, \ \hat{A}^{\mathcal{J}} = \hat{A} \backslash \hat{A}_{\mathcal{J}},$$
$$\mathrm{Prim}_{\mathcal{J}}(A) = \{J \in \mathrm{Prim}(A) \mid J \supset \mathcal{J}\},$$
$$\mathrm{Prim}^{\mathcal{J}}(A) = \mathrm{Prim}(A) \backslash \mathrm{Prim}_{\mathcal{J}}(A).$$

定理 2.8.5 设 $\mathcal{J}$ 是 c^*-代数 A 的闭双侧理想.

1) 对任意的 $\pi \in \hat{A}_{\mathcal{J}}$，令 $\tilde{\pi}(\tilde{a}) = \pi(a)$，这里 $a \in \tilde{a}$，$a \to \tilde{a}$ 是 A 到 $A/\mathcal{J}$ 上的正则映象，则 $\pi \to \tilde{\pi}$ 是 $\hat{A}_{\mathcal{J}}$ 到 $(A/\mathcal{J})^{\wedge}$ 上的一一映象；

2) $\pi \to \pi|\mathcal{J}$ 是 $\hat{A}^{\mathcal{J}}$ 到 $\hat{\mathcal{J}}$ 上的一一映象.

证. 1) 显然. 今证 2). 设 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 A 的不可约 $*$ 表示，并且 $\pi|\mathcal{J} \neq 0$. 由于 $\mathcal{J}$ 是 A 的双侧理想，$\{\pi(a)\xi \mid a \in \mathcal{J}, \xi \in \mathscr{H}\}$ 张成的闭子空间 $\mathscr{K}$ 对 $\pi(A)$ 是不变的，但 π 是不可约的，因此 $\mathscr{K} = \mathscr{H}$，即 $\{\pi|\mathcal{J}, \mathscr{H}\}$ 是 $\mathcal{J}$ 的非退化表示. 如果 $\{d_l\}$ 是 $\mathcal{J}$ (作为 c^*-代数)的逼近单位元，依命题 2.4.6，$\pi(d_l) \xrightarrow{\text{强算子}} 1$. 从而 $\pi(ad_l) \xrightarrow{\text{强算子}} \pi(a)$，$\forall a \in A$，即 $\pi(\mathcal{J})$ 在 $\pi(A)$ 中强算子稠. 再依命题 2.6.2，$\{\pi|\mathcal{J}, \mathscr{H}\}$ 是 $\mathcal{J}$ 的不可约 $*$ 表示.

反之设 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 $\mathcal{J}$ 的不可约 $*$ 表示，对任意的 $a \in A$，定义 $\pi'(a)\pi(b)\xi = \pi(ab)\xi$，$\forall b \in \mathcal{J}$，$\xi \in \mathscr{H}$. 易见 $\{\pi', \mathscr{H}\}$ 是 A 的不可约 $*$ 表示，且为 π 的唯一扩张. 此外，$\mathcal{J}$ 的两个酉等价的不可约 $*$ 表示作相应的扩张后，易见仍然是酉等价的. 因此，$\pi \to \pi|\mathcal{J}$ 是 $\hat{A}^{\mathcal{J}}$ 到 $\hat{\mathcal{J}}$ 上的一一映象. 证毕.

引理 2.8.6 设 $\mathcal{J} \in \mathrm{Prim}(A)$，$\mathcal{J}_1$，$\mathcal{J}_2$ 是 A 的双侧理想，并且 $\mathcal{J} \supset \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$，则 $\mathcal{J} \supset \mathcal{J}_1$ 或 $\mathcal{J} \supset \mathcal{J}_2$.

证. 无妨设 $\mathcal{J}_1$，$\mathcal{J}_2$ 是闭的. 如果 $\mathcal{J} \not\supset \mathcal{J}_1$，并且 $\mathcal{J} \not\supset \mathcal{J}_2$，取 A 的不可约 $*$ 表示 $\{\pi, \mathscr{H}\}$，使得 $\ker \pi = \mathcal{J}$，依定理 2.8.5，$\{\pi|$

$\mathscr{I}_1$, $\mathscr{H}\}$ 是 $\mathscr{I}_1$ 的不可约 * 表示. 我们也可取 $a\in \mathscr{I}_2\backslash\mathscr{I}$ 及 $\xi\in\mathscr{H}$，使得 $\pi(a)\xi\neq 0$. 于是 $\pi(\mathscr{I}_1)\pi(a)\xi$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠. 但 $\mathscr{I}_1 a\subset \mathscr{I}_1\mathscr{I}_2\subset\mathscr{I}$，从而 $\pi(\mathscr{I}_1)\pi(a)\xi=\{0\}$. 矛盾. 证毕.

定理 2.8.7 设 $\mathscr{I}$ 是 c^*-代数 A 的闭双侧理想.

1) $J\to J/\mathscr{I}$ 是 $\mathrm{Prim}_{\mathscr{I}}(A)$ 到 $\mathrm{Prim}(A/\mathscr{I})$ 上的一一映象;

2) $J\to J\cap\mathscr{I}$ 是 $\mathrm{Prim}^{\mathscr{I}}(A)$ 到 $\mathrm{Prim}(\mathscr{I})$ 上的一一映象.

证. 1) 设 $J\in\mathrm{Prim}_{\mathscr{I}}(A)$，取 A 的不可约 * 表示 $\{\pi,\mathscr{H}\}$，使得 $\ker\pi=J\supset\mathscr{I}$. 对任意的 $\tilde{a}\in A/\mathscr{I}$，定义 $\tilde{\pi}(\tilde{a})=\pi(a)(a\in\tilde{a})$，于是，$\{\tilde{\pi},\mathscr{H}\}$ 是 $A/\mathscr{I}$ 的不可约 * 表示，并且 $\ker\tilde{\pi}=J/\mathscr{I}$，所以，$J/\mathscr{I}\in\mathrm{Prim}(A/\mathscr{I})$. 反之，设 $\{\tilde{\pi},\mathscr{H}\}$ 是 $A/\mathscr{I}$ 的不可约 * 表示，定义 $\pi(a)=\tilde{\pi}(\tilde{a})$，$\forall a\in A$，则 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 A 的不可约 * 表示，并且 $\ker\pi=J\supset\mathscr{I}$ 以及 $\ker\tilde{\pi}=J/\mathscr{I}$. 这说明 $A/\mathscr{I}$ 的素理想必有 $J/\mathscr{I}$ 的形式，即 $J\to J/\mathscr{I}$ 是 $\mathrm{Prim}_{\mathscr{I}}(A)$ 到 $\mathrm{Prim}(A/\mathscr{I})$ 上的映象.

今若 $J_1/\mathscr{I}=J_2/\mathscr{I}$，这里 $J_1, J_2\in\mathrm{Prim}_{\mathscr{I}}(A)$. 对任意的 $a\in\mathscr{I}_1$，则 $\tilde{a}\in J_1/\mathscr{I}=J_2/\mathscr{I}$. 因此有 $b\in J_2$，使得 $(a-b)\in\mathscr{I}\subset J_2$，从而 $a\in J_2$，即 $J_1\subset J_2$. 同证 $J_2\subset J_1$，所以，$J_1=J_2$.

2) 设 $J\in\mathrm{Prim}^{\mathscr{I}}(A)$，$\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 A 的不可约 * 表示，使得 $\ker\pi=J\not\supset\mathscr{I}$. 依定理 2.8.5，$\{\pi|\mathscr{I},\mathscr{H}\}$ 也是 $\mathscr{I}$ 的不可约 * 表示，所以，$\ker(\pi|\mathscr{I})=J\cap\mathscr{I}\in\mathrm{Prim}(\mathscr{I})$. 反之，如果 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 $\mathscr{I}$ 的不可约 * 表示，依定理 2.8.5，它可以唯一扩张为 A 的不可约 * 表示. 因此，$J\to J\cap\mathscr{I}$ 是 $\mathrm{Prim}^{\mathscr{I}}(A)$ 到 $\mathrm{Prim}(\mathscr{I})$ 上的映象.

今若有 $J_1, J_2\in\mathrm{Prim}^{\mathscr{I}}(A)$，使得 $J_1\cap\mathscr{I}=J_2\cap\mathscr{I}$. 于是，$J_2\supset J_1\cap\mathscr{I}\supset J_1\mathscr{I}$. 但 $J_2\not\supset\mathscr{I}$，依引理 2.8.6，$J_2\supset J_1$. 同证 $J_1\supset J_2$，因此，$J_1=J_2$. 证毕.

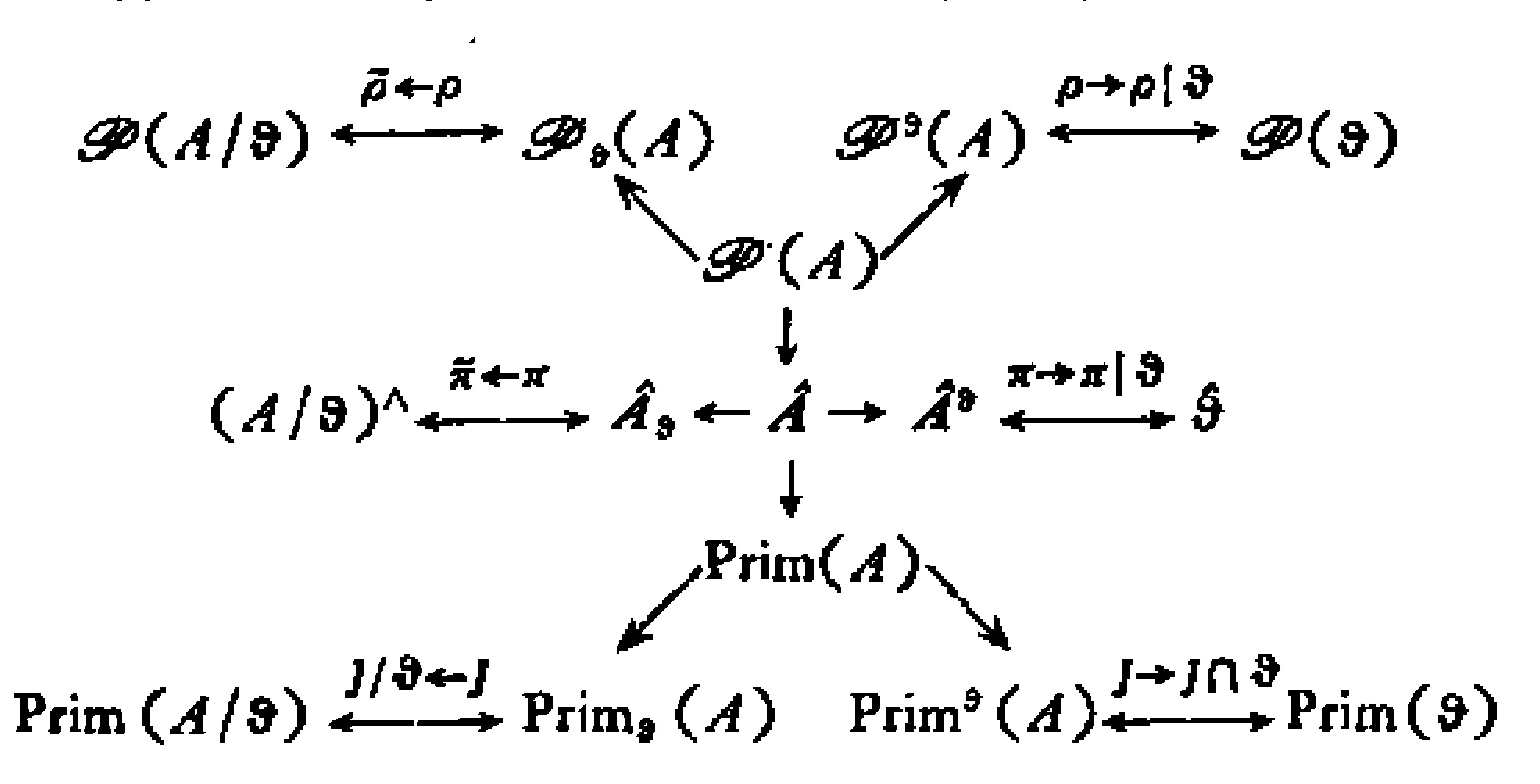
定理 2.8.8 设 $\mathscr{I}$ 是 c^*-代数 A 的闭双侧理想.

1) $\rho\to\tilde{\rho}$ 是 $\mathscr{P}_{\mathscr{I}}(A)$ 到 $\mathscr{P}(A/\mathscr{I})$ 上的一一映象，这里 $\tilde{\rho}(\tilde{a})=\rho(a)$，$\forall\tilde{a}\in A/\mathscr{I}$，$a\in\tilde{a}$;

2) $\rho\to\rho|\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{P}^{\mathscr{I}}(A)$ 到 $\mathscr{P}(\mathscr{I})$ 上的一一映象.

证. 1) 即命题 2.4.11. 今证 2). 设 $\rho\in\mathscr{P}^{\vartheta}(A)$, $\{\pi,\mathscr{H},\xi\}$ 是 ρ 产生的不可约循环 $*$ 表示. 如果 $\vartheta\subset\ker\pi$, 特别, $\rho(a)=\langle\pi(a)\xi,\xi\rangle=0$, $\forall a\in\vartheta$, 这与 $\rho\in\mathscr{P}_{\vartheta}(A)$ 相矛盾. 因此, 依定理 2.8.5, $\{\pi|\vartheta,\mathscr{H}\}$ 是 ϑ 的不可约 $*$ 表示. 再依命题 2.3.21, $\{\pi|\vartheta,\mathscr{H}\}$ 将与 $(\rho|\vartheta)(\cdot)=\langle(\pi|\vartheta)(\cdot)\xi,\xi\rangle$ 产生的 ϑ 的 $*$ 表示酉等价, 所以, $\rho|\vartheta\in\mathscr{P}(\vartheta)$. 此外, 如果取 $\{d_l\}$ 是 ϑ (作为 c^*-代数)的逼近单位元, 则 $\pi(d_l)\xrightarrow{\text{强算子}}1$. 于是, $\rho(a)=\langle\pi(a)\xi,\xi\rangle=\lim\limits_{l}\langle\pi(ad_l)\xi,\xi\rangle=\lim\limits_{l}\rho(ad_l)$, $\forall a\in A$. 即 ρ 在 A 上的行为完全由 $\rho|\vartheta$ 所决定. 因此, 如果 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{P}^{\vartheta}(A)$, 并且 $\rho_1|\vartheta=\rho_2|\vartheta$, 则 $\rho_1=\rho_2$. 反之, 如果 $\rho\in\mathscr{P}(\vartheta)$, $\{\pi,\mathscr{H},\xi\}$ 是 ρ 产生的 ϑ 的不可约循环 $*$ 表示. 由定理 2.8.5, 它可以唯一地扩张成 A 的 $*$ 表示 $\{\pi',\mathscr{H}\}$. 于是, $\rho'(\cdot)=\langle\pi'(\cdot)\xi,\xi\rangle$ 是 ρ 的扩张, 它产生的 A 的 $*$ 表示将酉等价于 $\{\pi',\mathscr{H}\}$. 从而, $\rho'\in\mathscr{P}^{\vartheta}(A)$. 证毕.

综合定理 2.8.5, 2.8.7 及 2.8.8, 我们有下图:



注 本节见参考文献 [21], [24], [103].

§9. 可传的 c^*-子代数

引理 2.9.1 设 A 是 c^*-代数, $a,x,y\in A$, 并且 $a\geqslant0$. 又设有数 $\lambda,\mu>0$, $\lambda+\mu>1$, 使得

$$x^*x \leqslant a^\lambda,\ yy^* \leqslant a^\mu.$$

令 $u_n = x\left(\frac{1}{n}+a\right)^{-\frac{1}{2}}y$，则有 $u \in A$，使得 $\|u_n - u\| \to 0$，并且 $\|u\| \leqslant \|a^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\|$。

证。令 $d_{nm} = \left(\frac{1}{n}+a\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{m}+a\right)^{-\frac{1}{2}}$，于是

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 &= \|xd_{nm}y\|^2 = \|y^*d_{nm}x^*xd_{nm}y\| \\ &\leqslant \|y^*d_{nm}a^\lambda d_{nm}y\| = \|a^{\frac{\lambda}{2}}d_{nm}y\|^2 \\ &= \|a^{\frac{\lambda}{2}}d_{nm}yy^*d_{nm}a^{\frac{\lambda}{2}}\| \leqslant \|a^{\frac{\lambda}{2}}d_{nm}a^\mu d_{nm}a^{\frac{\lambda}{2}}\| \\ &= \|d_{nm}a^{\frac{\lambda+\mu}{2}}\|^2.\end{aligned}$$

无妨设 A 有单位元，用 $\{1, a\}$ 生成交换 c^*-子代数 $B \cong C(\Omega)$。对每个 $t \in \Omega$，$\left(\left(\frac{1}{n}+a\right)^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{\lambda+\mu}{2}}\right)(t) \nearrow a^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}(t)$。由 Dini 定理，这个收敛在 Ω 上一致，从而 $\|d_{nm}a^{\frac{\lambda+\mu}{2}}\| \to 0$，$\|u_n - u_m\| \to 0$，即有 $u \in A$，使得 $\|u_n - u\| \to 0$。另一方面，同样可证 $\|u_n\| \leqslant \left\|\left(\frac{1}{n}+a\right)^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{\lambda+\mu}{2}}\right\| \leqslant \|a^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\|$，$\forall n$，因此，$\|u\| \leqslant \|a^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\|$。证毕。

命题 2.9.2 设 A 是 c^*-代数，$x, a \in A$，并且 $a \geqslant 0$，$x^*x \leqslant a$。又设 $0 < \lambda < 1/2$，则存在 $u \in A$，使得

$$x = ua^\lambda,\ \|u\| \leqslant \|a^{\frac{1}{2}-\lambda}\|.$$

证。 令 $u_n = x\left(\frac{1}{n}+a\right)^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}-\lambda}$，依引理 1.9.1，$u_n \to u$，且 $\|u\| \leqslant \|a^{\frac{1}{2}-\lambda}\|$。此外，由 $x^*x \leqslant a$，$\|x - u_na^\lambda\| \leqslant \left\|a^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(\frac{1}{n}+a\right)^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right]\right\| \to 0$，所以，$x = ua^\lambda$。证毕。

系 2.9.3 设 A 是 c^*-代数，$x \in A$，$0 < \lambda < 1$，则有 $u \in A$，使得 $x = u(x^*x)^{\frac{\lambda}{2}}$，$\|u\| \leqslant \|(x^*x)^{\frac{1-\lambda}{2}}\|$。

定义 2.9.4 设 A 是 c^*-代数，锥 $M(\subset A_+)$ 称为可传的，指

如果 $a\in A_+$，且有 $b\in M$，使得 $a\leqslant b$，则 $a\in M$。

对于可传锥M，我们定义

$$\mathscr{L}(M)=\{x\in A\,|\,x^*x\in M\}.$$

容易证明，$\mathscr{L}(M)$ 是A的左理想。

A的 c^*-子代数 B 称为可传的，指 B_+是可传锥。

定理 2.9.5 设A是 c^*-代数。

1) $B\to B_+$ 是A的可传 c^*-子代数全体到A的闭可传锥全体上的一一映象；其逆映象为 $M\to\mathscr{L}(M)\cap\mathscr{L}(M)^*$；

2) $M\to\mathscr{L}(M)$ 是A的闭可传锥全体到A的闭左理想全体上的一一映象，并且 $M=\mathscr{L}(M)_+$；其逆映象为 $L\to L_+$；

3) $L\to L\cap L^*$ 是A的闭左理想全体到A的可传 c^*-子代数全体上的一一映象，并且 $L_+=(L\cap L^*)_+$；其逆映象为 $B\to\mathscr{L}(B_+)$。

证. 若B是可传 c^*-子代数，B_+ 自然是闭可传锥，并且由于B是 B_+ 的线性包，$B\to B_+$ 是一一的。

如果M是闭可传锥，$\mathscr{L}(M)$ 当然是闭左理想. 设 $x\in A$，使得 $x^*x\in\mathscr{L}(M)$，于是 $(x^*x)^{\frac{1}{3}}\in\mathscr{L}(M)$. 依系 2.9.3，可写 $x=u(x^*x)^{\frac{1}{3}}$，因此，$x\in\mathscr{L}(M)$. 从而，$\mathscr{L}(M)_+=\{x^*x\,|\,x\in\mathscr{L}(M)\}$. 再由 $\mathscr{L}(M)$的定义，$M=\mathscr{L}(M)_+$. 因此，映象 $M\to\mathscr{L}(M)$ 是一一的。

今设L是闭左理想，自然 $(L\cap L^*)$ 是A的 c^*-子代数. 由于 $L_+\subset L\cap L^*\subset L$，可见 $L_+=(L\cap L^*)_+$. 因此要证 $L\cap L^*$ 是可传的，只须证 L_+ 是可传锥. 设 $a\in A_+$，$b\in L_+$，并且 $a\leqslant b$. 依命题 2.9.2，可写 $a^{\frac{1}{2}}=ub^{\frac{1}{3}}$，因此，$a^{\frac{1}{2}}\in L_+$，$a\in L_+$，即 L_+ 是可传的。

如果L是闭左理想，已证 L_+ 是可传锥. 又若 $x\in A$，使得 $x^*x\in L_+$，依系 2.9.3，可写 $x=u(x^*x)^{1/3}$，因此，$x\in L$. 这说明 $L=\mathscr{L}(L_+)$，2) 得证。

如果M是闭可传锥，$\mathscr{L}(M)$ 是闭左理想，于是 $\mathscr{L}(M)\cap\mathscr{L}(M)^*$是可传的 c^*-子代数，并且 $M=\mathscr{L}(M)_+=(\mathscr{L}(M)\cap$

$\mathscr{L}(M)^*)_+$,因此 1) 得证.

如果 B 是可传的 c^*-子代数，B_+ 是闭可传锥，$\mathscr{L}(B_+)$ 是闭左理想，$\mathscr{L}(B_+)\cap\mathscr{L}(B_+)^*$ 是可传 c^*-子代数. 又 $(\mathscr{L}(B_+)\cap\mathscr{L}(B_+)^*)_+=\mathscr{L}(B_+)_+=B_+$，因此，$\mathscr{L}(B_+)\cap\mathscr{L}(B_+)^*=B$，即 $L\to L\cap L^*$ 是闭左理想全体到可传 c^*-子代数全体上的映象. 此外，如果有闭左理想 L，使得 $B=L\cap L^*$，则 $B_+=(L\cap L^*)_+=L_+$，于是，$L=\mathscr{L}(L_+)=\mathscr{L}(B_+)$，即 3) 的映象也是一一的,且逆映象为 $B\to\mathscr{L}(B_+)$. 证毕.

引理 2.9.6 设 Φ 是 c^*-代数 A 到 c^*-代数 B 上的 $*$ 同态，$a\in A_+$，$b\in B$，$b^*b\leqslant\Phi(a)$，则有 $x\in A$，使得 $b=\Phi(x)$，$x^*x\leqslant a$.

证. 取 $y\in A$，使得 $b=\Phi(y)$. 分解 $y^*y-a=h-k$，这里 $h,k\in A_+$，且 $hk=0$. 由于 $b^*b\leqslant\Phi(a)$，因此，$0\leqslant\Phi(h)\leqslant\Phi(k)$. 但 $\Phi(h)^{\frac{1}{2}}\Phi(k)\Phi(h)^{\frac{1}{2}}=0$，因此，$\Phi(h)=0$.

显然 $y^*y\leqslant a+h$，令 $x_n=y\left(\frac{1}{n}+a+h\right)^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$，依引理 2.9.1，有 $x\in A$，使得 $x_n\to x$. 又由于 $\Phi(h)=0$，及 $b^*b\leqslant\Phi(a)$，因此，

$$\Phi(x)=\lim_n\Phi(x_n)=\lim_n b\left(\frac{1}{n}+\Phi(a)\right)^{-\frac{1}{2}}\Phi(a)^{\frac{1}{2}}=b.$$

此外，由于 $y^*y\leqslant a+h$，对任意的 n，

$$x_n^*x_n\leqslant a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n}+a+h\right)^{-\frac{1}{2}}(a+h)\left(\frac{1}{n}+a+h\right)^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\leqslant a,$$

所以，$x^*x\leqslant a$. 证毕.

命题 2.9.7 设 Φ 是 c^*-代数 A 到 c^*-代数 B 上的 $*$ 同态，则 Φ 把 A 的可传 c^*-子代数变成 B 的可传 c^*-子代数.

由引理 2.9.6 立见.

命题 2.9.8 设 A 是 c^*-代数，B 是 A 的可传 c^*-子代数，φ 是 B 上的态,则 φ 扩张为 A 上的态是唯一的.

证. 设 ψ 是 A 上的态，且 $\psi|B=\varphi$. 又若 $\{d_l\}$ 是 B 的逼近

单位元，于是，$\|\psi\| = \|\varphi\| = 1 = \lim_l \varphi(d_l)$. 从而，依 Schwartz 不等式可见

$$\psi(a(1-d_l)) \to 0,\ \psi((1-d_l)a) \to 0,\ \forall a \in A.$$

进而，$\psi(a) = \lim_l \psi(d_l a d_l)$，$\forall a \in A$. 如果 $a \in A_+$，则 $0 \leqslant d_l \cdot a d_l \leqslant \|a\| d_l^2 \in B_+$，$B$ 是可传的，从而 $d_l a d_l \in B$，即 $d_l A d_l \subset B$，$\forall l$. 于是

$$\psi(a) = \lim_l \varphi(d_l a d_l),\ \forall a \in A$$

因此，ψ 为 φ 唯一决定. 证毕.

注 本节见参考文献 [24]，[86].

§10. *表示的比较、分离性与拟等价性

定义 2.10.1 设 A 是 c^*-代数，$\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 A 的 * 表示，如果 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的闭子空间，且对 π 不变(即 $\pi(a)\mathscr{K} \subset \mathscr{K}$，$\forall a \in A$)，则 $\{\pi, \mathscr{K}\}$ 也是 A 的 * 表示，称为 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 的一个子 * 表示.

今设 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$ 是 A 的 * 表示，$i = 1, 2$，如果 $\{\pi_1, \mathscr{H}_1\}$ 酉等价于 $\{\pi_2, \mathscr{H}_2\}$ 的一个子 * 表示，则记以 $\pi_1 \lesssim \pi_2$.

命题 2.10.2 设 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$ 是 c^*-代数 A 的 * 表示，$i = 1, 2$. 1) 令 $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$，$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$，$p_i'$ 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_i$ 上的投影，自然 $p_i' \in \pi(A)'$，$i = 1, 2$. 则 $\pi_1 \lesssim \pi_2$，当且仅当，在 $\pi(A)'$ 中有 $p_1' \lesssim p_2'$; 2) 如果 $\pi_1 \lesssim \pi_2$，又 $\pi_2 \lesssim \pi_1$，则它们酉等价，即 $\{\pi_1, \mathscr{H}_1\} \cong \{\pi_2, \mathscr{H}_2\}$.

证. 1) 显然. 2) 由 1) 及命题 1.5.3 立见.

定义 2.10.3 设 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$ 是 c^*-代数 A 的 * 表示，$i = 1, 2$，π_1 与 π_2 称为分离的，记作 $\pi_1 \mathring{\smile} \pi_2$，指 π_1 的任何非零子 * 表示不能与 π_2 的任何非零子 * 表示酉等价.

命题 2.10.4 设 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$ 是 c^*-代数 A 的 * 表示，$i = 1, 2$，令 $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$，$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$，$p_i'$ 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_i$ 上的投

影，于是 $p_i'\in\pi(A')$，$i=1,2$. 则下列是相互等价的：1) $\pi_1 \mathring{\smile} \pi_2$；2) $c(p_1')\cdot c(p_2')=0$，这里 $c(p_i')$ 是 p_i 在 $\pi(A)'$ 中的中心覆盖，$i=1,2$；3) p_i' 是 $\pi(A)'$ 的中心投影，$i=1,2$.

证. 由于 $p_1'\oplus p_2'=1$，因此，2) 与 3) 等价. 又显然 $\pi_1 \mathring{\smile} \pi_2$，当且仅当，不存在 $\pi(A)'$ 的非零投影 q_1', q_2'，使得 $q_1'\sim q_2'$，$q_1'\leqslant p_1'$，$q_2'\leqslant p_2'$. 依命题 1.5.9，后者等价于 $c(p_1')\cdot c(p_2')=0$. 证毕.

定义 2.10.5 c^*-代数 A 的非退化 $*$ 表示 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 称为因子的，指 $\pi(A)$ 生成的（$\mathscr{H}$ 中的）vN 代数(即 $\pi(A)''$) 是因子.

命题 2.10.6 设 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$ 是 c^*-代数 A 的因子 $*$ 表示，$i=1,2$，则必有下列三者之一成立：

$$\pi_1 \mathring{\smile} \pi_2,\quad \pi_1\precsim\pi_2,\quad \pi_2\precsim\pi_1.$$

证. 令 $\pi=\pi_1\oplus\pi_2$，$\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2$，$M=\pi(A)''$，$p_i'$ 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_i$ 上的投影，则 $p_i'\in M'$，$i=1,2$. 依所设，Mp_i' 是 $\mathscr{H}_i$ 中的因子，$i=1,2$. 如果 $c(p_i')$ 是 p_i' 在 M' 中的中心覆盖，依命题 1.5.10，Mp_i' 与 $Mc(p_i')$ $*$ 同构，因此，$Mc(p_i')$ 也是 ($c(p_i')\mathscr{H}$ 中的)因子，从而，$c(p_i')$ 是 $Z=M\cap M'$ 的极小投影(即若 Z 的投影 $z\leqslant c(p_i')$，则 $z=0$ 或者 $c(p_i')$)，$i=1,2$. 由此，$c(p_1')\cdot c(p_2')=0$，或者 $c(p_1')=c(p_2')$.

当 $c(p_1')\cdot c(p_2')=0$，依命题 2.10.4，$\pi_1 \mathring{\smile} \pi_2$.

当 $c(p_1')=c(p_2')$ 时，已经指出 $Mc(p_1')$ 是因子，依命题 1.3.8，$M'c(p_1')$ 也是因子，于是，由 p_1'、p_2' 都 $\in M'c(p_1')$，必将有 $p_1'\precsim p_2'$，或者 $p_2'\precsim p_1'$ (定理 1.5.4). 依命题 2.10.2，相应有 $\pi_1\precsim\pi_2$，或者 $\pi_2\precsim\pi_1$. 证毕.

命题 2.10.7 设 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$ 是 c^*-代数 A 的不可约 $*$ 表示，$i=1,2$，则 $\pi_1 \mathring{\smile} \pi_2$，当且仅当，$\pi_1$ 与 π_2 不是酉等价的.

证. 由于 π_i 的非零子 $*$ 表示只能是它本身，$i=1,2$，依定义 2.10.3，立即得证.

命题 2.10.8 如果 $\pi \mathring{\smile} \pi_l$，$\forall l$，则 $\pi \mathring{\smile} \sum_l \oplus\pi_l$.

证. 分别设 π, π_l 的作用空间是 $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_l$, 并令 $\Phi=\pi\oplus\bigoplus_l\pi_l$, $\mathscr{K}=\mathscr{H}\oplus\sum_l\oplus\mathscr{H}_l$, p', p'_l 是 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_l$ 上的投影，于是 $p',p'_l\in\Phi(A)'$, $\forall l$. 依命题 2.10.4 的证明，$c(p')\cdot c(p'_l)=0$, $\forall l$. 依命题 1.5.8,

$$c(p')\perp\sup_l c(p'_l)=c(\sup_l p'_l)=c\left(\sum_l p'_l\right)$$

再由命题 2.10.4, $\pi\,\delta\,\sum_l\oplus\pi_l$. 证毕.

定义 2.10.9 设 $\{\pi_i,\mathscr{H}_i\}$ 是 c^*-代数 A 的非退化 $*$ 表示，$M_i=\pi_i(A)''$, $i=1,2$. π_1 与 π_2 称为拟等价的，记作 $\pi_1\approx\pi_2$, 指存在 M_1 到 M_2 上的 $*$ 同构 Φ, 使得 $\Phi(\pi_1(a))=\pi_2(a)$, $\forall a\in A$.

命题 2.10.10 设 $\{\pi_i,\mathscr{H}_i\}$ 是 c^*-代数 A 的非退化 $*$ 表示，$i=1,2$, 则下列是等价的：

1) $\pi_1\approx\pi_2$;

2) π_i 的任何非零子 $*$ 表示不能与 π_j 相分离，$i\neq j$;

3) 令 $\pi=\pi_1\oplus\pi_2$, $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2$, p'_i 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_i$ 上的投影 $(\in\pi(A)')$, $i=1,2$, 则 $c(p'_1)=c(p'_2)$;

4) 存在 π_1 的增补 π (即有 Hilbert 空间 $\mathscr{L}$, 使得 $\pi(a)=\pi_1(a)\otimes1_{\mathscr{L}}$, $\forall a\in A$) 及 $\pi(A)'$ 的投影 p', p' 在 $\pi(A)'$ 中的中心覆盖是 $1_{\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{L}}$, 并且 $\pi p'\cong\pi_2$;

5) 分别存在 π_1, π_2 的增补，而它们酉等价.

证. 1) 推导 4): 由定理 1.12.4 及命题 1.12.5 立见.

4) 推导1): 用 4) 来定义 Φ_3, Φ_2, Φ_1 如定理 1.12.4，再令 $\Phi=\Phi_3\circ\Phi_2\circ\Phi_1$, 即见 $\pi_1\approx\pi_2$.

4) 推导 5): 由条件 4), π_2 将酉等价于 $\pi_1\otimes1_{\mathscr{L}}$ 的一个子 $*$ 表示. 1) 与 4) 等价，因此，π_1 也酉等价于 $\pi_2\otimes1_{\mathscr{K}}$ 的一个子 $*$ 表示($\mathscr{K}$ 为某 Hilbert 空间). 命 R 是无穷维的 Hilbert 空间，并且 $\dim R\geqslant\dim\mathscr{L}$, $\dim\mathscr{K}$, 于是

$\pi_2\otimes1_R\lesssim\pi_1\otimes1_{\mathscr{L}}\otimes1_R\cong\pi_1\otimes1_R\lesssim\pi_2\otimes1_{\mathscr{K}}\otimes1_R\cong\pi_2\otimes1_R$ 再依

命题 2.10.2，$\pi_1\otimes 1_R\cong\pi_2\otimes 1_R$.

5) 推导 2)：设 $\pi_1\otimes 1_R\cong\pi_2\otimes 1_R$，这里 R 是某个 Hilbert 空间。如果 τ_i 是 π_i 的非零子 * 表示，它也是 $\pi_i\otimes 1_R$ 的子 * 表示，于是 τ_i 不能与 $\pi_j\otimes 1_R$ 相分离。再依命题 2.10.8，τ_i 不能与 π_j 相分离。

2) 推导 3)：如果 $c(p_1')\neq c(p_2')$，无妨设 $c(p_1')\not\geq c(p_2')$，于是 $z=c(p_2')-c(p_1')\cdot c(p_2')$ 是 $\pi(A)'$ 的非零中心投影，$z\leqslant c(p_2')$，并且 $z\perp c(p_1')$。依命题 1.5.8 的 4)，$zp_2'\neq 0$. 当然也有 $c(zp_2')\perp c(p_1')$. 依命题 2.10.4，$\{\pi_2,\mathscr{H}_2\}$ 的非零子 * 表示 $\{\pi_2, z\mathscr{H}_2\}$ 与 $\{\pi_1,\mathscr{H}_1\}$ 相分离。这与条件 2) 相矛盾。

3) 推导 1)：设 $z=c(p_1')=c(p_2')$，$M=\pi(A)''$，依命题 1.5.10，Mp_i' 与 Mz * 同构，$i=1,2$. 于是存在 $M_1=Mp_1'$ 到 $M_2=Mp_2'$ 上的 * 同构 Φ，使得 $\Phi(bp_1')=bp_2'$，$\forall b\in M$. 特别对任意的 $a\in A$，由于 $\pi_i(a)=\pi(a)p_i'$，因此，$\Phi(\pi_1(a))=\pi_2(a)$，即 $\pi_1\approx\pi_2$. 证毕。

命题 2.10.11 设 $\{\pi_i,\mathscr{H}_i\}$ 是 C^*-代数 A 的非退化 * 表示，$i=1,2$.

1) 如果 $\pi_1\cong\pi_2$，则 $\pi_1\approx\pi_2$；

2) 如果 π_1，π_2 都是不可约的，并且 $\pi_1\approx\pi_2$，则 $\pi_1\cong\pi_2$.

证. 1) 是显然的。今证 2). 依命题 2.10.10 的 2)，π_1 与 π_2 不是分离的。再由 π_1，π_2 的不可约性及定义 2.10.3，即见 $\pi_1\cong\pi_2$. 证毕.

命题 2.10.12 如果 $\{\pi_i,\mathscr{H}_i\}$ 是 C^*-代数 A 的因子 * 表示，$i=1,2$，则 $\pi_1\between\pi_2$ 或者 $\pi_1\approx\pi_2$. 特别当 $\{\pi_i,\mathscr{H}_i\}$ 还是不可约的，$i=1,2$，则 $\pi_1\between\pi_2$，或者 $\pi_1\cong\pi_2$.

证. 依命题 2.10.6，可设 $\pi_1\lesssim\pi_2$，于是有投影 $p'\in\pi_2(A)'$，使得 $\pi_1\cong\pi_2p'$. 但 $\pi_2(A)'$ 是因子，p' 在 $\pi_2(A)'$ 中的中心复盖只能是 1，依命题 1.5.10，$\pi_2\approx\pi_2p'$，因此，$\pi_1\approx\pi_2$. 当 π_1，π_2 还是不可约的，由命题 2.10.11 立见. 证毕.

注 本节见参考文献 [21]，[69]，[70].

§11. C^*-代数的包络 vN 代数

定义 2.11.1 设 A 是 C^*-代数，$\mathscr{S}$ 是其态空间，对每个 $\rho\in\mathscr{S}$，有 A 的循环 * 表示 $\{\pi_\rho, \mathscr{H}_\rho, \xi_\rho\}$（如命题 2.3.18）。令

$$\pi=\sum_{\rho\in\mathscr{S}}\oplus\pi_\rho,\quad \mathscr{H}=\sum_{\rho\in\mathscr{S}}\oplus\mathscr{H}_\rho$$

称它为 A 的泛表示，并记 $\bar{A}=\pi(A)''$，称为 A 的包络 vN 代数。

如果 φ 是 $\bar{A}$ 上的正规正泛函，由于 A 与 $\pi(A)$ * 同构，φ 可诱导 A 上一个正泛函。依 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 的构造，有 $\xi\in\mathscr{H}$，使得 $\varphi(\pi(a))=\langle\pi(a)\xi, \xi\rangle$，$\forall a\in A$。但 φ 是正规的，从而

$$\varphi(b)=\langle b\xi, \xi\rangle,\ \forall b\in\bar{A}.$$

由此易见，在 vN 代数 $\bar{A}$ 中，弱算子拓扑与 σ-弱算子拓扑等价，强算子拓扑与 σ-强算子拓扑等价。

现在讨论 $\bar{A}$ 与 A^{**} 间的关系。依命题 1.33，$\bar{A}$ 是 Banach 空间 $\bar{A}_*=T(\mathscr{H})/\bar{A}_\perp$ 的共轭空间，这里

$$\bar{A}_\perp=\{t\in T(\mathscr{H})\,|\,\mathrm{tr}(tb)=0,\ \forall b\in\bar{A}\}.$$

$\bar{A}_*$ 与 A^* 可以通过下面的方式实现等距同构：对任意的 $f\in\bar{A}_*$，令

$$F(a)=\pi(a)(f),\ \forall a\in A,$$

则 $F\in A^*$，并且 $\|F\|=\|f\|$；反之 A^* 的任意元 F 必有上述的形式。事实上，当 $f\in\bar{A}_*$ 时，依稠密性定理 1.6.1，$\|f\|=\sup\{|\pi(a)(f)|\,|\,a\in A,\ \|a\|\leqslant 1\}=\|F\|$。反之，设 $\rho\in\mathscr{S}$，于是 $\rho(a)=\langle\pi(a)\xi_\rho, \xi_\rho\rangle$，$\forall a\in A$。命 p_ρ 是 $\mathscr{H}$ 到 $[\xi_\rho]$ 上的一秩投影，并记 f 是 p_ρ 在 $T(\mathscr{H})/\bar{A}_*$ 中的正则映象，则

$$\pi(a)(f)=\mathrm{tr}(\pi(a)p_\rho)=\langle\pi(a)\xi_\rho, \xi_\rho\rangle=\rho(a),\ \forall a\in A.$$

因此，对 $\rho\in\mathscr{S}$ 有上述的形式。此外，A^* 是 $\mathscr{S}$ 的线性包，从而对 A^* 的任意元有所述的形式。

记前面所说的 $\bar{A}_*$ 到 A^* 上的等距同构为 π_*，即

$$\pi_*(f)(a)=\pi(a)(f),\ \forall a\in A,\ f\in\bar{A}_*,$$

于是 $(\pi_*)^*$ 是 A^{**} 到 $\bar{A}$ 上的等距同构. 如果把 A 正则地嵌入 A^{**} 之中，则对任意的 $a\in A$，

$$(\pi_*)^*(a)(f)=\pi_*(f)(a)=\pi(a)(f),\ \forall f\in\bar{A}_*.$$

所以，$(\pi_*)^*(a)=\pi(a)$，即 $(\pi_*)^*$ 正是 A 到 $\pi(A)$ 上 $*$ 同构 π 的扩张. 由此，我们将简单地写 $(\pi_*)^*=\pi$. 通过上面的讨论，我们有

定理 2.11.2 设 A 是 c^*-代数，则 A 的二次共轭空间 A^{**} 与 A 的包络 vN 代数 $\bar{A}$ 等距同构. 从而可以在 A^{**} 中引入乘法与 $*$ 运算，使得 A^{**} 也成为 c^*-代数，并且以 A 为它的 c^*-子代数. 此外，如果 A 有单位元，则它也是 A^{**} 的单位元.

在上面讨论中，A^{**} 中的乘法与 $*$ 运算是通过 $\bar{A}$ 转嫁而来的. 现在我们设法直接借助于 A^* 与 A 表达出来.

定理 2.11.3 设 A 是 c^*-代数. 在 A^{**} 中定义 $*$ 运算

$$X^*(F)=\overline{X(F^*)},\quad F^*(a)=\overline{F(a^*)}$$

及乘法 (Arens 乘积)

$$XY(F)=X([Y,F]),\ [Y,F](a)=Y(L_aF),$$
$$(L_aF)(b)=F(ab)$$

$\forall X,\ Y\in A^{**},\ F\in A^*,\ a,b\in A$，则 A^{**} 中的这个 $*$ 运算与乘法正是由 $\bar{A}$ 转嫁而来的.

证. 设 $\bar{A}$, $\bar{A}_*$, $\bar{A}_\perp$ 意义均如前面，π_* 是 $\bar{A}_*$ 到 A^* 上的等距同构，$(\pi_*)^*=\pi$ 是 A^{**} 到 $\bar{A}$ 上的等距同构.

对任意的 $X\in A^{**}$，可取网 $\{x_l\}\subset A$，使得 $x_l\xrightarrow{\sigma(A^{**},A^*)}X$. 依 A^{**} 中 $*$ 的定义，易见 $x_l^*\xrightarrow{\sigma(A^{**},A^*)}X^*$. 但 $\pi=(\pi_*)^*$ 是 $\sigma(A^{**},A)-\sigma(\bar{A},\bar{A}_*)$ 连续的，因此，

$$\pi(X^*)=\pi(X)^*,\ \forall X\in A^{**}.$$

设 $f(\in\bar{A}_*)$ 是 $t(\in T(\mathscr{H}))$ 在 $T(\mathscr{H})/\bar{A}_\perp$ 中的正则映象，$a\in A$，令 L_af 是 $t\pi(a)(\in T(\mathscr{H}))$ 在 $T(\mathscr{H})/\bar{A}_\perp$ 中的正则映象. 于是

$$(L_a\pi_*(f))(b)=\pi_*(f)(ab)=\pi(ab)(f)$$

$$= \mathrm{tr}(tab) = \pi(b)(L_a f),$$

$\forall b\in A$，所以，$L_a\pi_*(f)=\pi_*(L_a f)$. 如果 $Y\in A^{**}$，由于

$$\begin{aligned}[Y, \pi_*(f)](a) &= Y(L_a\pi_*(f)) = Y(\pi_*(L_a f)) \\ &= \pi(Y)(L_a f) = \mathrm{tr}(\pi(Y)t\pi(a)) \\ &= \pi(a)(g) = \pi_*(g)(a),\end{aligned}$$

$\forall a\in A$，这里 g 是 $\pi(Y)t(\in T(\mathscr{H}))$ 在 $T(\mathscr{H})/\bar{A}_\perp$ 中的正则映象，因此，$[Y, \pi_*(f)]=\pi_*(g)$. 又若 $X\in A^{**}$，则

$$\begin{aligned}\pi(XY)(f) &= XY(\pi_*(f)) = X([Y, \pi_*(f)]) \\ &= X(\pi_*(g)) = \pi(X)(g) \\ &= \mathrm{tr}(\pi(X)\pi(Y)t) = (\pi(X)\pi(Y))(f),\end{aligned}$$

$\forall f\in \bar{A}_*$，所以，$\pi(X)\pi(Y)=\pi(XY)$，$\forall X, Y\in A^{**}$. 证毕.

命题 2.11.4 设 A 是 c^*-代数，B 是 A 的 c^*-子代数，则 B^{**}（作为 c^*-代数）$*$ 同构于 B 在 A^{**} 中的 $\sigma(A^{**}, A^*)$ 闭包 $\bar{B}^\sigma$.

证. 对任意的 $X\in B^{**}$，令 $\Phi(X)(F)=X(F|B)$，$\forall F\in A^*$，于是，Φ 是 B^{**} 到 $\bar{B}^\sigma$ 上的等距线性同构，再依定理 2.11.3，容易验证 Φ 将保持 $*$ 与乘法运算. 证毕.

注 本节见参考文献 [45]，[108]，[112].

§ 12. c^*-代数的公理

§ 12.1 c^*-代数的单位球

命题 2.12.1 设 A 是有单位元的 c^*-代数，$S=\{a\in A\mid \|a\|\leqslant 1\}$ 是 A 的单位球，$A_u=\{v\in A\mid v^*v=vv^*=1\}$ 是 A 的酉元全体，则 $S=\overline{CoA_u}$，即 S 是 A_u 的凸闭包.

证. 设 $a\in A$，$\|a\|<1$，于是

$$f(a, \lambda)=(1-aa^*)^{-\frac{1}{2}}(1+\lambda a),$$

对每个 $|\lambda|=1$ 在 A 中是可逆的. 由于

$$a^*(1-aa^*)^{-1}=a^*\sum_{n=0}^{\infty}(aa^*)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a^*a)^n a^* = (1 - a^*a)^{-1}a^*,$$

于是

$$\begin{aligned} f(a,\lambda)^*f(a,\lambda) + 1 &= (1 + \bar{\lambda}a^*)(1 - aa^*)^{-1}(1 + \lambda a) + 1 \\ &= (1 - aa^*)^{-1} + \bar{\lambda}a^*(1 - aa^*)^{-1} \\ &\quad + \lambda(1 - aa^*)^{-1}a \\ &\quad + [a^*(1 - aa^*)^{-1}a + 1] \\ &= (1 - aa^*)^{-1} + \bar{\lambda}(1 - a^*a)^{-1}a^* \\ &\quad + \lambda(1 - aa^*)^{-1}a \\ &\quad + (1 - a^*a)^{-1}, \ \forall|\lambda| = 1. \end{aligned}$$

当 a 代以 a^*, λ 代以 $\bar{\lambda}$ 时，此式不变，因此，

$$f(a,\lambda)^*f(a,\lambda) = f(a^*,\bar{\lambda})^*f(a^*,\bar{\lambda}), \ \forall|\lambda| = 1.$$

从而，

$$u_\lambda = f(a,\lambda)f(a^*,\bar{\lambda})^{-1} \in A_u, \ \forall|\lambda| = 1.$$

今命

$$u(\lambda) = (1 - aa^*)^{-\frac{1}{2}}(\lambda + a)(1 + \lambda a^*)^{-1}(1 - a^*a)^{\frac{1}{2}},$$

它是取值于 A 的在 $|\lambda| \leqslant 1$ 中解析的函数，并且，$u(\lambda) = \lambda u_\lambda \in A_u$, $\forall|\lambda| = 1$. 此外，$u(0) = a$，于是

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} \frac{u(\lambda)}{\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta \\ &= \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(e^{2\pi ki/n}), \end{aligned}$$

已经指出 $u(\lambda) \in A_u$, $\forall|\lambda| = 1$，因此，$a \in \overline{CoA_u}$。证毕。

定理 2.12.2 设 A 是有单位元的 c^*-代数，S 是它的单位球，则 $Co\{e^{ih} | h^* = h \in A\}$ 在 S 中稠。

证。设 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 A 的泛表示，$\bar{A}$ 是 A 的包络 vN 代数。

若 u 是 $\bar{A}$ 的酉元，依谱分解

$$u=\int_0^{2\pi} e^{i\theta}dp(\theta)=\lim_n \sum_{k=1}^n e^{2\pi ki/n}$$
$$\cdot\left[p\left(\frac{2\pi k}{n}\right)-p\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}\right)\right]$$
$$=\lim_n \exp\left(i\sum_{k=1}^n \frac{2\pi k}{n}p_k^{(n)}\right),$$

这里 $p_k^{(n)}=p\left(\frac{2\pi k}{n}\right)-p\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}\right)$ 是 $\overline{A}$ 的投影，因此，依命题2.12.1，$Co\{e^{ih}|h=h^*\in\overline{A}\}$ 在 $\overline{A}$ 的单位球中依一致拓扑是稠的。

又依稠密性定理 1.6.1，$Co\{\pi(e^{ih})|h=h^*\in A\}$ 在 $\overline{A}$ 的单位球中是强算子稠的，当然更在 $\pi(S)$ 中强算子稠.

今若 $Co\{e^{ih}|h=h^*\in A\}$ 不在 S 中稠，于是有 $a\in S$ 及 $f\in A^*$，使得

$$\sup\{\mathrm{Re}\,f(e^{ih})|h^*=h\in A\}<\mathrm{Re}\,f(a)$$

另一方面，依上面所证，有网 $\{a_l\}\subset Co\{e^{ih}|h^*=h\in A\}$，使得 $\pi(a_l)\xrightarrow{\text{强算子}}\pi(a)$. 对任意的 $\rho\in\mathscr{S}$，则

$$\rho(a_l)=\langle\pi(a_l)\xi_\rho,\xi_\rho\rangle\to\langle\pi(a)\xi_\rho,\xi_\rho\rangle=\rho(a)$$

但 A^* 是 $\mathscr{S}$ 的线性包，因此，$f(a_l)\to f(a)$. 这便与 $\sup\{\mathrm{Re}\,f(e^{ih})|h^*=h\in A\}<\mathrm{Re}\,f(a)$ 相矛盾. 证毕.

定理 2.12.3 设 A 是有单位元的 c^*-代数，则

$$\|a\|=\inf\left\{\sum_j|\lambda_j|\,\Big|\,a=\sum_j\lambda_je^{ih_j},\ \text{这里}\ h_j^*=h_j,\forall j\right\},\ \forall a\in A.$$

证. 记右端的数为 $\|a\|_1$，显然，$\|a\|_1\geqslant\|a\|$.

对任意的 $a^*=a\in A$，$\|a\|\leqslant 1$，$v_\pm=a\pm i(1-a^2)^{1/2}\in A_u$. 由于 $\sigma(a)\subset[-1,1]$，因此 $\sigma(v_\pm)\subseteq\{\lambda||\lambda|=1\}$. 从而，存在 $h_\pm^*=h_\pm\in A$，使得 $v_\pm=\exp(ih_\pm)$. 所以，

$$a=\frac{1}{2}v_++\frac{1}{2}v_-\in Co\{e^{ih}|h^*=h\in A\}.$$

今若 $x\in A$，$\|x\|\leqslant\frac{1}{2}$，依上面的讨论，$(x+x^*)$ 及 $i(x-x^*)$

均 $\in Co\{e^{ih}|h^*=h\in A\}$. 但可写 $x-x^*=e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot i(x-x^*)$,因此,$(x-x^*)\in Co\{e^{ih}|h^*=h\in A\}$. 于是可知

$$\frac{1}{2}S\subset Co\{e^{ih}|h^*=h\in A\},$$

这里 S 是 A 的单位球。由此

$$\|a\|\leqslant\|a\|_1\leqslant 2\|a\|,\ \forall a\in A,$$

对 A 的任意非零元 a, 依定理 2.12.2, 有列 $\{a_n\}\subset Co\{e^{ih}|h^*=h\in A\}$, 使得 $\|a_n-\|a\|^{-1}a\|\to 0$. 于是, $\|a_n-\|a\|^{-1}a\|_1\to 0$, 但显然有 $\|a_n\|_1\leqslant 1$, 从而, $\|\|a\|^{-1}a\|_1\leqslant 1$, 即 $\|a\|_1\leqslant\|a\|$. 所以, $\|a\|=\|a\|_1$, $\forall a\in A$. 证毕.

命题 2.12.4 设 A 是有单位元的 c^*-代数, S 是 A 的单位球, $\mathring{S}=\{a\in A\,|\,\|a\|<1\}$, 则

$$\mathring{S}\subset Co\{e^{ih}|h^*=h\in A\}\subset S.$$

证。设 $a\in\mathring{S}$, 依定理 2.12.3, 可写 $a=\sum_j\lambda_j e^{ih_j}$, 这里 $h_j^*=h_j$, $\lambda_j>0$, $\forall j$, 并且 $\sum_j\lambda_j<1$. 于是

$$a=\left(\sum_j\lambda_j e^{ih_j}+\frac{1-\sum_j\lambda_j}{2}e^{i\cdot 0}+\frac{1-\sum_j\lambda_j}{2}e^{i\cdot\pi}\right)$$
$$\in Co\{e^{ih}|h^*=h\in A\}.$$

证毕.

定理 2.12.5 设 A 是有单位元的 c^*-代数, B 是赋范线性空间, Φ 是 A 到 B 中的有界线性算子, 则 $\|\Phi\|=\sup\{\|\Phi(e^{ih})\|\,|\,h^*=h\in A\}$.

证。依命题 2.12.4,

$$\|\Phi\|=\sup_{\|a\|<1}\|\Phi(a)\|$$
$$=\sup\left\{\left\|\sum_j\lambda_j\Phi(e^{ih_j})\right\|\,\middle|\,\begin{matrix}h_j^*=h_j,\ \lambda_j>0,\ \forall j,\\ \sum_j\lambda_j=1\end{matrix}\right\}$$
$$\leqslant\sup\{\|\Phi(e^{ih})\|\,|\,h^*=h\in A\}\leqslant\|\Phi\|.$$

证毕.

§12.2 严格正元

定义 2.12.6 设 A 是 c^*-代数，$\mathscr{S}$ 是它的态空间，$a\in A_+$ 称为严格正的，指 $\rho(a)>0$, $\forall\rho\in\mathscr{S}$.

如果 A 有单位元，依命题 2.3.13，$a\in A_+$ 是严格正的，当且仅当，a 在 A 中有逆.

引理 2.12.7 设 a 是 A 的严格正元，$\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 A 的非退化 $*$ 表示，则 $\pi(a)\mathscr{H}$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠.

证. 若有 $\xi\in\mathscr{H}$, $\|\xi\|=1$, 使得 $\langle\pi(a)\eta,\xi\rangle=0$, $\forall\eta\in\mathscr{H}$. 令 $\rho(\cdot)=\langle\pi(\cdot)\xi,\xi\rangle$, 则 $\rho\in\mathscr{S}$. 但 $\rho(a)=0$, 与 a 严格正相矛盾. 因此 $\pi(a)\mathscr{H}$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠. 证毕.

定理 2.12.8 设 A 是 c^*-代数，则 A 至少有一个严格正元，当且仅当，A 有逼近单位元 $\{d_n\}_{n=1}^\infty$，并且 $d_nd_m=d_md_n$, $\forall n,m$.

证. 若满足要求的 $\{d_n\}$ 存在，令 $a=\sum\limits_n 2^{-n}d_n$. 对任意的 $\rho\in\mathscr{S}$, 依命题 2.4.4, $\rho(d_n)\to1$, 因此, $\rho(a)>0$, 即 a 是严格正元.

反之设 A 有严格正元 a, 无妨设 $\|a\|=1$. 令 $d_n=a^{\frac{1}{n}}$, 自然 $d_nd_m=d_md_n$, $d_m\geqslant d_n$, $\|d_n\|=1$, $\forall m\geqslant n$. 今只须对任意的 $x\in A_+$, 证明

$$\|xd_n-x\|\to0.$$

令 $z_n=x-x^{\frac{1}{2}}d_nx^{\frac{1}{2}}$, 易见 $z_n\geqslant z_m\geqslant0$, $\forall m\geqslant n$. 记

$$\Omega=\{\rho\in A^*|\rho\geqslant0,\ \|\rho\|\leqslant1\}$$

它是 A^* 的 $\sigma(A^*,A)$ 紧子集. 令 $z_n(\rho)=\rho(z_n)$, 则 $z_n(\cdot)\in C(\Omega)$, 并且 $z_1(\cdot)\geqslant\cdots\geqslant z_n(\cdot)\geqslant\cdots$. 我们说

$$\lim_n z_n(\rho)=0,\ \forall\rho\in\Omega$$

事实上，$\rho\in\Omega$ 可以产生 A 的循环 $*$ 表示 $\{\pi_\rho,\mathscr{H}_\rho,\xi_\rho\}$, 于是,
$z_n(\rho)=\langle\pi_\rho(z_n)\xi_\rho,\xi_\rho\rangle=\langle\pi_\rho(x)\xi_\rho,\xi_\rho\rangle-\langle\pi_\rho(x^{\frac{1}{2}}d_nx^{\frac{1}{2}})\xi_\rho,\xi_\rho\rangle.$

依引理 2.12.7，$\pi_\rho(a)\mathscr{H}_\rho$ 在 $\mathscr{H}_\rho$ 中稠．又 $a^{1+\frac{1}{n}}\to a$，从而 $\pi_\rho(d_n)\xrightarrow{\text{强算子}}1$．进而 $z_n(\rho)\to 0$，$\forall\rho\in\Omega$．再由 Dini 定理，$\max\{z_n(\rho)|\rho\in\Omega\}\to 0$．再由系 2.3.14，$\|z_n\|\to 0$，即 $x^{\frac{1}{2}}d_nx^{\frac{1}{2}}\to x$．从而

$$\|xd_n-x\|^2=\|(1-d_n)x\|^2\leqslant 4\|x\|\cdot\|(1-d_n)^{1/2}x^{1/2}\|^2$$
$$=4\|x\|\cdot\|x^{1/2}(1-d_n)x^{1/2}\|\to 0.$$

证毕．

定理 2.12.9 若 A 是可分的 c^*-代数，则 A 至少有一个严格正元．

证．设 $\{x_n\}$ 是 $A_+\cap S$ 中的可数稠集，这里 S 是 A 的单位球，并令 $a=\sum\limits_n 2^{-n}x_n$．对任意的 $\rho\in\mathscr{S}$，至少有一个 n，使得 $\rho(x_n)>0$，因此，$\rho(a)>0$，即 a 是 A 的严格正元．证毕．

命题 2.12.10 若 A 有一个严格正元，则严格正元全体在 A_+ 中是稠的．

证．设 a 是 A 的严格正元，对任意的 $b\in A_+$，则 $\left(b+\frac{1}{n}a\right)$ 也是严格正元，并且 $\left(b+\frac{1}{n}a\right)\to b$．证毕．

§12.3 Banach * 代数

定义 2.12.11 A 称为 Banach * 代数，指 A 是复 Banach 代数，并且其中定义 * 运算，满足

$$(\lambda x+\mu y)^*=\bar{\lambda}x^*+\bar{\mu}y^*,\ (xy)^*=y^*x^*,\ (x^*)^*=x,$$

$\forall x,y\in A$，$\lambda,\mu\in\mathbb{C}$．

A 中的 * 运算称为厄米的，指对任意的 $h^*=h\in A$，$\sigma(h)\subset\mathbb{R}$．

A 的元 a 称为正的，记作 $a\geqslant 0$，指 $a^*=a$，并且 $\sigma(a)$ 由非负实数组成．此外，$a\geqslant b$，指 $(a-b)\geqslant 0$．

引理 2.12.12 设 A 是有单位元的 Banach * 代数，B 是 A 的极大交换的 * 子代数，则 B 是闭的，并且 $\sigma_B(b)=\sigma_A(b)$，$\forall b\in B$．

证．设 $x_n\in B$，并且 $x_n\to x$．由于 $x_ny=yx_n$，$\forall n$ 及

$y\in B$，因此，$xy=yx$，$\forall y\in B$． B是$*$子代数，于是 $x^*y=yx^*$，$\forall y\in B$．此外，由于 $x_nx^*=x^*x_n$，$\forall n$，所以，$x^*x=xx^*$．今B是极大交换的$*$子代数，所以，$x\in B$，即B是闭的．

若 $b\in B$，$\lambda\in \mathbf{C}$，使得 $(b-\lambda)^{-1}$ 在A中存在．易见$\{(x-\lambda)^{-1},(x^*-\bar{\lambda})^{-1},B\}$ 又可生成交换$*$子代数，但B是极大交换的$*$子代数，所以，$(x-\lambda)^{-1}\in B$．这说明 $\sigma_A(b)=\sigma_B(b)$，$\forall b\in B$．证毕．

引理 2.12.13 设A是交换的 Banach$*$代数，有单位元且半单纯，则$*$运算是连续的．

证．设Ω是A的谱空间，对任意的$\rho\in\Omega$，定义$\rho^*(a)=\overline{\rho(a^*)}$，$\forall a\in A$，易见$\rho^*$仍然是$A$上的非零乘法泛函，即$\rho^*\in\Omega$．

今设 $\|x_n-x\|\to 0$，$\|x_n^*-y\|\to 0$，于是

$$\begin{aligned}|\rho(x-y^*)|&\leqslant|\rho(x_n-x)|+|\rho(x_n-y^*)|\\&=|\rho(x_n-x)|+|\rho^*(x_n^*-y)|\\&\leqslant\|x_n-x\|+\|x_n^*-y\|\to 0,\end{aligned}$$

$\forall\rho\in\Omega$．由于A是半单纯的，所以，$x=y^*$．这说明$*$运算在实 Banach 空间A中是闭线性算子，因此，$*$运算是连续的．证毕．

定理 2.12.14 设A是有单位元的 Banach$*$代数，$a\in A$，$a\geqslant 0$，并且a在A中有逆，则存在 $u\in A$，$u\geqslant 0$，u在A中有逆，使得 $u^2=a$，并且u属于A的任何包含a的极大交换$*$子代数．

证．设B是A的包含a的任意极大交换$*$子代数．

无妨设 $\|a\|<1$，于是 $\nu(1-a)<1$． 注意复函数 $(1+z)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_nz^n$ 在 $|z|<1$ 中解析，以及存在n_0，$\varepsilon\in(0,1)$，使得 $\|(a-1)^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant 1-\varepsilon$，$\forall n\geqslant n_0$，因此，

$$a_k=\sum_{n=0}^{k}\lambda_n(a-1)^n\to u+iv.$$

这里 $u^*=u$，$v^*=v$． 自然 $a_k\in B$，$\forall k$，依引理 2.12.12，$u+iv\in B$．B是$*$子代数，于是 $u,v\in B$，特别，$uv=vu$．此外，由

于 $(u+iv)^2=a$ 及 $a^*=a$，从而

$$a=u^2-v^2,\ uv=0.$$

如果 R 是 B 的根基(即 B 的所有极大理想的交)，由于 B 的极大理想的 $*$ 映象仍然是 B 的极大理想，所以，$R^*=R$. 从而，B/R 是有单位元的、半单纯的交换 Banach $*$ 代数. 依引理 2.12.13，$*$ 运算在 B/R 中是连续的. 如果 $b\to\tilde{b}$ 是 B 到 B/R 上的正则映象，则

$$(\widetilde{a_k-u})^*=(\widetilde{a_k-u})\to i\tilde{v}=(i\tilde{v})^*,$$

因此，$\tilde{v}=0$，即 $v\in R$.

若 $0\in\sigma(u)$，依引理 2.12.12，有 B 上的非零乘法泛函 ρ，使得 $\rho(u)=0$. 于是由 $v\in R$，$\rho(a)=0$. 这与 a 在 A 中有逆(依引理 2.12.12，a 在 B 中也有逆)相矛盾. 因此，u 在 A 中有逆，且 $u^{-1}\in B$. 进而，$v=u^{-1}uv=0$，$a=u^2$.

对于 B 上任意的非零乘法泛函 ρ，$\lambda=\rho(a)\in(0,1)$，于是

$$\rho(a_k)=\sum_{n=0}^{k}\lambda_n(\lambda-1)^n\to(1+(\lambda-1))^{1/2}=\lambda^{1/2}\geqslant 0.$$

所以，$\rho(u)=\lim\limits_{k}\rho(a_k)\geqslant 0$. 再依引理 2.12.12，可见 $\sigma(u)$ 由非负实数组成，因此，$u\geqslant 0$. 证毕.

定理 2.12.15 设 A 是 Banach $*$ 代数，并且 $*$ 运算是厄米的，如果 $a,b\in A$，$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$. 则 $(a+b)\geqslant 0$.

证. 无妨设 A 有单位元.

第一步建立不等式

$$\nu(x)\leqslant\nu(x^*x)^{\frac{1}{2}},\ \forall x\in A.$$

事实上，对 $x\in A$ 及任意的 $\varepsilon>0$，令 $y=(\nu(x^*x)+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}x$，则 $\nu(y^*y)<1$. 由于 $*$ 运算厄米，$1-y^*y\geqslant 0$，并且 $(1-y^*y)$ 在 A 中有逆. 依定理 2.12.14，有 $w\geqslant 0$，并且 w^{-1} 存在，使得 $w^2=1-y^*y$. 注意等式

$$(1+y^*)(1-y)=w[1+w^{-1}(y^*-y)w^{-1}]w,$$

由于 $w^{-1}(y^*-y)w^{-1}$ 的谱为纯虚数所组成，因此等式右端的元

有逆，即 $(1-y)$ 有左逆.

今设 $\lambda\in\sigma(y)$，并且 $|\lambda|=\nu(y)>1$. 由于 $\nu(y^*y)<1$，因此，$1-|\lambda|^{-2}y^*y\geqslant 0$，并且有逆. 仿照上面可证 $(1-\lambda^{-1}y)$ 有左逆(代替 y 以 $\lambda^{-1}y$ 来考虑). 设 z 是 $(y-\lambda)$ 的左逆. 由于 λ 是 $\sigma(y)$ 的边界点，可取 y 的正则点列 $\lambda_n\to\lambda$，于是 $\|(y-\lambda_n)^{-1}\|\to+\infty$. 从而

$$
\begin{aligned}
1&=\|z(y-\lambda)(y-\lambda_n)^{-1}\|\cdot\|(y-\lambda_n)^{-1}\|^{-1}\\
&=\|z+(\lambda_n-\lambda)z(y-\lambda_n)^{-1}\|\cdot\|(y-\lambda_n)^{-1}\|^{-1}\\
&\leqslant\|z\|\cdot\|(y-\lambda_n)^{-1}\|^{-1}+|\lambda_n-\lambda|\cdot\|z\|\to 0,
\end{aligned}
$$

这不可能. 因此，$\nu(y)\leqslant 1$，即 $\nu(x)\leqslant(\nu(x^*x)+\varepsilon)^{1/2}$. $\varepsilon>0$ 是任意的，所以，$\nu(x)\leqslant\nu(x^*x)^{\frac{1}{2}}$，$\forall x\in A$.

第二步证明对任意的 $h^*=h$，$k^*=k\in A$，有

$$\nu(hk)\leqslant\nu(h)\nu(k).$$

事实上，由第一步

$$
\begin{aligned}
\nu(hk)^2&\leqslant\nu(kh^2k)=\lim_n\|(kh^2k)^n\|^{\frac{1}{n}}\\
&=\lim_n\|k(h^2k^2)^{n-1}h^2k\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\nu(h^2k^2).
\end{aligned}
$$

一般有

$$\nu(hk)\leqslant\nu(h^{2^n}k^{2^n})^{1/2^n}\leqslant\|h^{2^n}\|^{1/2^n}\cdot\|k^{2^n}\|^{1/2^n}.$$

令 $n\to+\infty$，即见 $\nu(hk)\leqslant\nu(h)\nu(k)$.

最后证明定理. 设 $a,b\in A$，$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$. 注意

$$
\begin{aligned}
1+a+b&=(1+a)(1+b)-ab\\
&=(1+a)(1-uv)(1+b).
\end{aligned}
$$

这里 $u=(1+a)^{-1}a$，$v=b(1+b)^{-1}$. 显然，$\nu(u)<1$，$\nu(v)<1$，于是依第二步，$\nu(uv)<1$，所以，$(1+a+b)$ 有逆，即 $-1\notin\sigma(a+b)$. 如果 $\lambda>0$，同样 $-1\notin\sigma\left(\frac{a}{\lambda}+\frac{b}{\lambda}\right)$，即 $-\lambda\notin\sigma(a+b)$. 又 $*$ 运算是厄米的，因此，$\sigma(a+b)$ 由非负实数构成，即 $(a+b)\geqslant 0$. 证毕.

定理 2.12.16 设 A 是 Banach $*$ 代数，则 $*$ 运算是厄米的，必

须且只须，$a^*a \geq 0$，$\forall a \in A$。

证. 充分性. 若 $h^* = h$ 有非实数的谱，则 $h^2 = h^*h$ 将有非实数或负实数的谱，这与 $h^*h \geq 0$ 相矛盾. 因此，* 运算是厄米的。

反之，设 * 运算是厄米的，这时也无妨设 A 有单位元. 对任意的 $a \in A$ 及 $\varepsilon > 0$，显然 $(a^*a)^2 + \varepsilon \geq 0$，并且有逆. 于是依定理 2.12.14，有 $u \geq 0$，使得

$$u^2 = (a^*a)^2 + \varepsilon, \tag{1}$$

设 B 是 A 的包含 a^*a 的极大交换 * 子代数，由定理 2.12.14，$u \in B$. 记

$$h = \frac{1}{2}(u + a^*a),\ k = \frac{1}{2}(u - a^*a). \tag{2}$$

显然，$h - k = a^*a$，$hk = kh = \frac{1}{4}\varepsilon$. 如果 Ω 是 B 的谱空间，由于 $\rho(u) = (\rho(a^*a)^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} > |\rho(a^*a)|$，$\forall \rho \in \Omega$，因此

$$h \geq 0,\ k \geq 0. \tag{3}$$

如果有 $\rho_0 \in \Omega$，使得 $\rho_0(a^*a) = -1$，由 (1)，(2)

$$\rho_0((ak)^*(ak)) = -\rho_0(k)^2 = \frac{-1}{4}(1 + \sqrt{1 + \varepsilon})^2 < -1, \tag{4}$$

取 $0 < \varepsilon < 2\nu(a^*a)^{-1}$，由 (1)，(2)，(3)

$$\begin{aligned}(ak)^*(ak) &= k(h - k)k \leq khk = \frac{\varepsilon}{4}k \leq \frac{\varepsilon}{4}\nu(k) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{8}(\nu(u) + \nu(a^*a)) < \frac{3}{4}. \end{aligned}\tag{5}$$

另一方面，由定理 2.12.15，$(ak)^*(ak) + (ak)(ak)^* = 2(h_1^2 + h_2^2) \geq 0$，这里 $h_1^* = h_1$，$h_2^* = h_2$，使得 $ak = h_1 + ih_2$. 于是

$$\begin{aligned}&(ak)^*(ak) + \max\{\lambda \mid \lambda \in \sigma((ak)(ak)^*)\} \\ &= [(ak)^*(ak) + (ak)(ak)^*] \\ &\quad + [\max\{\lambda \mid \lambda \in \sigma((ak)(ak)^*)\} \\ &\quad - (ak)(ak)^*] \geq 0.\end{aligned}$$

从而

$$\min\{\lambda \mid \lambda\in\sigma((ak)^*(ak))\}\geqslant-\max\{\lambda\mid\lambda\in\sigma((ak)(ak)^*)\}$$

再由引理 2.2.6，可见

$$\min\{\lambda\mid\lambda\in\sigma((ak)^*(ak))\}$$
$$\geqslant-\max\{\lambda\mid\lambda\in\sigma((ak)^*(ak))\}. \tag{6}$$

今由 (4), (5), (6)

$$-1>\rho_0((ak)^*(ak))\geqslant\min\{\lambda\mid\lambda\in\sigma((ak)^*(ak))\}$$
$$\geqslant-\max\{\lambda\mid\lambda\in\sigma((ak)^*(ak))\}>-\frac{3}{4}$$

矛盾. 所以，$-1\notin\sigma(a^*a)$. 如果$\lambda>0$, 同样 $-1\notin\sigma((\lambda^{-\frac{1}{2}}a)^*\cdot(\lambda^{-\frac{1}{2}}a))$, 即 $-\lambda\notin\sigma(a^*a)$. 因此，$a^*a\geqslant0$, $\forall a\in A$. 证毕.

§ 12.4 c*-等价的代数

定义 2.12.17 设A是有单位元的 Banach*代数，A上的线性泛函ρ称为态，指

$$\rho(1)=1,\ \rho(a)\geqslant0,\ \forall a\in A \text{ 并且 } a\geqslant0.$$

如果还假定A中的*运算是厄米的，对于$h^*=h$，由于$\|h\|+h\geqslant0$，所以，$\rho(h)\in\mathbf{R}$. 由此，$\rho(a^*)=\overline{\rho(a)}$, $\forall a\in A$. 此外，由于定理 2.12.16，可见 Schwartz 不等式也是成立的，即

$$|\rho(b^*a)|^2\leqslant\rho(a^*a)\rho(b^*b),\ \forall a,b\in A.$$

引理 2.12.18 设A是有单位元的 Banach*代数，并且*运算是厄米的，$h^*=h\in A$，则对每个 $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$，这里 $\lambda_1=\min\{\mu\mid\mu\in\sigma(h)\}$，$\lambda_2=\max\{\mu\mid\mu\in\sigma(h)\}$，存在$A$上的态$\rho$，使得 $\rho(h)=\lambda$.

证. 在A的线性子空间 $[1,h]$ 上定义

$$\rho(\alpha+\beta h)=\alpha+\beta\lambda,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbf{C}.$$

如果 $\alpha+\beta h\geqslant0$，特别，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，于是数 $(\alpha+\beta\lambda)$ 介于 $(\alpha+\beta\lambda_1)$ 与 $(\alpha+\beta\lambda_2)$ 之间. 但 $(\alpha+\beta\lambda_j)\in\sigma(\alpha+\beta h)$，因此 $(\alpha+\beta\lambda_j)\geqslant0$，$j=1,2$，从而 $(\alpha+\beta\lambda)\geqslant0$.

其余的证明，由于*运算是厄米的以及定理 2.12.15，完全与

命题 2.3.11 相似。证毕。

引理 2.12.19 设 Δ 是复平面 $\mathbf{C}$ 的包含 0 的紧子集，$\lambda\in\mathbf{C}$，则

$$\max\{|\mu+\lambda|\,|\,\mu\in\Delta\}\geqslant\frac{1}{3}[\max\{|\mu|\,|\,\mu\in\Delta\}+|\lambda|].$$

证。由于 $|\mu+\lambda|\geqslant|\mu|-|\lambda|$，于是

$$\max\{|\mu+\lambda|\,|\,\mu\in\Delta\}\geqslant\max\{|\mu|\,|\,\mu\in\Delta\}-|\lambda|.$$

又 $0\in\Delta$，$2\max\{|\mu+\lambda|\,|\,\mu\in\Delta\}\geqslant2|\lambda|$。将这两个不等式相加，即得证。

引理 2.12.20 设 A 是 Banach $*$ 代数，并且有正常数 C，使得 $C\|h\|\leqslant\nu(h)$，$\forall h^*=h\in A$，则 A 中的 $*$ 运算是连续的。

证。设 $H=\{a\in A\,|\,a^*=a\}$，对任意的 $h\in\overline{H}$，有 $h_n\in H$，$\|h_n-h\|\to0$。于是对任意的 $\varepsilon>0$，当 n 充分大，$\nu(h)+\varepsilon\geqslant\nu(h_n)\geqslant C\|h_n\|$。由此可见

$$\nu(h)\geqslant C\|h\|,\ \forall h\in\overline{H}. \tag{1}$$

今设 $h_n\in H$，$h_n\to k$，且 $k^*=-k$。由于 $(h_m+h_n)^2\in H$，$(h_m+h_n)^2\xrightarrow{m}(k+h_n)^2$，依 (1)，

$$\begin{aligned}C\|(k+h_n)^2\|&\leqslant\nu((k+h_n)^2)=\nu(k+h_n)^2\\&=\nu((k+h_n)^*)^2=\nu(-k+h_n)^2\\&\leqslant\|h_n-k\|^2\to0,\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}\|k^2+h_n^2\|&=\frac{1}{2}\|(k+h_n)^2+(k-h_n)^2\|\\&\leqslant\frac{1}{2}(\|(k+h_n)^2\|+\|k-h_n\|^2)\to0.\end{aligned}$$

进而，$2\|k^2\|\leqslant\|k^2+h_n^2\|+\|k^2-h_n^2\|\to0$。再由 (1)，

$$0=\|k^2\|\geqslant\nu(k^2)=\nu(k)^2\geqslant C^2\|k\|^2.$$

从而 $k=0$。这说明 $H=\overline{H}$，所以，A 中的 $*$ 运算是连续的。证毕。

定义 2.12.21 Banach $*$ 代数 A 称为 c^*-等价的，指可以赋予 A 一个新范数 $\|\cdot\|_1$，它与原来的范数 $\|\cdot\|$ 等价，并且，$(A,\|\cdot$

$\|_1$)是 c^*-代数.

定理 2.12.22 设 A 是 Banach * 代数，并且 * 运算是厄米的，又设有正常数 C，使得

$$C\|h\| \leqslant \nu(h), \ \forall h^* = h \in A,$$

则 A 是 c^*-等价的。

证. 如果 A 无单位元，考虑 Banach * 代数 $A \dotplus \mathbb{C}$，其 * 运算自然也是厄米的. 如果 $(h+\lambda)^* = h+\lambda$，这里 $h \in A$，$\lambda \in \mathbb{C}$，于是 $h^* = h$，$\bar{\lambda} = \lambda$. 由于 A 无单位元，$0 \in \sigma(h)$. 于是由引理 2.12.19 及 $C \leqslant 1$，

$$\begin{aligned}\nu(h+\lambda) &= \max\{|\mu+\lambda| \,|\, \mu \in \sigma(h)\} \\ &\geqslant \frac{1}{3}(\nu(h)+|\lambda|) \\ &\geqslant \frac{C}{3}(\|h\|+|\lambda|) \\ &= \frac{C}{3}\|h+\lambda\|\end{aligned}$$

因此，无妨设 A 有单位元.

依引理 2.12.20，有正常数 K，使得

$$\|a^*\| \leqslant K^2\|a\|, \ \forall a \in A.$$

如果 ρ 是 A 上的态，令 $\vartheta_\rho = \{a \in A \,|\, \rho(a^*a) = 0\}$，由于 ρ 满足 Schwartz 不等式，ϑ_ρ 是 A 的左理想. 令 $a \to a_\rho$ 是 A 到 A/ϑ_ρ 上的正则映象，在 A/ϑ_ρ 上定义内积 $\langle a_\rho, b_\rho\rangle = \rho(b^*a)$ ($\forall a, b \in A$)，依此完备化，得到 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_\rho$. 对任意的 $a \in A$，令

$$\pi_\rho(a)b_\rho = (ab)_\rho, \ \forall b \in A$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，依定理 2.12.14，有 $u^* = u$，使得

$$\|a^*a\| + \varepsilon - a^*a = u^2,$$

于是由定理 2.12.16，$b^*(\|a^*a\| + \varepsilon - a^*a)b = (ub)^*(ub) \geqslant 0$，所以，$\|a^*a\|\rho(b^*b) + \varepsilon\rho(b^*b) \geqslant \rho(b^*a^*ab)$. 但 $\varepsilon > 0$ 是任意的，因此

$$\|\pi_\rho(a)b_\rho\|^2 = \rho(b^*a^*ab) \leqslant \|a^*a\|\rho(b^*b) \leqslant K^2\|a\|^2\|b_\rho\|^2,$$

$\forall b \in A$. 于是，$\pi_\rho(a)$ 可以唯一地扩张为 $\mathscr{H}_\rho$ 中范数 $\leqslant K\|a\|$ 的算子，仍记以 $\pi_\rho(a)$，$\forall a \in A$. 这样，由 ρ 得到 A 的 $*$ 表示 $\{\pi_\rho, \mathscr{H}_\rho\}$，并且

$$\rho(a) = \langle \pi_\rho(a)1_\rho, 1_\rho\rangle, \ \forall a \in A.$$

设 $\mathscr{S}$ 是 A 上态的全体，构作 A 的泛表示

$$\pi = \sum_{\rho \in \mathscr{S}} \oplus \pi_\rho, \quad \mathscr{H} = \sum_{\rho \in \mathscr{S}} \oplus \mathscr{H}_\rho,$$

并命 $\|a\|_1 = \|\pi(a)\|$，$\forall a \in A$. 显然，$\|a\|_1 \leqslant K\|a\|$，$\forall a \in A$. 如果有 $a \in A$，使得 $\|\pi(a)\| = 0$. 设 $a = a_1 + ia_2$，这里 $a_1^* = a_1$，$a_2^* = a_2$，于是 $\pi(a_1) = \pi(a_2) = 0$. 特别，$\rho(a_1) = \rho(a_2) = 0$，$\forall \rho \in \mathscr{S}$. 今依引理 2.12.18，$\nu(a_1) = \nu(a_2) = 0$. 但 $\nu(a_j) \geqslant C \cdot \|a_j\|$，因此，$a_1 = a_2 = 0$. 这说明 $\|\cdot\|_1$ 是 A 上的范数，当然满足 $\|a^*a\|_1 = \|a\|_1^2$，$\forall a \in A$.

已经指出 $\|\cdot\|_1 \leqslant K\|\cdot\|$，因此只须证明 $\|\cdot\|$ 关于 $\|\cdot\|_1$ 是连续的. 设 $\|a_n\|_1 \to 0$，我们要证明 $\|a_n\| \to 0$. 由于 $\|a_n^*\|_1 = \|a_n\|_1$，无妨设 $a_n^* = a_n$，$\forall n$. 依引理 2.12.18，

$$\|a_n\|_1 = \sup_{\rho \in \mathscr{S}} \|\pi_\rho(a_n)\| \geqslant \nu(a_n) \geqslant C\|a_n\|, \ \forall n$$

因此，$\|a_n\| \to 0$. 证毕.

定理 2.12.23 设 A 是 Banach $*$ 代数，并且存在正常数 K，使得对 A 的任意正规元 a（指 $a^*a = aa^*$），有 $K\|a^*a\| \geqslant \|a^*\| \cdot \|a\|$，则 A 是 c^*-等价的.

证. 对任意的 $h^* = h \in A$，$K\|h^2\| \geqslant \|h\|^2$，一般

$$K^{2^n-1}\|h^{2^n}\| \geqslant \|h\|^{2^n}.$$

因此，$K\nu(h) \geqslant \|h\|$. 于是依定理 2.12.22，只须证明 A 中的 $*$ 运算是厄米的.

设 $h^* = h \in A$，依引理 2.12.20，A 中的 $*$ 运算是连续的，于是，$f(th) = e^{ith} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ith)^n}{n!}$ 是 A 的正规元，并且 $f(th)^* = f(-th)$，$\forall t \in \mathbb{R}$. 于是

$$
\begin{aligned}
K\nu(2-e^{ith}-e^{-ith}) &= K\nu(f(th)^*f(th)) \\
&\geqslant \|f(th)^*f(th)\| \\
&\geqslant K^{-1}\|f(th)^*\|\cdot\|f(th)\| \\
&\geqslant K^{-1}\nu(f(th))^2, \ \forall t\in\mathbf{R}.
\end{aligned}
$$

设 $\beta=\max\{|Im\lambda|\,|\,\lambda\in\sigma(h)\}$，由于 $\sigma(h)=\overline{\sigma(h)}$，因此有 $\alpha\in\mathbf{R}$，使得 $\alpha\pm i\beta\in\sigma(h)$。从而对 $t>0$，

$$
\begin{aligned}
2(1+e^{\beta t}) \geqslant \nu(2-e^{ith}-e^{-ith}) &\geqslant K^{-2}\nu(f(th))^2 \\
&\geqslant K^{-2}|1-e^{it(\alpha-i\beta)}| \\
&= K^{-2}(1+e^{2\beta t}-2e^{\beta t}\cos\alpha t)
\end{aligned}
$$

如果 $\beta>0$，令 $t\to+\infty$ 将得到矛盾。因此，$\sigma(h)\subset\mathbf{R}$，即 * 运算是厄米的。证毕。

§ 12.5　c^*-代数的公理

定理 2.12.24　设 A 是有单位元的 Banach * 代数，并且有正常数 C，使得 $\|e^{ih}\|\leqslant C$，$\forall h^*=h\in A$，则 A 是 c^*-等价的。此外，如果 $C=1$，则 A 是 c^*-代数。

证。第一步指出 A 中的 * 运算是厄米的。设 $h^*=h\in A$，$\alpha+i\beta\in\sigma(h)$，这里 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$。由于 $\sigma(h)=\overline{\sigma(h)}$，可以设 $\beta\leqslant 0$。于是对任意的 $t>0$，

$$C\geqslant\|e^{ith}\|\geqslant|e^{it(\alpha+i\beta)}|=e^{-\beta t},$$

因此，$\beta=0$，$\sigma(h)\subset\mathbf{R}$。

第二步证明 $\inf\{\|h^2\|\,|\,h^*=h\in A,\|h\|=1\}=\varepsilon>0$。事实上，设 $h^*=h$，$\|h\|=1$，$\|h^2\|=\eta$，自然 $0\leqslant\eta\leqslant 1$，于是

$$\|h^{2n}\|\leqslant\|h^2\|^n=\eta^n,\ \|h^{2n+1}\|\leqslant\|h^{2n}\|\leqslant\eta^n.$$

令 $\delta=\eta^{\frac{1}{3}}$，当 $n\geqslant 1$ 时，

$$\|h^{2n}\|\leqslant\delta^{3n}\leqslant\delta^{2n},\ \|h^{2n+1}\|\leqslant\delta^{3n}\leqslant\delta^{2n+1}.$$

总之，$\|h^n\|\leqslant\delta^n$，$\forall n\geqslant 2$。今设 $t>0$，则

$$C\geqslant\|e^{ith}\|\geqslant\|th\|-1-\sum_{n=2}^{\infty}t^n\|h^n\|/n!$$

$$\geqslant t - 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \delta^n \geqslant t - e^{t\delta},$$

即 $C + e^{t\delta} \geqslant t$。令 $t = C + 2$，则 $e^{\delta(C+2)} \geqslant 2$。因此

$$\varepsilon \geqslant [(C+2)^{-1} \ln 2]^3 > 0.$$

第三步证明 $\nu(h) \geqslant \varepsilon\|h\|$，$\forall h^* = h \in A$。事实上，由第二步，对任意的 $h^* = h$，$\|h^2\| \geqslant \varepsilon\|h\|^2$，一般 $\|h^{2^n}\| \geqslant \varepsilon^{2^n - 1}\|h\|^{2^n}$，因此，$\nu(h) \geqslant \varepsilon\|h\|$。

今依第一步，第三步及定理 2.12.22，即见 A 是 c^*-等价的。

现在设 $C = 1$，及 $\|\cdot\|_1$ 是 A 上与 $\|\cdot\|$ 等价的范数，使得 $(A, \|\cdot\|_1)$ 是 c^*-代数。考虑恒等映射 I：$(A, \|\cdot\|_1) \to (A, \|\cdot\|)$，依定理 2.12.5，$\|a\| \leqslant \|a\|_1$，$\forall a \in A$。如果有 $a_0 \in A$，使得 $\|a_0\|_1 > \|a_0\|$，则由命题 2.1.8，

$$\nu(a_0^* a_0) \leqslant \|a_0^*\| \cdot \|a_0\| < \|a_0^*\|_1 \cdot \|a_0\|_1 = \|a_0^* a_0\|_1 = \nu(a_0^* a_0)$$

矛盾。所以，$\|a\| = \|a\|_1$，$\forall a \in A$。证毕。

引理 2.12.25 设 A 是有单位元的 Banach $*$ 代数，并且对 A 的任意正规元 a，$\|a^* a\| = \|a^*\| \cdot \|a\|$，则 A 是 c^*-代数。

证。设 $h^* = h \in A$，令 $\sigma_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(ih)^k$，它是 A 的正规元，并且 $\sigma_n(h)^* = \sigma_n(-h)$。于是

$$\|\sigma_n(h) \cdot \sigma_n(-h)\| = \|\sigma_n(h)\| \cdot \|\sigma_n(-h)\|, \ \forall n,$$

令 $n \to +\infty$，$\|e^{ih}\| \cdot \|e^{-ih}\| = 1$。依定理 2.12.23，$A$ 是 c^*-等价的，特别 $*$ 运算是厄米的，因此，$\sigma(h) \subset \mathbb{R}$。于是，$\|e^{ih}\| \geqslant 1$，$\|e^{-ih}\| \geqslant 1$。从而，$\|e^{ih}\| = 1$，$\forall h^* = h \in A$。再由定理 2.12.24，$A$ 是 c^*-代数。证毕。

定理 2.12.26 设 A 是 Banach $*$ 代数，如果对 A 的任意正规元 a（指 $a^* a = aa^*$），$\|a^* a\| = \|a^*\| \cdot \|a\|$，则 A 是 c^*-代数。

证。由引理 2.12.25，可以设 A 是无单位元的。

依定理 2.12.23，A 是 c^*-等价的，于是有 A 上的范数 $\|\cdot\|'$，它与原来的范数 $\|\cdot\|$ 等价，并且 $(A, \|\cdot\|')$ 是 c^*-代数。此外，由条件，易见 $\|h\| = \|h\|' = \nu(h)$，$\forall h^* = h \in A$。特别，设 $\{d_l\}$

是 $(A, \|\cdot\|')$ 的逼近单位元，则 $\|d_l\| = \|d_l\|' \leqslant 1$，$\forall l$

我们说对任意的 $a \in A$，有

$$\|a\| = \sup\{\|ab\| \mid b \in A,\ \|b\| \leqslant 1\}.$$

事实上，由于 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|$ 等价，$\|ad_l - a\| \to 0$，于是

$$\|a\| \geqslant \sup\{\|ab\| \mid b \in A,\ \|b\| \leqslant 1\} \geqslant \|ad_l\| \to \|a\|.$$

因此，$\|a\| = \sup\{\|ab\| \mid b \in A,\ \|b\| \leqslant 1\}$.

在 $A \dotplus \mathbb{C}$ 上定义

$$\|a + \lambda\| = \sup\{\|ab + \lambda b\| \mid b \in A,\ \|b\| \leqslant 1\},$$

$\forall a \in A$，$\lambda \in \mathbb{C}$. 如果 $ab + \lambda b = 0$，$\forall b \in A$，由于 A 无单位元，$(A, \|\cdot\|')$ 是 c^*-代数及依命题 2.1.2，可见 $a = 0$，$\lambda = 0$. 因此，$(A \dotplus \mathbb{C}, \|\cdot\|)$ 将是有单位元的 Banach $*$ 代数，并保持 A 上的范数不变。

我们需要证明 $(A \dotplus \mathbb{C}, \|\cdot\|)$ 是 c^*-代数，依定理 2.12.24，只须对任意的 $h^* = h \in A$，证明

$$\|e^{ih}\| \leqslant 1,$$

依 $A \dotplus \mathbb{C}$ 中范数的定义，可取 $b_n \in A$，$\|b_n\| \leqslant 1$，使得 $\|e^{ih}\| = \lim\limits_n \|e^{ih} b_n\|$.

用 $\{h, b_n, b_n^* \mid n\}$ 生成 A 的闭 $*$ 子代数 B，于是 $(B, \|\cdot\|')$ 将是 $(A, \|\cdot\|')$ 的可分 c^*-子代数。

如果 B 有单位元 p，依引理 2.12.25，$(B, \|\cdot\|)$ 是 c^*-代数. 从而

$$\|e^{ih}\| = \lim_n \|e^{ih} b_n\| = \lim_n \left\| \left(p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ih)^j}{j!}\right) b_n \right\|$$

$$\leqslant \left\| p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ih)^j}{j!} \right\| \leqslant 1.$$

于是可以假定 B 没有单位元. 在 $B \dotplus \mathbb{C}$ 上定义 $\|b + \lambda\|_1 = \sup\{\|bc + \lambda c\| \mid c \in B,\ \|c\| \leqslant 1\}$，$\forall b \in B$，$\lambda \in \mathbb{C}$. 相似于前面的证明，$(B \dotplus \mathbb{C}, \|\cdot\|_1)$ 将是有单位元的 Banach $*$ 代数，并且 $\|b\| = \|b\|_1$，$\forall b \in B$.

设 a 是 $(B, \|\cdot\|')$ 的严格正元（见定义 2.12.6），依定理 2.12.8 的证明，$\left\{d_n = \left(\frac{a}{\|a\|'}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$ 将是 $(B, \|\cdot\|')$ 的逼近单位元。由于

$$\|b+\lambda\|_1 \geqslant \|(b+\lambda)d_n\| \geqslant \|(b+\lambda)d_n c\| \to \|(b+\lambda)c\|,$$

$\forall c \in B$，$\|c\| \leqslant 1$，因此

$$\|b+\lambda\|_1 = \lim_n \|(b+\lambda)d_n\|, \ \forall b \in B, \ \lambda \in \mathbf{C}.$$

由此，

$$1 = \|d_n^2\|' = \|d_n^2\| = \|d_n(e^{ia})^* e^{ia} d_n\|$$
$$= \|e^{-ia}d_n\| \cdot \|e^{ia}d_n\| \to \|e^{-ia}\|_1 \cdot \|e^{ia}\|_1,$$

但 $\sigma(a)$ 由非负实数组成，$\|e^{\pm ia}\|_1 \geqslant \nu(e^{\pm ia}) = 1$，因此，$\|e^{\pm ia}\|_1 = 1$。依定理 2.12.9 及命题 2.12.10，严格正元全体在 $(B, \|\cdot\|')_+$ 中是稠的。注意

$$\|e^{ib_1} - e^{ib_2}\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|b_1^k - b_2^k\|, \ \forall b_1, b_2 \in B$$

以及 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 是等价的，从而

$$\|e^{\pm ib}\|_1 = 1, \ \forall b \in (B, \|\cdot\|')_+.$$

今回到 h。可写 $h = h_+ - h_-$，这里 $h_\pm \in (B, \|\cdot\|')_+$，并且 $h_+ \cdot h_- = 0$。由于

$$1 = \|e^{ih_+}\|_1 = \|e^{ih} \cdot e^{ih_-}\|_1 \leqslant \|e^{ih}\|_1 \leqslant \|e^{ih_+}\|_1 \cdot \|e^{-ih_-}\|_1 = 1$$

所以，$\|e^{ih}\|_1 = 1$。从而

$$\|e^{ih}\| = \lim_n \|e^{ih}b_n\| \leqslant \sup\{\|e^{ih}b\| \mid b \in B, \|b\| \leqslant 1\}$$
$$= \|e^{ih}\|_1 = 1.$$

证毕。

注 本节见参考文献 [3], [4], [31], [37], [39], [40], [42], [50], [58], [61], [67], [68], [85], [130], [136], [137].

第三章 c^*-代数的张量积

在第一章，我们讨论过 vN 代数的张量积，本章将讨论 c^*-代数的张量积，这是从已给的 c^*-代数来构造新的 c^*-代数的一种方法。

§1 引入 Banach 空间的张量积与交叉范的概念，这是 R. Schatten 与 J. von Neumann 早先的结果。§2 讨论 c^*-代数张量积与空间的 c^*-范，这首先为 T. Turumaru 所研究。通过空间 c^*-范的张量积与 vN 代数的张量积相类似(3.2.5 与 3.2.9)，区别在于按照不同的拓扑(一致拓扑，弱算子拓扑)取闭包。M. Takesaki 发现：构造 c^*-代数张量积的 c^*-范一般并非仅有空间 c^*-范，因此在 §3，我们讨论一下最大的 c^*-范，虽然至今对它的认识仍然不够深刻。这里值得提出的是核 c^*-代数的重要理论。核 c^*-代数指它与任何 c^*-代数的张量积只能依照一种方式来构造。但是限于本书的篇幅，将不予介绍。有兴趣的读者，可以参看 C. Lance 等的工作。§5 指出空间 c^*-范是最小的及任意 c^*-范都是交叉范(3.5.10)，这结果属于 M. Takesaki. §6 研究 c^*-代数间的全正映象，它在张量积理论中的重要性为 C. Lance 与 E. Effros 所认识。定理 3.6.7 属于 W. Stinespring. §7 c^*-代数的诱导极限首先为 Z. Takeda 所研究．§8 把前面 c^*-代数的有限张量积推广到任意张量积，其中特别提到了（UHF）（一致超有限）代数(3.8.2)，这为 J. Glimm 所提出并给予深刻研究的，我们还将在第十二章中讨论它。

§1. Banach 空间的张量积与交叉范

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是(复) Banach 空间，令

$$\bigotimes_{i=1}^{n} X_i = \left\{ \sum_j \bigotimes_{i=1}^{n} x_i^{(j)} \mid x_i^{(j)} \in X_i, \forall i, j \right\},$$

在这个集合中定义零元(即引入一种等价关系)，$u=\sum_j \bigotimes_{i=1}^{n} x_i^{(j)}=0$，指

$$\bigotimes_{i=1}^{n} f_i(u) = \sum_j \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i^{(j)}) = 0, \forall f_i \in X_i^*, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

于是，$\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 便成为线性空间，称为 Banach 空间 $X_1, \cdots, X_n$ 的代数张量积。

自然，这里的做法只不过是第一章 §4 Hilbert 空间代数张量积的推广。

如果 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 上的一个范数，依此完备化，得到的 Banach 空间，称为 $X_1, \cdots, X_n$ 依照 $\alpha(\cdot)$ 的张量积，记作 $\alpha\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$。

定义 3.1.1 Banach 空间 $X_1, \cdots, X_n$ 的代数张量积 $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 上的范数 $\alpha(\cdot)$ 称为交叉的，指 $\alpha\left(\bigotimes_{i=1}^{n} x_i\right)=\|x_1\|\cdots\|x_n\|, \forall x_i \in X_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$。

命题 3.1.2 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是 Banach 空间，$\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 是它们的代数张量积。则

1) $\lambda(u) = \sup\left\{ \left| \bigotimes_{i=1}^{n} f_i(u) \right| \,\middle|\, f_i \in X_i^*, \|f_i\| \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$

是 $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 上的交叉范；

2) $\gamma(u) = \inf\left\{ \sum_j \prod_{i=1}^{n} \|x_i^{(j)}\| \,\middle|\, u=\sum_j \bigotimes_{i=1}^{n} x_i^{(j)} \right\}$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 上

最大的交叉范。

易证，从略。

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 Banach 空间，当然也可以考虑 Banach 空间 $X_1^*,\cdots,X_n^*$ 的代数张量积 $\bigotimes_{i=1}^n X_i^*$. 由于 X_i 在 X_i^{**} 中 $\sigma(X_i^{**},X_i^*)$ 稠，$1\leqslant i\leqslant n$，因此，$u^*\in\bigotimes_{i=1}^n X_i^*$，$u^*=0$，当且仅当，$u^*\left(\bigotimes_{i=1}^n x_i\right)=0$，$\forall x_i\in X_i$，$1\leqslant i\leqslant n$. 于是，若 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上的范数，并且对任意的 $u^*\in\bigotimes_{i=1}^n X_i^*$，$\alpha^*(u^*)=\sup\left\{|u^*(u)|\,\middle|\,u\in\bigotimes_{i=1}^n X_i,\ \alpha(u)\leqslant 1\right\}<\infty$，那么，$\alpha^*(\cdot)$ 也是 $\bigotimes_{i=1}^n X_i^*$ 上的范数，称为 $\alpha(\cdot)$ 的对偶范数。

命题 3.1.3 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 Banach 空间.

1) $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上的范数 $\gamma(\cdot)$ 的对偶范数是 $\bigotimes_{i=1}^n X_i^*$ 上的范数 $\lambda(\cdot)$，即 $\gamma^*(\cdot)=\lambda(\cdot)$ ($\lambda(\cdot)$，$\gamma(\cdot)$ 的定义见命题 3.1.2)；

2) 设 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上的交叉范，则 $\alpha^*(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^n X_i^*$ 上的交叉范，当且仅当，$\lambda(\cdot)\leqslant\alpha(\cdot)\leqslant\gamma(\cdot)$. 这时在 $\bigotimes_{i=1}^n X_i^*$ 上还有 $\gamma(\cdot)\geqslant\lambda^*(\cdot)\geqslant\alpha^*(\cdot)\geqslant\lambda(\cdot)$.

证. 1) 对任意的 $u^*\in\bigotimes_{i=1}^n X_i^*$，由于 X_i 的单位球在 X_i^{**} 的单位球中 $\sigma(X_i^{**},X_i^*)$ 稠 $(1\leqslant i\leqslant n)$，因此，

$$\gamma^*(u^*)=\sup\left\{|u^*(u)|\,\middle|\,u\in\bigotimes_{i=1}^n X_i,\ \gamma(u)\leqslant 1\right\}$$
$$\geqslant\sup\left\{\left|u^*\left(\bigotimes_{i=1}^n x_i\right)\right|\,\middle|\,x_i\in X_i,\ \|x_i\|\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$$

$$= \sup\left\{\left|\bigotimes_{i=1}^{n} x_i(u^*)\right| \,\middle|\, x_i \in X_i^{**}, \|x_i\| \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$$
$$= \lambda(u^*).$$

另一方面,对任意的 $u \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$, $\gamma(u) \leqslant 1$ 及 $\varepsilon > 0$, 可写 $u = \sum_j \bigotimes_{i=1}^{n} x_j^{(i)}$, 使得 $\sum_j \prod_{i=1}^{n} \|x_j^{(i)}\| - \gamma(u) \leqslant \varepsilon$, 于是

$$\begin{aligned} |u^*(u)| &\leqslant \sum_j \left|u^*\left(\bigotimes_{i=1}^{n} x_j^{(i)}\right)\right| \\ &\leqslant \lambda(u^*) \sum_j \prod_{i=1}^{n} \|x_j^{(i)}\| \\ &\leqslant (\gamma(u) + \varepsilon)\lambda(u^*) \\ &\leqslant (1 + \varepsilon)\lambda(u^*), \end{aligned}$$

从而, $\gamma^*(u^*) \leqslant (1+\varepsilon)\lambda(u^*)$. $\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以, $\gamma^*(u^*) = \lambda(u^*)$.

2) 对任意的 $u \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$, 依 $\lambda(u)$ 的定义, 易见

$$\lambda(u) \leqslant \alpha(u) \sup\left\{\alpha^*\left(\bigotimes_{i=1}^{n} f_i\right) \,\middle|\, f_i \in X_i^*, \|f_i\| \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant n\right\}.$$

当 $\alpha^*(\cdot)$ 是交叉范时,由于 $\gamma(\cdot)$ 是最大的交叉范,立见 $\lambda(\cdot) \leqslant \alpha(\cdot) \leqslant \gamma(\cdot)$.

反之,设在 $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 上, $\lambda(\cdot) \leqslant \alpha(\cdot) \leqslant \gamma(\cdot)$. 对任意的 $u^* \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i^*$, 依 1),

$$\begin{aligned} \lambda(u^*) &= \sup\left\{|u^*(u)| \,\middle|\, u \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i, \gamma(u) \leqslant 1\right\} \\ &\leqslant \sup\{|u^*(u)| \mid \alpha(u) \leqslant 1\} = \alpha^*(u^*) \\ &\leqslant \sup\{|u^*(u)| \mid \lambda(u) \leqslant 1\} = \lambda^*(u^*) \\ &\leqslant \sup\left\{\sum_j \left|\bigotimes_{i=1}^{n} f_j^{(i)}(u)\right| \,\middle|\, \lambda(u) \leqslant 1\right\} \end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_j \prod_{i=1}^n \|f_i^{(j)}\|,$$

这里 $u^* = \sum_j \bigotimes_{i=1}^n f_i^{(j)}$, $f_i^{(j)} \in X_i^*$, $\forall i, j$. 因此在 $\bigotimes_{i=1}^n X_i^*$ 上,

$$\gamma(\cdot) \geqslant \lambda^*(\cdot) \geqslant \alpha^*(\cdot) \geqslant \lambda(\cdot),$$

又 $\gamma(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ 是交叉范,因此 $\alpha^*(\cdot)$ 也是交叉范. 证毕.

注 本节见参考文献 [44], [98].

§2. c^*-代数的张量积与空间的 c^*-范

设 $A_1, \cdots, A_n$ 是 c^*-代数,把它们当作 Banach 空间,依 §1 有代数张量积 $\bigotimes_{i=1}^n A_i$, 自然地引入

$$\left(\bigotimes_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\bigotimes_{i=1}^n b_i\right) = \bigotimes_{i=1}^n a_i b_i, \quad \left(\bigotimes_{i=1}^n a_i\right)^* = \bigotimes_{i=1}^n a_i^*,$$

于是, $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ 成为 * 代数.

定义 3.2.1 设 $A_1, \cdots, A_n$ 是 c^*-代数, $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ 上的范数 $\alpha(\cdot)$ 称为 c^*-范,指

$$\alpha(uv) \leqslant \alpha(u)\alpha(v), \quad \alpha(u^*u) = \alpha(u)^2,$$

$\forall u, v \in \bigotimes_{i=1}^n A_i$. $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ 依照 c^*-范 $\alpha(\cdot)$ 完备化得到的 c^*-代数,记作 $\alpha\text{-}\bigotimes_{i=1}^n A_i$, 称为 c^*-代数 $A_1, \cdots, A_n$ 依照 c^*-范 $\alpha(\cdot)$ 的张量积.

命题 3.2.2 设 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ 上的 c^*-范,则 $\alpha(\cdot) \leqslant \gamma(\cdot)$, 这里 $\gamma(\cdot)$ 定义如命题 3.1.2.

证. 首先注意这样的事实: 在任意的 c^*-代数 A 中, $a \in A_+$, 则 $\|a\| \leqslant 1$, 当且仅当, $a^2 \leqslant a$.

若 $b_i\in A_i$, $b_i\geqslant 0$, $\|b_i\|\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant n$, 由于在 $\alpha\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 中,

$$\bigotimes_{i=1}^{n} b_i^2\leqslant b_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} b_i^2\leqslant\cdots\leqslant\bigotimes_{i=1}^{n} b_i,$$

因此, $\alpha\left(\bigotimes_{i=1}^{n} b_i\right)\leqslant 1$.

由此对任意的 $a_i\in A_i$, $1\leqslant i\leqslant n$,

$$\begin{aligned}\alpha\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right)^2&=\alpha\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i^*a_i\right)\\&\leqslant\|a_1^*a_1\|\cdots\|a_n^*a_n\|=(\|a_1\|\cdots\|a_n\|)^2,\end{aligned}$$

因此, $\alpha(\cdot)\leqslant\gamma(\cdot)$. 证毕.

定义 3.2.3 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是 c^*-代数, $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的形如 $u=\sum_j u_j^*u_j$ $\left(这里\ u_j\in\bigotimes_{i=1}^{n} A_i,\ \forall j\right)$ 的元称为正的, 记作 $u\geqslant 0$. $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的正元全体记为 $\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)_+$.

$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的线性泛函 φ 称为正的, 记作 $\varphi\geqslant 0$, 指 $\varphi(u)\geqslant 0$, $\forall u\in\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)_+$.

显然, $\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)_+$ 是锥, 并且 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 是 $\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)_+$ 的线性包, 以及对于 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上任意的 c^*-范 $\alpha(\cdot)$, 有

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)_+\subset\left(\alpha\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)_+.$$

此外, 如果 φ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的正泛函, 易见 $\varphi(u^*)=\overline{\varphi(u)}$, 及

有 Schwartz 不等式 $|\varphi(v^*u)|^2 \leqslant \varphi(u^*u)\varphi(v^*v)$，$\forall u, v \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$。

命题 3.2.4 设 φ_i 是 c^*-代数 A_i 上的正泛函，$1 \leqslant i \leqslant n$，则 $\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的正泛函，这里 $\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i$ 自然地定义为 $\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(a_i)$，$\forall a_i \in A_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$。

证明与第一章 § 4 相似。

定理 3.2.5 设 A_i 是 c^*-代数，$\mathscr{S}_i$ 是 A_i 的态空间，$1 \leqslant i \leqslant n$，对任意的 $u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$，定义

$$\alpha_0(u)^2 = \sup\left\{ \frac{\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i(v^*u^*uv)}{\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i(v^*v)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_i \in \mathscr{S}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \\ v \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i,\ 并且\ \bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i(v^*v) > 0 \end{array} \right\}$$

则 $\alpha_0(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的 c^*-范，并且 $\lambda(\cdot) \leqslant \alpha_0(\cdot) \leqslant \gamma(\cdot)$。特别，$\alpha_0(\cdot)$ 是交叉范。

证. 设 $\varphi_i \in \mathscr{S}_i$，产生 A_i 的循环 * 表示 $\{\pi_{\varphi_i}, \mathscr{H}_{\varphi_i}, \xi_{\varphi_i}\}$，$1 \leqslant i \leqslant n$，于是可以自然地定义 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的 * 表示 $\left\{\bigotimes_{i=1}^{n} \pi_{\varphi_i}, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_{\varphi_i}\right\}$。由于 $A_i/\vartheta_{\varphi_i}$ 在 $\mathscr{H}_{\varphi_i}$ 中稠，这里 ϑ_{φ_i} 是 φ_i 的左核，$1 \leqslant i \leqslant n$，因此，对任意的 $u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$，

$$\left\|\bigotimes_{i=1}^{n} \pi_{\varphi_i}(u)\right\|^2 =$$

$$\sup\left\{\frac{\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i(v^*u^*uv)}{\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i(v^*v)}\middle| v\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i,\ \text{并且}\ \bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i(v^*v)>0\right\},$$

进而，

$$\alpha_0(u)=\sup\left\{\left\|\bigotimes_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}(u)\right\|\middle|\varphi_i\in\mathscr{S}_i,1\leqslant i\leqslant n\right\}.$$

如果 $u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$，使得 $\alpha_0(u)=0$。于是

$$0=\left\langle\bigotimes_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}(u)\bigotimes_{i=1}^{n}\xi_{\varphi_i},\ \bigotimes_{i=1}^{n}\xi_{\varphi_i}\right\rangle$$

$$=\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i(u),\ \forall\varphi_i\in\mathscr{S}_i,\ 1\leqslant i\leqslant n,$$

但 A_i^* 是 φ_i 的线性包，$1\leqslant i\leqslant n$，因此，$u=0$。从而，$\alpha_0(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的 c^*-范。依命题 3.2.2，$\alpha_0(\cdot)\leqslant\gamma(\cdot)$。

我们注意这样的事实；如果 A 是 c^*-代数，$f\in A^*$，$\|f\|=1$，依定理 2.11.2，A^{**} 可以看作 A 的泛表示空间中的 vN 代数。于是依定理 1.9.3，有极分解 $f=R_u\varphi$，这里 φ 是 A 上的态，u 是 A^{**} 的部分等距元。但 A 的单位球在 A^{**} 的单位球中 $\sigma(A^{**},A^*)$ 稠，因此有网 $\{a_l\}\subset A$，$\|a_l\|\leqslant 1$，$\forall l$，且 $a_l\xrightarrow{\sigma(A^{**},A^*)}u$。易见将有 $R_{a_l}\varphi\xrightarrow{\sigma(A^*,A^{**})}f$。

于是可见，对任意的 $u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$，依 Schwartz 不等式，

$$\lambda(u)=\sup\left\{\left|\bigotimes_{i=1}^{n}f_i(u)\right|\middle| f_i\in A_i^*,\ \|f_i\|=1,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$$

$$=\sup\left\{\left|\bigotimes_{i=1}^{n}R_{a_i}\varphi_i(u)\right|\middle|\varphi_i\in\mathscr{S}_i,\right.$$

$$\left. a_i\in A_i,\ \|a_i\|\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$$

$$\leqslant \sup\left\{\left(\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i(uu^*)\cdot\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i\left(\bigotimes_{i=1}^{n}a_i^*a_i\right)\right)^{1/2}\middle|\,\varphi_i,\ a_i\text{ 如上}\right\}$$

$$=\sup\left\{\left\langle\bigotimes_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}(uu^*)\bigotimes_{i=1}^{n}\xi_{\varphi_i},\ \bigotimes_{i=1}^{n}\xi_{\varphi_i}\right\rangle^{1/2}\middle|\right.$$

$$\left.\varphi_i\in\mathscr{S}_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}\leqslant\alpha_0(u),$$

证毕。

系 3.2.6 设 $f_i\in A_i^*$，$1\leqslant i\leqslant n$，则 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的线性泛函 $\bigotimes_{i=1}^{n}f_i$ 可以唯一扩充为 α_0-$\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上范数为 $\prod_{i=1}^{n}\|f_i\|$ 的线性泛函。

事实上，对任意的 $u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$，依 $\lambda(\cdot)$ 的定义及 $\lambda(\cdot)\leqslant\alpha_0(\cdot)$，

$$\left|\bigotimes_{i=1}^{n}f_i(u)\right|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\|f_i\|\lambda(u)\leqslant\prod_{i=1}^{n}\|f_i\|\alpha_0(u),$$

由此得证。

命题 3.2.7 上面的 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$ 还可这样表达

$$\alpha_0(u)=\sup\left\{\left\|\bigotimes_{i=1}^{n}\pi_i(u)\right\|\middle|\,\pi_i\text{ 是 }A_i\text{ 的 * 表示},\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$$

$$=\sup\left\{\left\|\bigotimes_{i=1}^{n}\pi_{\rho_i}(u)\right\|\middle|\,\rho_i\in\Delta_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\},$$

$$\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i,$$

这里 Δ_i 是 A_i 上正泛函的集合，使得 $\left\{\sum_j\lambda_j\rho_i^{(j)}\middle|\lambda_j\geqslant0,\ \rho_i^{(j)}\in\Delta_i,\ \forall j\right\}$ 在 A_i^* 中的 $\sigma(A_i^*, A_i)$ 闭包 $\supset\mathscr{S}_i$，及当 $\rho_i\in\Delta_i$，π_{ρ_i} 是 ρ_i 产生的 A_i 的 * 表示，$1\leqslant i\leqslant n$。

证。c^*-代数的任意 * 表示是循环 * 表示族与零表示的直和，而循环 * 表示必酉等价于某个态产生的 * 表示，因此，依定理

3.2.5，

$$\alpha_0(u)=\sup\left\{\left\|\bigotimes_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}(u)\right\|\middle|\varphi_i\in\mathscr{S}_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$$

$$=\sup\left\{\left\|\bigotimes_{i=1}^{n}\pi_i(u)\right\|\middle|\pi_i\text{ 是 }A_i\text{ 的 * 表示},\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}\geqslant\alpha(u),$$

这里 $\alpha(u)=\sup\left\{\left\|\bigotimes_{i=1}^{n}\pi_{\rho_i}(u)\right\|\middle|\rho_i\in\Delta_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$，$\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$。我们说 $\alpha(\cdot)$ 也是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的 c^*-范，事实上，如果 $\alpha(u)=0$，则 $\bigotimes_{i=1}^{n}\rho_i(u)=0$，$\forall\rho_i\in\Delta_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，依 Δ_i 的性质，即见 $u=0$。

对任意的 $\rho_i\in\Delta_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，$\left|\bigotimes_{i=1}^{n}\rho_i(u)\right|\leqslant\left\|\bigotimes_{i=1}^{n}\pi_{\rho_i}(u)\right\|\leqslant\alpha(u)$，$\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$。因此，$\bigotimes_{i=1}^{n}\rho_i$ 可扩充为 α-$\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的正泛函。对任意的 $u,v\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$，$v^*(\alpha(u^*u)-u^*u)v$ 是 α-$\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 的正元，因此，$\bigotimes_{i=1}^{n}\rho_i(v^*(\alpha(u^*u)-u^*u)v)\geqslant0$，$\forall\rho_i\in\Delta_i$，$1\leqslant i\leqslant n$。进而依 Δ_i 的假定，可见 $\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i(v^*(\alpha(u^*u)-u^*u)v)\geqslant0$，$\forall\varphi_i\in\mathscr{S}_i$，$1\leqslant i\leqslant n$。从而，$\alpha(\cdot)\geqslant\alpha_0(\cdot)$。证毕。

引理 3.2.8 设 A 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 c^*-代数，令 $\triangle=\{\omega_\xi(\cdot)=\langle\cdot\xi,\xi\rangle|\xi\in\mathscr{H},\|\xi\|=1\}$，则$\triangle$在 A^* 中的 $\sigma(A^*,A)$ 凸闭包$\supset A$ 的态空间 $\mathscr{S}$。

证. 设 $\varphi\in\mathscr{S}$，依系 2.3.12，φ 可以扩张为 $B(\mathscr{H})$ 上的态，仍记以 φ. $T(\mathscr{H})$ 的单位球在 $B(\mathscr{H})^*$ 的单位球中是弱 * 稠的，于是有网 $\{t_l\}\subset T(\mathscr{H})$，$\|t_l\|_1\leqslant1$，$\forall l$，使得 $\mathrm{tr}(t_lb)\to$

$\varphi(b)$, $\forall b\in B(\mathscr{H})$. 由于 $\varphi=\varphi^*$，无妨设 $t_l=t_l^*$, $\forall l$. 于是可写 $t_l=t_l^+-t_l^-$，这里 $t_l^\pm$ 是正迹类算子，$t_l^+\cdot t_l^-=0$，自然也有 $\|t_l^\pm\|_1\leqslant\|t_l\|_1\leqslant 1$, $\forall l$. $B(\mathscr{H})^*$ 的单位球是弱 * 紧的，因此可设 $\{t_l^\pm\}$ 是 $B(\mathscr{H})^*$ 的弱 * 收敛网. 令 $|t_l|=t_l^++t_l^-$，则有 $\psi\in B(\mathscr{H})^*$，使得 $\operatorname{tr}(|t_l|b)\to\psi(b)$, $\forall b\in B(\mathscr{H})$. 自然 ψ 是 $B(\mathscr{H})$ 上的正泛函，并且由于 $\varphi(1)=1=\lim\limits_l\operatorname{tr}(t_l)\leqslant\lim\limits_l\operatorname{tr}(|t_l|)=\psi(1)$ 及 $\||t_l|\|_1=\|t_l\|_1\leqslant 1$, $\forall l$，因此 ψ 是 $B(\mathscr{H})$ 上的态，并且 $\lim\limits_l\operatorname{tr}(t_l^-)=0$. 对任意的 $a\in B(\mathscr{H})$, $a\geqslant 0$，由于 $0\leqslant\operatorname{tr}(t_l^-a)\leqslant\|a\|\operatorname{tr}(t_l^-)\to 0$，因此，$\operatorname{tr}(t_l^+b)\to\varphi(b)$, $\forall b\in B(\mathscr{H})$，即我们可以假定 $t_l\geqslant 0$, $\forall l$. 从而可写

$$\operatorname{tr}(t_lb)=\sum_n\lambda_n^{(l)}\langle b\xi_n^{(l)},\xi_n^{(l)}\rangle,\ \forall l \text{ 及 } b\in B(\mathscr{H}).$$

这里 $\|\xi_n^{(l)}\|=1$, $\lambda_n^{(l)}\geqslant 0$, $\forall n, l$. 由于 $\sum\limits_n\lambda_n^{(l)}=\operatorname{tr}(t_l)\to 1$，于是 N, l 充分大时，

$$\omega_{N,l}(\cdot)=\sum_{n=1}^N\left(\sum_{k=1}^N\lambda_k^{(l)}\right)^{-1}\lambda_n^{(l)}\langle\cdot\xi_n^{(l)},\xi_n^{(l)}\rangle\in Co\Delta,$$

并且 $\omega_{N,l}(a)\xrightarrow{(N,l)}\varphi(a)$, $\forall a\in A$. 证毕.

定理 3.2.9 如果 $\{\pi_i,\mathscr{H}_i\}$ 是 c^*-代数 A_i 忠实的 * 表示，则 $\alpha_0(u)=\left\|\bigotimes\limits_{i=1}^n\pi_i(u)\right\|$, $\forall u\in\bigotimes\limits_{i=1}^n A_i$.

证. 依命题 3.2.7，对任意的 $u\in\bigotimes\limits_{i=1}^n A_i$,

$$\alpha_0(u)\geqslant\left\|\bigotimes_{i=1}^n\pi_i(u)\right\|\geqslant$$

$$\sup\left\{\frac{\left\|\bigotimes\limits_{i=1}^n\pi_i(uv)\bigotimes\limits_{i=1}^n\xi_i\right\|}{\left\|\bigotimes\limits_{i=1}^n\pi_i(v)\bigotimes\limits_{i=1}^n\xi_i\right\|}\ \middle|\ \begin{array}{l}\xi_i\in\mathscr{H}_i,\ \|\xi_i\|=1,\ 1\leqslant i\leqslant n,\\ v\in\bigotimes\limits_{i=1}^n A_i,\text{ 且 }\left\|\bigotimes\limits_{i=1}^n\pi_i(v)\bigotimes\limits_{i=1}^n\xi_i\right\|>0\end{array}\right\}$$

$$= \sup \left\{ \frac{\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \rho_i(v^*u^*uv)\right)^{1/2}}{\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \rho_i(v^*v)\right)^{1/2}} \middle| \begin{array}{l} \rho_i \in \Delta_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n \\ v \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i,\ \text{且}\ \bigotimes_{i=1}^{n} \rho_i(v^*v) > 0 \end{array} \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left\| \bigotimes_{i=1}^{n} \pi_{\rho_i}(u) \right\| \middle| \rho_i \in \Delta_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n \right\},$$

这里 $\Delta_i = \{\langle \pi_i(\cdot)\xi_i, \xi_i \rangle | \xi_i \in \mathscr{H}_i, \|\xi_i\| = 1\}$，及当 $\rho_i \in \Delta_i$，π_{ρ_i} 是 ρ_i 产生的 A_i 的 $*$ 表示，$1 \leqslant i \leqslant n$。依命题 3.2.7，引理 3.2.8，及 π_i 是 A_i 忠实的 $*$ 表示 $(1 \leqslant i \leqslant n)$，可见 $\sup\left\{ \left\| \bigotimes_{i=1}^{n} \pi_{\rho_i}(u) \right\| \middle| \rho_i \in \Delta_i, 1 \leqslant i \leqslant n \right\} = \alpha_0(u)$。由此得证。

本定理说明了 $\alpha_0(\cdot)$ 的几何意义，因此，称 $\alpha_0(\cdot)$ 为 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上空间的 c^*-范。以后，我们将看到 $\alpha_0(\cdot)$ 实际上是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上最小的 c^*-范。

命题 3.2.10 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i^*$ 在 $\left(\alpha_0\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)^*$ 中是弱 $*$ 稠的。

证。由系 3.2.6，$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i^* \subset \left(\alpha_0\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)^*$。无妨设 A_i 是 $\mathscr{H}_i$ 中的 c^*-代数，$1 \leqslant i \leqslant n$，依定理 3.2.9，$\alpha_0\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 实际上是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 在 $B\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_i\right)$ 中的一致闭包，依引理 3.2.8，$\left\{\langle \cdot\xi, \xi\rangle \middle| \xi \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_i\right\}$ 的弱 $*$ 凸闭包包含 $\alpha_0\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的态空间。进而，$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i^*$ 的子集

$$\left\{\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}\langle\cdot\xi_i,\xi_i\rangle\,\middle|\,\xi_i\in\mathscr{H}_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$$

的弱*凸闭包将包含 α_0-$\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}A_i$ 的态空间. 证毕。

注　本节见参考文献[64], [115], [126], [132], [134]

§3. 最大的 c^*-范

设 $A_1,\cdots,A_n$ 是 c^*-代数,依定理 3.2.5, $\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}A_i$ 上至少有一个 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$, 又依命题 3.2.2, $\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}A_i$ 上任意的 c^*-范 $\alpha(\cdot)\leqslant\gamma(\cdot)$, 因此, 可以定义 $\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}A_i$ 上的最大的 c^*-范

$$\alpha_1(u)=\sup\left\{\alpha(u)\,\middle|\,\alpha(\cdot)\text{ 是 }\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}A_i\text{ 上的 }c^*\text{-范}\right\},$$

$$\forall u\in\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}A_i.$$

与定义 2.4.5 一样,我们称*代数 $\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}A_i$ 的*表示 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是非退化的, 指 $\left\{\pi(u)\xi\,\middle|\,u\in\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}A_i,\xi\in\mathscr{H}\right\}$ 张成的闭子空间就是 $\mathscr{H}$.

引理 3.3.1　设 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 $\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}A_i$ 的非退化*表示, 则存在 A_i 的唯一的非退化*表示 $\{\pi_i,\mathscr{H}\}$, $1\leqslant i\leqslant n$, 使得

$$\pi_i(a_i)\pi_j(a_j)=\pi_j(a_j)\pi_i(a_i),$$

$$\pi\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}a_i\right)=\pi_1(a_1)\cdots\pi_n(a_n),$$

$\forall a_i\in A_i$, $1\leqslant i\neq j\leqslant n$. 特别, $\|\pi(u)\|\leqslant\gamma(u)$, $\forall u\in\overset{n}{\underset{i=1}{\bigotimes}}A_i$.

此外，如果 π 是忠实的，则 π_i 也是忠实的，$1\leqslant i\leqslant n$.

证。记 $A_i^{(1)}=A_i\dotplus \mathbb{C}1_i$ 是 A_i 添加单位元 1_i 的 c^*-代数，并对 $\xi=\sum\limits_{j,k}\pi\left(\bigotimes\limits_{s=1}^{n}a_{jk}^{(s)}\right)\xi_k$，令

$$\varphi_i(b_i)=\sum_{j,k,l,m}\left\langle\pi\left(\bigotimes_{s\neq i}1_s\otimes b_i\cdot\bigotimes_s a_{jk}^{(s)}\right)\xi_k,\ \pi\left(\bigotimes_s a_{lm}^{(s)}\right)\xi_m\right\rangle$$

$\forall b_i\in A_i^{(1)}$，易见 φ_i 是 $A_i^{(1)}$ 上的正泛函，于是

$$\left\|\sum_{j,k}\pi\left(\bigotimes_{s\neq i}1_s\otimes b_i\cdot\bigotimes_s a_{jk}^{(s)}\right)\xi_k\right\|=\varphi_i(b_i^*b_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\|b_i\|\varphi_i(1_i)^{1/2}=\|b_i\|\cdot\|\xi\|,$$

但 π 是非退化的，因此可以唯一决定 $\pi_i(b_i)\in B(\mathscr{H})$，使得

$$\pi_i(b_i)\xi=\sum_{j,k}\pi\left(\bigotimes_{s\neq i}1_s\otimes b_i\cdot\bigotimes_s a_{jk}^{(s)}\right)\xi_k,$$

易见 $\{\pi_i,\mathscr{H}\}$ 是 $A_i^{(1)}$ 的 * 表示，并且

$$\pi_1(b_1)\cdots\pi_n(b_n)\xi=\sum_{j,k}\pi\left(\bigotimes_s b_s\cdot\bigotimes_s a_{jk}^{(s)}\right)\xi_k,$$

$\forall b_s\in A_s^{(1)}$，$a_{jk}^{(s)}\in A_s$，$\xi_k\in\mathscr{H}$ 及 $\xi=\sum\limits_{j,k}\pi\left(\bigotimes\limits_s a_{jk}^{(s)}\right)\xi_k$. 因此，

$$\pi\left(\bigotimes_i a_i\right)=\pi_1(a_1)\cdots\pi_n(a_n),$$

$$\pi_i(a_i)\pi_j(a_j)=\pi_j(a_j)\pi_i(a_i),$$

$\forall a_i\in A_i$，$1\leqslant i\neq j\leqslant n$.

如果 $\xi\in\mathscr{H}$，使对某 i 有 $\pi_i(a_i)\xi=0$，$\forall a_i\in A_i$，则也有 $\pi\left(\bigotimes\limits_s a_s\right)\xi=0$，$\forall a_s\in A_s$，$1\leqslant s\leqslant n$. 但 π 是非退化的，因此，$\xi=0$. 即 $\{\pi_i,\mathscr{H}\}$ 是 A_i 非退化的 * 表示，$1\leqslant i\leqslant n$.

又若 π 是忠实的，由 $\pi\left(\bigotimes\limits_i a_i\right)=\pi_1(a_1)\cdots\pi_n(a_n)$，$\forall a_i\in A_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，可见 $\{\pi_i,\mathscr{H}\}$ 也是 A_i 忠实的 * 表示，$1\leqslant i\leqslant n$.

最后，如果 $\{d_{l_j}^{(j)}\}$ 是 A_j 的逼近单位元，依命题 2.4.6，

$$\pi_i(a_i)=(\text{强算子})\text{-}\lim_{j\neq i,\,l_j}\pi\left(\bigotimes_{j\neq i}d_{l_j}^{(j)}\otimes a_i\right),\ \forall a_i\in A_i,$$

因此，π_i 为 π 唯一决定，$1 \leqslant i \leqslant n$。证毕。

注。如果不假定 π 是非退化的，限于 π 的本质子空间来讨论，可见仍有分解 $\pi = \pi_1 \cdots \pi_n$，但不必唯一。

命题 3.3.2 对任意的 $u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$，我们有

$$\alpha_1(u) = \sup\left\{\|\pi(u)\| \,\Big|\, \pi \text{ 是 } \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \text{ 的} * \text{表示}\right\}.$$

证。设 π_0 是 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 忠实的 $*$ 表示，则 $\alpha_1(u) = \|\pi_0(u)\|$。当然 π_0 限于 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 也是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的 $*$ 表示，因此，$\alpha_1(u) \leqslant \sup\left\{\|\pi(u)\| \,\Big|\, \pi \text{ 是 } \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \text{ 的} * \text{表示}\right\}$。又依引理 3.3.1，$\|\pi(\cdot)\| \leqslant \gamma(\cdot)$，因此，

$$\sup\left\{\|\pi(\cdot)\| \,\Big|\, \pi \text{ 是 } \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \text{ 的} * \text{表示}\right\}$$

也是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的 c^*-范。但 $\alpha_1(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上最大的 c^*-范，所以，$\alpha_1(u) = \sup\left\{\|\pi(u)\| \,\Big|\, \pi \text{ 是 } \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \text{ 的} * \text{表示}\right\}$。证毕。

命题 3.3.3 对任意的 $u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$，我们有

$$\alpha_1(u) = \sup\left\{\alpha(u) \,\Big|\, \alpha(\cdot) \text{ 是 } \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \text{ 上的 } c^*\text{-拟范}\right\},$$

这里 $\alpha(\cdot)$ 是 c^*-拟范，只与 c^*-范差一个条件，即若 $\alpha(v) = 0$，未必有 $v = 0$。

证。显然右端 $\geqslant$ 左端。今设 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的 c^*-拟范，则 $\mathfrak{I} = \left\{v \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \,\Big|\, \alpha(v) = 0\right\}$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的 $*$ 双侧理想。令

$v\to\tilde{v}$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 到 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i/\vartheta$ 上的正则映象，并命 $\tilde{\alpha}(\tilde{v})=\alpha(v)$，则 $\tilde{\alpha}(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i/\vartheta$ 上的 c^*-范. 设 $\tilde{\pi}$ 是 $\tilde{\alpha}$-$\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i/\vartheta\right)$ 忠实的 * 表示，及命 $\pi(v)=\tilde{\pi}(\tilde{v})$，则 π 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的 * 表示. 依命题 3.3.2，

$$\alpha_1(u)\geqslant\|\pi(u)\|=\|\tilde{\pi}(\tilde{u})\|=\tilde{\alpha}(\tilde{u})=\alpha(u),$$

证毕.

命题 3.3.4 集合 $\left\{\alpha(\cdot)\,|\,\alpha(\cdot)\text{ 是 }\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\text{ 上的 }c^*\text{-范}\right\}$ 与 $\left\{\vartheta\,|\,\vartheta\text{ 是 }\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\text{ 的闭双侧理想，并且 }\vartheta\cap\bigotimes_{i=1}^{n} A_i=0\right\}$ 通过下面的方式一一对应：

设 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的 c^*-范，则有 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 唯一的闭双侧理想 ϑ_α，使得 $u\to\tilde{u}\left(\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)$ 可以扩充为 α-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 到 $\left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)\Big/\vartheta_\alpha$ 上的 * 同构，这里 $a\to\tilde{a}$ 是 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 到 $\left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)\Big/\vartheta_\alpha$ 上的正则映象. 此外，这个 ϑ_α 必然满足 $\vartheta_\alpha\cap\bigotimes_{i=1}^{n} A_i=\{0\}$. 反之，对 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的每个闭双侧理想 ϑ，并且 $\vartheta\cap\bigotimes_{i=1}^{n} A_i=\{0\}$，必有 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上唯一的 c^*-范 $\alpha(\cdot)$，使得 $\vartheta=\vartheta_\alpha$.

特别，对 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上每个 c^*-范 $\alpha(\cdot)$，有

$$\alpha(u)=\inf\{\alpha_1(u+v)\,|\,v\in\vartheta_\alpha\},\quad\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n} A_i.$$

证. 设 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的 c^*-范,于是 $\alpha(\cdot)\leqslant\alpha_1(\cdot)$. 从而 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的恒等映象 I 可以扩充为 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 到 α-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的*同态. 但 $I\left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)$ 是 α-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的包含 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的 c^*-子代数,因此,$I\left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)=\alpha\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$. 记这个*同态的核为 ϑ_α, 它是 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的闭双侧理想, 并且由于 $Iu=u$, $\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$, 因此, $\vartheta_\alpha\cap\bigotimes_{i=1}^{n} A_i=\{0\}$. 于是我们自然地得到 α-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 到 $\left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)\Big/\vartheta_\alpha$ 上的*同构,使得 $u\to\tilde{u}$, $\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$.

今若 ϑ 是 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的闭双侧理想, Φ 是 α-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 到 $\left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)\Big/\vartheta$ 上的*同构, 使得 $\Phi(u)=\tilde{u}$, $\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$. 于是 $a\to\tilde{a}\to\Phi^{-1}(\tilde{a})$ 是 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 到 α-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的*同态,记这个*同态为 Ψ. 显然, Ψ 的核是 ϑ, 并且 $\Psi(u)=u$, $\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$. 因此, Ψ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上恒等映象的扩充,从而 $\vartheta=\vartheta_\alpha$.

反之,设 ϑ 是 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的闭双侧理想, 并且 $\vartheta\cap\bigotimes_{i=1}^{n} A_i=\{0\}$, 于是, $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 一一地嵌入 $\left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)\Big/\vartheta$ 之中. 这样 $\left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)\Big/\vartheta$ 的范数便决定 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上一个 c^*-范 $\alpha(\cdot)$. 于

是 a-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 与 $\left(a_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)\Big/\vartheta*$ 同构,并且 $u\to\tilde{u}$, $\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$, 从而 $\vartheta=\vartheta_a$. 证毕.

注 本节见参考文献 [46], [64], [115].

§4. 代数张量积上的态

设 $A_1,\cdots,A_n$ 是 c^*-代数, $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 是代数张量积.

命题 3.4.1 设 φ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的正泛函, 则有正常数 K, 使得

$$\left|\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right)\right|\leqslant K\|a_1\|\cdots\|a_n\|,\ \forall a_i\in A_i,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

证. 固定 $a_i\in(A_i)_+$, $2\leqslant i\leqslant n$, 则 $\varphi\left(\cdot\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)$ 是 A_1 上的正泛函,从而连续 (命题 2.3.2). 进而, $\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right)$ 对每个变量 a_i 分别是连续的. 再依一致有界定理,即得证.

命题 3.4.2 设 $A_i^{(1)}=A_i\dotplus\mathbb{C}1_i$ 是 A_i 添加单位元 1_i 的 c^*-代数, $1\leqslant i\leqslant n$, φ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的正泛函,则 φ 可开拓为 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i^{(1)}$ 上的正泛函 $\tilde{\varphi}$, 使得对 $\{1,\cdots,n\}$ 的任意子集 II 及 $a_j\in A_j$, $\forall j\notin \text{II}$, 有

$$\tilde{\varphi}\left(\bigotimes_{i\in\text{II}} 1_i\otimes\bigotimes_{j\notin\text{II}} a_j\right)=\lim_{l_i\in\text{II},l_i}\varphi\left(\bigotimes_{i\in\text{II}} d_{l_i}^{(i)}\otimes\bigotimes_{j\notin\text{II}} a_j\right),$$

这里 $\{d_{l_i}^{(i)}\}$ 是 A_i 的逼近单位元, $1\leqslant i\leqslant n$.

证. 对任意的 $a_i\in A_i$, $2\leqslant i\leqslant n$, 依命题 2.4.4, 下面的极限存在并且相等:

$$\lim_{l_1}\varphi\left(d_{l_1}^{(1)}\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)=\lim_{l_1}\varphi\left(d_{l_1}^{(1)2}\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)$$

今把 φ 扩张为 $A_1^{(1)}\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}A_i$ 上的线性泛函 $\tilde\varphi$，使得

$$\tilde\varphi\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_i\right)=\lim_{l_1}\varphi\left(d_{l_1}^{(1)}\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_i\right),\ \forall a_i\in A_i,\ 2\leqslant i\leqslant n,$$

对任意的 $x=\sum_j(\lambda_j1_1+a_j^{(1)})\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_j^{(i)}$，这里 $a_j^{(i)}\in A_i$，$\lambda_j\in\mathbb{C}$，$\forall i,j$，

$$\begin{aligned}\tilde\varphi(x^*x)&=\varphi\left(\sum_{j,k}(a_j^{(1)*}a_k^{(1)}+\bar\lambda_ja_k^{(1)}+\lambda_ka_j^{(1)*})\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_j^{(i)*}a_k^{(i)}\right)\\&\quad+\lim_{l_1}\sum_{j,k}\varphi\left(d_{l_1}^{(1)2}\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_j^{(i)*}a_k^{(i)}\right)\bar\lambda_j\lambda_k\\&=\lim_{l_1}\varphi\left(\left(\sum_j(\lambda_jd_{l_1}^{(1)}+a_j^{(1)})\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_j^{(i)}\right)^*\right.\\&\quad\left.\cdot\left(\sum_j(\lambda_jd_{l_1}^{(1)}+a_j^{(1)})\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_j^{(i)}\right)\right)\end{aligned}$$

从而 $\tilde\varphi$ 也是 $A_1^{(1)}\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}A_i$ 上的正泛函。如此手续，可以逐步进行到 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i^{(1)}$ 之上。证毕。

命题 3.4.3 设 φ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的正泛函，及 $\{d_{l_i}^{(i)}\}$ 是 A_i 的逼近单位元，$1\leqslant i\leqslant n$，则

$$\begin{aligned}\lim_{l_1,\cdots,l_n}\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n}d_{l_i}^{(i)}\right)&=\sup\left\{\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n}a_i\right)\right|\\&\qquad a_i\in(A_i)_+,\ \|a_i\|\leqslant1,\ 1\leqslant i\leqslant n\Bigg\}\\&=\sup\left\{\left|\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n}a_i\right)\right|\right|\\&\qquad a_i\in A_i,\ \|a_i\|\leqslant1,\ 1\leqslant i\leqslant n\Bigg\}.\end{aligned}$$

证。设 $\tilde\varphi$ 是 φ 如命题 3.4.2 的扩张，于是，

$$\lim_{l_1,\cdots,l_n} \varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} d_{l_i}^{(i)}\right) = \tilde{\varphi}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} 1_i\right),$$

如果 $a_i \in (A_i)_+$, $\|a_i\| \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 则在 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i^{(1)}$ 中,

$$\bigotimes_{i=1}^{n} 1_i \geqslant a_1 \otimes \bigotimes_{i=2}^{n} 1_i \geqslant \cdots \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} a_i.$$

因此, $\tilde{\varphi}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} 1_i\right) \geqslant \tilde{\varphi}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right) = \varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right)$. 又 $d_{l_i}^{(i)} \in (A_i)_+$, 且 $\|d_{l_i}^{(i)}\| \leqslant 1$, $\forall l_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 所以

$$\lim_{l_1,\cdots,l_n} \varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} d_{l_i}^{(i)}\right) = \sup\left\{\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right) \middle| \ a_i \in (A_i)_+,\ \|a_i\| \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\},$$

此外, 对任意的 $a_i \in A_i$, $\|a_i\| \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 由 Schwartz 不等式

$$\begin{aligned}\left|\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right)\right|^2 &= \left|\tilde{\varphi}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right)\right|^2 \\ &\leqslant \tilde{\varphi}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} 1_i\right)\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i^* a_i\right) \\ &\leqslant \sup\left\{\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \middle| \ b_i \in (A_i)_+,\ \|b_i\| \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\}.\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}&\sup\left\{\left|\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right)\right| \middle| \ a_i \in A_i,\ \|a_i\| \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \\ &= \sup\left\{\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right) \middle| \ a_i \in (A_i)_+,\ \|a_i\| \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\},\end{aligned}$$

证毕.

定义 3.4.4 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的正泛函 φ 称为态, 指

$$\sup\left\{\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right)\middle| a_i\in(A_i)_+,\ \|a_i\|\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}=1,$$

记 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上态的全体为 $\mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)$。

命题 3.4.5 设 $\varphi\in\mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)$，则存在唯一的 $\tilde{\varphi}\in\mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i^{(1)}\right)$，这里 $A_i^{(1)}=A_i\dotplus \mathbf{C}1_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，使得 $\tilde{\varphi}$ 是 φ 的扩张。

证。命题 3.4.2 已指出 $\tilde{\varphi}$ 的存在性。

今设 $\phi\in\mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i^{(1)}\right)$ 也是 φ 的扩张。对任意的 $a_i\in(A_i)_+$，$2\leqslant i\leqslant n$，则

$$\phi\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)\geqslant\phi\left(d_l\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)=\varphi\left(d_l\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right),$$

这里 $\{d_l\}$ 是 A_1 的逼近单位元。于是依命题 3.4.2，

$$\phi\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)\geqslant\tilde{\varphi}\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right).$$

如果存在 $a_i\in(A_i)_+$，$\|a_i\|<1$，$2\leqslant i\leqslant n$，使得

$$\phi\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)-\tilde{\varphi}\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)=\delta>0,$$

当 $b_i\in(A_i)_+$，$\|b_i\|<1$，$b_i\geqslant a_i$，$2\leqslant i\leqslant n$ 时，

$$\begin{aligned}
&\phi\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} b_i\right)-\tilde{\varphi}\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} b_i\right)\\
&=\left[\phi\left(1_1\otimes(b_2-a_2)\otimes\bigotimes_{i=3}^{n} b_i\right)\right.\\
&\qquad\left.-\tilde{\varphi}\left(1_1\otimes(b_2-a_2)\otimes\bigotimes_{i=3}^{n} b_i\right)\right]\\
&\qquad+\left[\phi\left(1_1\otimes a_2\otimes(b_3-a_3)\otimes\bigotimes_{i=4}^{n} b_i\right)\right.\\
&\qquad\left.-\tilde{\varphi}\left(1_1\otimes a_2\otimes(b_3-a_3)\otimes\bigotimes_{i=4}^{n} b_i\right)\right]+\cdots
\end{aligned}$$

$$+\left[\phi\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_i\right)-\tilde{\varphi}\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_i\right)\right]\geq\delta,$$

从而，$1\geq\phi\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}b_i\right)\geq\tilde{\varphi}\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}b_i\right)+\delta$，进而

$$1\geq\sup\left\{\tilde{\varphi}\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}b_i\right)\middle|\,b_i\geq a_i,\ \|b_i\|<1,\ 2\leq i\leq n\right\}+\delta,$$

但依命题 2.2.11 及态的定义，

$$\sup\left\{\tilde{\varphi}\left(1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}b_i\right)\middle|\,b_i\geq a_i,\ \|b_i\|<1,\ 2\leq i\leq n\right\}=1,$$

矛盾。因此，ϕ 与 $\tilde{\varphi}$ 在 $A_1^{(1)}\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}A_i$ 上相同。继续递推，可见 $\phi=\tilde{\varphi}$。证毕。

命题 3.4.6 设 $\varphi\in\mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\right)$，则 φ 可唯一扩张成 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的态。特别

$$\alpha_1(u)^2=\sup\left\{\varphi(u^*u)\,|\,\varphi\in\mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\right)\right\},\quad\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i.$$

证。依命题 3.4.5，φ 可唯一扩张成 $\tilde{\varphi}\in\mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i^{(1)}\right)$，这里 $A_i^{(1)}=A_i\dot{+}\mathbb{C}1_i$，$1\leq i\leq n$。令

$$\vartheta=\left\{x\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i^{(1)}\middle|\,\tilde{\varphi}(x^*x)=0\right\},$$

它是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i^{(1)}$ 的左理想。设 $x\to\tilde{x}$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i^{(1)}$ 到 $\left(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i^{(1)}\right)\Big/\vartheta$ 上的正则映象，并定义 $\left(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i^{(1)}\right)\Big/\vartheta$ 上的内积

$$\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle=\tilde{\varphi}(y^*x),\quad\forall x,\ y\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i^{(1)},$$

依此完备化，得到 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$。对任意的 $x\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i^{(1)}$，令

$$\pi(x)\tilde{y} = \widetilde{xy}, \quad \forall y \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i^{(1)}.$$

如果 $x_i \in A_i^{(1)}$，$\|x_i\| \leqslant 1$，$1 \leqslant i \leqslant n$，由于在 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i^{(1)}$ 中，$\bigotimes_{i=1}^{n} x_i^* x_i \leqslant \bigotimes_{i=1}^{n} 1_i$，因此，$\left\|\pi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} x_i\right)\tilde{y}\right\|^2 = \tilde{\varphi}\left(y^* \cdot \bigotimes_{i=1}^{n} x_i^* x_i \cdot y\right) \leqslant \tilde{\varphi}(y^* y) = \|\tilde{y}\|^2$. 从而，$\pi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} x_i\right)$ 可扩张为 $\mathscr{H}$ 中的有界线性算子.一般,我们便有 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i^{(1)}$ 的 * 表示 $\{\pi, \mathscr{H}\}$，并且

$$\tilde{\varphi}(x) = \left\langle \pi(x) \widetilde{\bigotimes_{i=1}^{n} 1_i}, \widetilde{\bigotimes_{i=1}^{n} 1_i} \right\rangle, \quad \forall x \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i^{(1)},$$

进而，依命题 3.3.2，

$$|\varphi(u)| = |\tilde{\varphi}(u)| \leqslant \|\pi(u)\| \leqslant \alpha_1(u), \quad \forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i.$$

因此，φ 可唯一扩张为 α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的态.

当然，α_1-$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的态限于 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 仍然是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的态，所以，$\alpha_1(u)^2 = \sup\left\{\varphi(u^* u) \mid \varphi \text{ 是 } \alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i \text{ 上的态}\right\} = \sup\left\{\varphi(u^* u) \mid \varphi \in \mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)\right\}$，$\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$. 证毕.

命题 3.4.7 设 $\varphi \in \mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)$，则通过 GNS 构造，可以得到 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的循环 * 表示 $\{\pi, \mathscr{H}, \xi\}$，使得

$$\varphi(u) = \langle \pi(u)\xi, \xi \rangle, \quad \forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i,$$

这里 $\xi \in \mathscr{H}$，并且 $\|\xi\| = 1$.

证. 依命题 3.4.6, φ 可唯一开拓为 $\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的态, 仍记为 φ. 令

$$\vartheta = \left\{ u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \,\middle|\, \varphi(u^* u) = 0 \right\},$$

$$\vartheta_\varphi = \left\{ a \in \alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i \,\middle|\, \varphi(a^* a) = 0 \right\}$$

自然 $\vartheta \subset \vartheta_\varphi$. 设 $u \to \tilde{u}$, $a \to a_\varphi$ 分别是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 到 $\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right) \Big/ \vartheta$ 上及 $\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 到 $\left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right) \Big/ \vartheta_\varphi$ 上的正则映象, 我们有图

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & \tilde{u} \in \left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right) \Big/ \vartheta & \longrightarrow & \mathscr{H} \\ u \in \bigotimes A_i & & & & \big\downarrow U \\ & \searrow & u_\varphi \in \left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right) \Big/ \vartheta_\varphi & \longrightarrow & \mathscr{H}_\varphi \end{array}$$

这里 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 φ 产生的 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的 * 表示(算子 $\pi(u)$ 的有界性可仿命题 3.4.6 的证明), $\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi, \xi_\varphi\}$ 是 φ 产生的 $\left(\alpha_1\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)$ 的循环 * 表示. 易见 U 可以扩张为 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_\varphi$ 上的酉算子, 并且 $\pi(u) = U^{-1}\pi_\varphi(u)U$, $\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$. 再令 $\xi = U^{-1}\xi_\varphi$, 即得证.

命题 3.4.8 设 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的 c^*-范, $\Gamma = \left\{ \varphi \in \mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right) \,\middle|\, \varphi \text{ 依 } \alpha(\cdot) \text{ 连续} \right\}$, 则对任意的 $u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$,

$$\alpha(u) = \sup\{\varphi(u^*u)^{\frac{1}{2}} \mid \varphi \in \Gamma\} = \sup\{\|\pi_\varphi(u)\| \mid \varphi \in \Gamma\},$$

这里 $\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi, \xi_\varphi\}$ 是 φ 产生的 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的循环 * 表示,

$\forall\varphi\in\Gamma$.

证. 由于 $\Gamma=\left\{\rho\text{ 限于 }\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\,\middle|\,\rho\in\mathscr{S}\left(\alpha\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\right)\right\}$, 所以有第一个等式. 当 $\varphi\in\Gamma$ 时, 仿命题 3.4.7 的证明 (但那里的 $\alpha_1(\cdot)$ 代以 $\alpha(\cdot)$), $\|\pi_\varphi(u)\|\leqslant\alpha(u)$. 另一方面, $\varphi(u^*u)=\langle\pi_\varphi(u^*u)\xi_\varphi,\xi_\varphi\rangle\leqslant\|\pi_\varphi(u)\|^2$, 由此即得证.

注 本节见参考文献 [29], [64], [65]

§5. 不等式 $\lambda(\cdot)\leqslant\alpha_0(\cdot)\leqslant\alpha(\cdot)\leqslant\gamma(\cdot)$

引理 3.5.1 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是 c^*-代数, 并且 A_n 无单位元. 如果 $x\in\bigotimes_{i=1}^{n-1}A_i\otimes A_n^{(1)}$, 这里 $A_n^{(1)}=A_n\dot{+}\mathbb{C}1_n$, 使得 $xv=0$, $\forall v\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$, 则 $x=0$.

证. 无妨认为 $A_i\subset B(\mathscr{H}_i)$, 并且 A_i 在 $\mathscr{H}_i$ 中是非退化的, $1\leqslant i\leqslant n$. 由于 A_n 无单位元, 也可认为 1_n 即 $\mathscr{H}_n$ 中的恒等算子. 若 $\xi_i,\eta_i\in\mathscr{H}_i$, $\langle\cdot\xi_i,\eta_i\rangle\in A_i^*$, $1\leqslant i\leqslant n$, 于是

$$\left\langle xv\bigotimes_{i=1}^{n}\xi_i,\bigotimes_{i=1}^{n}\eta_i\right\rangle=0,\ \forall v\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i,\ \xi_i,\eta_i\in\mathscr{H}_i,\ 1\leqslant$$

$i\leqslant n$. 因此, x 是 $\bigotimes_{i=1}^{n}\mathscr{H}_i$ 中的零算子. 依定理 3.2.9, $\|x\|=\alpha_0(x)=0$, 所以, $x=0$. 证毕.

命题 3.5.2 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是 c^*-代数, 并且 A_n 无单位元. 如果 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的 c^*-范, 令

$$\tilde{\alpha}(x)=\sup\left\{\alpha(xu)\,\middle|\,u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i,\ \alpha(u)\leqslant1\right\},$$

$\forall x\in\bigotimes_{i=1}^{n-1}A_i\otimes A_n^{(1)}$, 这里 $A_n^{(1)}=A_n\dot{+}\mathbb{C}1_n$, 则 $\tilde{\alpha}(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n-1}A_i\otimes A_n^{(1)}$

上的 c^*-范，并且是 $\alpha(\cdot)$ 的扩张．此外，如果 $\{d_{l_i}^{(i)}\}$ 是 A_i 的逼近单位元，$1\leqslant i\leqslant n$，则

$$\tilde{\alpha}(x)=\lim_{l_1,\cdots,l_n}\alpha\left(x\cdot\bigotimes_{i=1}^{n}d_{l_i}^{(i)}\right),\quad\forall\, x\in\bigotimes_{i=1}^{n-1}A_i\otimes A_n^{(1)}.$$

证．依命题 3.2.2，$\alpha\left(\bigotimes_{i=1}^{n}a_i\right)$ 对每个变量 a_i 依 A_i 中的范数是连续的，于是对 $x\in\bigotimes_{i=1}^{n-1}A_i\otimes A_n^{(1)}$ 及 $v\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$，$\alpha(v)\leqslant 1$，$\alpha\ (xv)=\lim_{l_1,\cdots,l_n}\alpha\left(x\cdot\bigotimes_{i=1}^{n}d_{l_i}^{(i)}\cdot v\right)$．由此对任意的 $\varepsilon>0$，当$(l_1,\cdots,l_n)$ 充分大时，

$$\alpha(xv)\leqslant\alpha\left(x\cdot\bigotimes_{i=1}^{n}d_{l_i}^{(i)}\cdot v\right)+\varepsilon\leqslant\alpha\left(x\cdot\bigotimes_{i=1}^{n}d_{l_i}^{(i)}\right)+\varepsilon$$
$$\leqslant\sup\left\{\alpha(xu)\,\middle|\,u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i,\ \alpha(u)\leqslant 1\right\}+\varepsilon,$$

这就说明对任意的 $x\in\bigotimes_{i=1}^{n-1}A_i\otimes A_n^{(1)}$，有

$$\tilde{\alpha}(x)=\sup\left\{\alpha(xu)\,\middle|\,u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i,\ \alpha(u)\leqslant 1\right\}$$
$$=\lim_{l_1,\cdots,l_n}\alpha\left(x\cdot\bigotimes_{i=1}^{n}d_{l_i}^{(i)}\right).$$

特别地，$\tilde{\alpha}(\cdot)$ 是 $\alpha(\cdot)$ 的扩张．

由引理 3.5.1，$\tilde{\alpha}(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n-1}A_i\otimes A_n^{(1)}$ 上的范数．此外，

$$\alpha(xyu)=\lim_{l_1,\cdots,l_n}\alpha\left(x\cdot\bigotimes_{i=1}^{n}d_{l_i}^{(i)}\cdot yu\right)\leqslant\tilde{\alpha}(x)\tilde{\alpha}(y),$$

$\forall\, u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$，$\alpha(u)\leqslant 1$，所以，$\tilde{\alpha}(xy)\leqslant\tilde{\alpha}(x)\tilde{\alpha}(y)$，$\forall\, x,\ y\in\bigotimes_{i=1}^{n-1}A_i\otimes A_n^{(1)}$．同时由

$$\tilde{\alpha}(x^*)\tilde{\alpha}(x) \geqslant \tilde{\alpha}(x^*x) \geqslant \sup\left\{\alpha(u^*x^*xu) \mid u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i,\right.$$

$$\left.\alpha(u) \leqslant 1\right\} = \tilde{\alpha}(x)^2$$

可见 $\tilde{\alpha}(x^*x) = \tilde{\alpha}(x)^2$，即 $\tilde{\alpha}(\cdot)$ 是 c^*-范。证毕。

命题 3.5.3 设 $A_i \cong C(\Omega_i)$，这里 Ω_i 是紧 Hausdorff 空间，$1 \leqslant i \leqslant n$，则 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上仅有一个 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$，并且 $\alpha_0(\cdot) = \lambda(\cdot)$ 以及 $\lambda\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i \cong C(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n)$。

证。设 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上任意的 c^*-范，于是，$\alpha\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 是有单位元的 c^*-代数，设其谱空间是 Ω。如果 $\varphi \in \Omega$，由于 $\varphi\left(\bigotimes_{l \neq i} 1_l \otimes \cdot\right)$ 也是 A_i 上的非零乘法泛函，$1 \leqslant i \leqslant n$（这里 1_l 是 A_l 的单位元），于是可唯一地写 $\varphi(u) = \bigotimes_{i=1}^{n} \varphi_i(u)$，$\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$，这里 $\varphi_i \in \Omega_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$。因此，$\Omega$ 可嵌入 $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ 之中，易见这个嵌入也是拓扑的。Ω 又是紧的，所以可把 Ω 看为 $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ 的闭子集。若 $\Omega \neq \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$，则有 Ω_i 的非空开子集 U_i，$1 \leqslant i \leqslant n$，使得 $(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap \Omega = \varnothing$。取 $a_i \in A_i$，$a_i \neq 0$，使得 $\operatorname{supp} a_i(\cdot) \subset U_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$。于是 $\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right) = 0$，$\forall \varphi \in \Omega$。这将与 $\bigotimes_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ 相矛盾。所以，$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$，即

$$\alpha\text{-}\bigotimes_{i=1}^{n} A_i \cong C(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n),$$

从而 $\alpha(\cdot) = \alpha_0(\cdot)$。此外，对任意的 $u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$，

$$\alpha_0(u)=\sup\left\{\left|\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i(u)\right|\middle|\varphi_i\in\Omega_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$$
$$\leqslant\sup\left\{\left|\bigotimes_{i=1}^{n}f_i(u)\right|\middle|f_i\in A_i^*,\ \|f_i\|\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$$
$$=\lambda(u)$$

再依定理 3.2.5，$\alpha_0(u)=\lambda(u)$. 证毕。

命题 3.5.4 设 A_i 是有单位元 1_i 的 c^*-代数，$1\leqslant i\leqslant n$，$\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的 c^*-范，令 $\beta(\cdot)$ 是 $\alpha(\cdot)$ 限于 $1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}A_i$ 所诱导的 $\bigotimes_{i=2}^{n}A_i$ 上的 c^*-范. 如果 φ 是 α-$\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的态，并且 $\chi(\cdot)=\varphi\left(\cdot\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}1_i\right)$ 是 A_1 上的纯态，则可唯一地写 $\varphi=\chi\otimes\phi$，其中 ϕ 是 β-$\bigotimes_{i=2}^{n}A_i$ 上的态。

证。令 $\phi(v)=\varphi(1_1\otimes v)$，$\forall v\in\bigotimes_{i=2}^{n}A_i$，显然 ϕ 可扩张为 β-$\bigotimes_{i=2}^{n}A_i$ 上的态. 今只须证明

$$\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n}a_i\right)=\chi(a_1)\phi\left(\bigotimes_{i=2}^{n}a_i\right),\ \forall 0\neq a_i\in(A_i)_+,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

如果 $\phi\left(\bigotimes_{i=2}^{n}a_i\right)=0$，依 Schwartz 不等式

$$0\leqslant\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n}a_i\right)=\varphi\left(a_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_i^{\frac{1}{2}}\cdot 1_1\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_i^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\leqslant\varphi\left(a_1^2\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\phi\left(\bigotimes_{i=2}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{2}}=0$$

所以，$\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n}a_i\right)=\chi(a_1)\phi\left(\bigotimes_{i=2}^{n}a_i\right)=0$。

如果 $\phi\left(\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)=\prod_{i=2}^{n}\|a_i\|$，由于 $v=\prod_{i=2}^{n}\|a_i\|\bigotimes_{i=2}^{n}1_i-\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\in\left(\bigotimes_{i=2}^{n}A_i\right)_+$ 及 $0=\|a_1\|\varphi(1_1\otimes v)\geqslant\varphi(a_1\otimes v)\geqslant 0$，所以，$\varphi(a_1\otimes v)=0$，即 $\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right)=\chi(a_1)\phi\left(\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)$。

今设 $0<\lambda=\phi\left(\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)<\prod_{i=2}^{n}\|a_i\|$，$\mu=\prod_{i=2}^{n}\|a_i\|-\lambda$ 及 $\rho_1(\cdot)=\lambda^{-1}\varphi\left(\cdot\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)$，$\rho_2(\cdot)=\mu^{-1}\left[\prod_{i=2}^{n}\|a_i\|\varphi\left(\cdot\otimes\bigotimes_{i=2}^{n}1_i\right)-\varphi\left(\cdot\otimes\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right)\right]$，则 ρ_1，ρ_2 是 A_1 上的态，并且

$$\chi(\cdot)=\left(\prod_{i=2}^{n}\|a_i\|\right)^{-1}\lambda\rho_1(\cdot)+\left(\prod_{i=2}^{n}\|a_i\|\right)^{-1}\mu\rho_2(\cdot)$$

但 χ 是 A_1 上的纯态，因此，$\chi=\rho_1=\rho_2$，即

$$\varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{n} a_i\right)=\lambda\rho_1(a_1)=\lambda\chi(a_1)=\chi(a_1)\phi\left(\bigotimes_{i=2}^{n} a_i\right),$$

证毕。

系 3.5.5 设 A_i 是有单位元 1_i 的 c^*-代数，$1\leqslant i\leqslant n$，$\varphi\in\mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\right)$，并且对 $1\leqslant i\leqslant k$ $(k\leqslant n)$，$\chi_i(\cdot)=\varphi\left(\cdot\otimes\bigotimes_{j\neq i}1_j\right)$ 是 A_i 上的纯态，则

$$\varphi=\chi_1\otimes\cdots\otimes\chi_k\otimes\phi,$$

这里 $\phi\in\mathscr{S}\left(\bigotimes_{i=k+1}^{n}A_i\right)$。此外，如果 φ 依 $\otimes A_i$ 上的 c^*-范 $\alpha(\cdot)$ 是连续的，则 ϕ 也依 $\beta(\cdot)$ 连续，这里 $\beta(\cdot)$ 是 $\alpha(\cdot)$ 限于 $\bigotimes_{i=1}^{k}1_i\otimes\bigotimes_{i=k+1}^{n}A_i$ 所诱导的 $\bigotimes_{i=k+1}^{n}A_i$ 上的 c^*-范。

命题 3.5.6 设 A_i 是有单位元 1_i 的 c^*-代数，$1\leqslant i\leqslant n$，并

且 $A_1, \cdots, A_k$ 是交换的 ($k \leqslant n$)。如果 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的 c^*-范，及 φ 是 $\alpha-\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的纯态，则

$$\varphi = \chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_k \otimes \phi$$

这里 $\chi_i(\cdot) = \varphi\left(\cdot \otimes \bigotimes_{j \neq i} 1_j\right)$ 是 A_i 上的纯态，$1 \leqslant i \leqslant k$，$\phi(v) = \varphi\left(\bigotimes_{i=1}^{k} 1_i \otimes v\right)\left(\forall v \in \bigotimes_{i=k+1}^{n} A_i\right)$ 可开拓为 $\beta-\bigotimes_{i=k+1}^{n} A_i$ 上的纯态，$\beta(\cdot)$ 是 $\alpha(\cdot)$ 限于 $\bigotimes_{i=1}^{k} 1_i \otimes \bigotimes_{i=k+1}^{n} A_i$ 所诱导的 $\bigotimes_{i=k+1}^{n} A_i$ 上的 c^*-范。

证。φ 产生 $A = \alpha - \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 的不可约循环 * 表示 $\{\pi, \mathscr{H}, \xi\}$，所以，$\pi(A)' = \mathbf{C}1_{\mathscr{H}}$。由于 A_i 是交换的，因此有 A_i 上的线性泛函 χ_i，使得 $\pi\left(\cdot \otimes \bigotimes_{j \neq i} 1_j\right) = \chi_i(\cdot)1_{\mathscr{H}}$，易见 χ_i 是 A_i 上的非零乘法泛函，即为 A_i 上的纯态，$1 \leqslant i \leqslant k$。依系 3.5.5，$\varphi = \chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_k \otimes \phi$。

还须证明 ϕ 是 $\beta-\bigotimes_{i=k+1}^{n} A_i$ 上的纯态，设有 $\beta-\bigotimes_{i=k+1}^{n} A_i$ 上的态 ϕ_1，ϕ_2 及数 $\lambda \in (0, 1)$，使得 $\phi = \lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2$。于是对任意的 $u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$，

$$|\chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_k \otimes \phi_j(u)|^2 \leqslant \chi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_j(u^*u)$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}\right)\varphi(u^*u) \leqslant \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}\right)\alpha(u)^2.$$

因此，$\chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_k \otimes \phi_j$ 可唯一扩张为 $\alpha-\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的态 φ_j，$j = 1, 2$。显然，$\varphi = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$。但 φ 是 $\alpha-\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上

的纯态，所以，$\varphi=\varphi_1=\varphi_2$. 进而，$\psi=\psi_1=\psi_2$. 证毕.

引理 3.5.7 设 A 是有单位元的 c^*-代数，ε 是 $(\mathscr{S},\sigma(A^*,A))$ 的紧凸子集，这里 $\mathscr{S}$ 是 A 的态空间. 如果对任意的 $h^*=h\in A$，有 $\varphi\in\varepsilon$，使得

$$\varphi(h)=\max\{\lambda\mid\lambda\in\sigma(h)\},$$

则 $\varepsilon=\mathscr{S}$.

证. 若有 $\rho\in\mathscr{S}\setminus\varepsilon$，依分离性定理，有 $h^*=h\in A$，使得 $\rho(h)>\sup\{\varphi(h)\mid\varphi\in\varepsilon\}$. 但 $\rho(h)\leqslant\max\{\lambda\mid\lambda\in\sigma(h)\}$，这便与假设相矛盾，证毕.

引理 3.5.8 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是 c^*-代数，$\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ 上的 c^*-范，则 $\alpha(\cdot)\geqslant\alpha_0(\cdot)$，当且仅当，$\bigotimes_{i=1}^n\varphi_i$ 依 $\alpha(\cdot)$ 是连续的，$\forall\varphi_i\in\mathscr{S}_i$，这里 $\mathscr{S}_i$ 是 A_i 的态空间，$1\leqslant i\leqslant n$.

证. 必要性由之见系 3.2.6. 反之，当 $\varphi_i\in\mathscr{S}_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，$\bigotimes_{i=1}^n\varphi_i$ 是 $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ 上的态时，且依 $\alpha(\cdot)$ 连续，于是

$$\bigotimes_{i=1}^n\varphi_i(v^*(\alpha(u^*u)-u^*u)v)\geqslant 0,\ \forall u,\ v\in\bigotimes_{i=1}^n A_i,$$

再依定理 3.2.5，即见 $\alpha(\cdot)\geqslant\alpha_0(\cdot)$. 证毕.

命题 3.5.9 设 $A_i\cong C(\Omega_i)$，这里 Ω_i 是紧 Hausdorff 空间，$1\leqslant i\leqslant n-1$，$A_n$ 是有单位元 1_n 的 c^*-代数，则在 $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ 上仅有一个 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$，并且 $\alpha_0(\cdot)=\lambda(\cdot)$，及

$$\lambda-\bigotimes_{i=1}^n A_i\cong C(\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{n-1},A_n).$$

证. 设 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ 上的 c^*-范，并任意取定 $\chi_i\in\Omega_i$（即为 A_i 上的纯态），$1\leqslant i\leqslant n-1$，令

$$\varepsilon=\left\{\chi_n\mid\chi_n\text{ 是 }A_n\text{ 上的态，并且 }\bigotimes_{i=1}^n\chi_i\text{ 依 }\alpha(\cdot)\text{ 连续}\right\}.$$

显然 ε 是 $(\mathscr{S}_n, \sigma(A_n^*, A_n))$ 的紧凸子集，这里 $\mathscr{S}_n$ 是 A_n 的态空间。对任意的 $h^*=h\in A_n$，设 B 是 $\{1_n, h\}$ 生成的 A_n 的交换 c^*-子代数，自然有 B 上的态 ϕ_B，使得 $\phi_B(h)=\max\{\lambda|\lambda\in\sigma(h)\}$。依命题 3.5.3，在 $\bigotimes_{i=1}^{n-1} A_i\otimes B$ 上只有一个 c^*-范，再依系 3.2.6，可见 $\bigotimes_{i=1}^{n-1}\chi_i\otimes\phi_B$ 在 $\bigotimes_{i=1}^{n-1}A_i\otimes B$ 上依 $\alpha(\cdot)$ 是连续的，从而 $\bigotimes_{i=1}^{n-1}\chi_i\otimes\phi_B$ 可扩充为 $\alpha-\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的态 φ（系 2.3.12）。显然，$\varphi\left(\cdot\otimes\bigotimes_{j\neq i}1_j\right)=\chi_i(\cdot)$，$1\leqslant i\leqslant n-1$，于是依系 3.5.5，$\varphi=\bigotimes_{i=1}^{n}\chi_i$，这里 χ_n 是 A_n 上的态，且为 ϕ_B 的开拓，特别，$\chi_n(h)=\phi_B(h)$。今依引理 3.5.7，$\varepsilon=\mathscr{S}_n$。这就说明 $\left\{\bigotimes_{i=1}^{n}\chi_i|\chi_i\in\Omega_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-1,\ \chi_n\in\mathscr{S}_n\right\}$ 都是 $\alpha(\cdot)$ 连续的，进而 $\bigotimes_{i=1}^{n}\varphi_i$ 都是 $\alpha(\cdot)$ 连续的，$\forall\varphi_i\in\mathscr{S}_i$，$1\leqslant i\leqslant n$。依引理 3.5.8，$\alpha(\cdot)\geqslant\alpha_0(\cdot)$。

另一方面，如果 φ 是 $\alpha-\otimes A_i$ 上的纯态，依命题 3.5.6，$\varphi=\bigotimes_{i=1}^{n}\chi_i$，这里 χ_i 是 A_i 上的纯态，$1\leqslant i\leqslant n$，所以，

$$
\begin{aligned}
\alpha(u^*u)&=\alpha(u)^2\\
&=\sup\left\{\varphi(u^*u)|\varphi\ 是\ \alpha-\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\ 上的纯态\right\}\\
&=\sup\left\{\bigotimes_{i=1}^{n}\chi_i(u^*u)|\chi_i\ 是\ A_i\ 上的纯态\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}\\
&\leqslant\lambda(u^*u)\leqslant\alpha_0(u^*u)=\alpha_0(u)^2,\quad\forall u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i,
\end{aligned}
$$

即 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上仅有一个 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$。

对每个 $u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$，可唯一地写 $u=u(t_1,\cdots,t_{n-1})$，这里 $u(t_1,\cdots,t_{n-1})$ 是 $\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{n-1}$ 到 A_n 中的连续映象. 显然，$\|u\|=\max\ \{\|u(t_1,\ \cdots,\ t_{n-1})\|\,|\,t_i\in\Omega_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-1\}$ 将是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的 c^*-范，因此，$\|u\|=\alpha_0(u)$，即

$$\alpha_0-\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\cong C(\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{n-1},A_n).$$

最后，对任意的 $u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$，由于

$$\begin{aligned}\alpha_0(u)&=\sup\{|f_n(u(t_1,\cdots,t_{n-1}))|\,|\,f_n\in A_n^*,\\&\qquad\|f_n\|\leqslant1,\,t_i\in\Omega_i,\,1\leqslant i\leqslant n-1\}\\&\leqslant\sup\left\{\left|\bigotimes_{i=1}^{n}f_i(u)\right|\,\middle|\,f_i\in A_i^*,\ \|f_i\|\leqslant1,\,1\leqslant i\leqslant n\right\}\\&=\lambda(u),\end{aligned}$$

因此，$\alpha_0(\cdot)=\lambda(\cdot)$. 证毕.

定理 3.5.10 设 A_i 是 c^*-代数，$1\leqslant i\leqslant n$，$\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的 c^*-范，则 $\lambda(\cdot)\leqslant\alpha_0(\cdot)\leqslant\alpha(\cdot)\leqslant\gamma(\cdot)$. 特别，$\alpha(\cdot)$ 必是交叉范.

证. 只须证明 $\alpha(\cdot)\geqslant\alpha_0(\cdot)$. 依命题 3.5.2，$\alpha(\cdot)$ 可以开拓为 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i'$ 上的 c^*-范，这里 $A_i'=A_i$（如果 A_i 有单位元）或者 $A_i\dotplus\mathbb{C}1_i$（如果 A_i 无单位元）. 又依定理 3.2.9，$\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的 $\alpha_0(\cdot)$ 可以开拓为 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i'$ 上的 $\alpha_0(\cdot)$，因此，无妨假定 A_i 有单位元 1_i，$1\leqslant i\leqslant n$.

如果 $A_1,\cdots,A_n$ 中有 $(n-1)$ 个是交换的，依命题 3.5.9 即得证. 现在归纳假定：如果 $A_1,\cdots,A_n$ 中有 k 个是交换的，则 $\alpha(\cdot)\geqslant\alpha_0(\cdot)$，这里 $k\leqslant n-1$.

今设 $A_1, \cdots, A_{k-1}$ 是交换的，χ_i 是 A_i 上的纯态，$1 \leqslant i \leqslant n-1$，并令 $\varepsilon = \left\{x_n \in \mathscr{S}_n \mid \bigotimes_{i=1}^{n} \chi_i \text{ 依 } \alpha(\cdot) \text{ 连续}\right\}$。于是 ε 是 $(\mathscr{S}_n, \sigma(A_n^*, A_n))$ 的紧凸子集，这里 $\mathscr{S}_n$ 是 A_n 的态空间。对任意的 $h^* = h \in A_n$，令 B 是由 $\{1_n, h\}$ 生成的 A_n 的交换 c^*-子代数，并取 B 上的态 ϕ_B，使得 $\phi_B(h) = \max\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(h)\}$。由于 $\{A_1, \cdots, A_{n-1}, B\}$ 中有 k 个是交换的，在 $\bigotimes_{i=1}^{n-1} A_i \otimes B$ 上，$\alpha(\cdot) \geqslant \alpha_0(\cdot)$。再依系 3.2.6，$\bigotimes_{i=1}^{n-1} \chi_i \otimes \phi_B$ 在 $\bigotimes_{i=1}^{n-1} A_i \otimes B$ 上依 $\alpha(\cdot)$ 是连续的，从而 $\bigotimes_{i=1}^{n-1} \chi_i \otimes \phi_B$ 可扩充为 $\alpha - \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的态 φ。依系 3.5.5，$\varphi = \bigotimes_{i=1}^{n} \chi_i$，其中 χ_n 是 A_n 上的态，且为 ϕ_B 的开拓，特别，$\chi_n(h) = \phi_B(h)$。从而由引理 3.5.7，$\varepsilon = \mathscr{S}_n$。进而可见，$\bigotimes_{i=1}^{n} \varphi_i$ 依 $\alpha(\cdot)$ 连续，$\forall \varphi_i \in \mathscr{S}_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$。再由引理 3.5.8，$\alpha(\cdot) \geqslant \alpha_0(\cdot)$。证毕。

引理 3.5.11 设 Φ 是 c^*-代数 A 到 c^*-代数 B 上的 $*$ 同态，则 Φ^* 是 B^* 到 A^* 的等距映象。

证。设 $\mathscr{I} = \{a \in A \mid \Phi(a) = 0\}$，它是 A 的闭双侧理想，于是 $A/\mathscr{I}$ 与 B $*$ 同构。因此，对任意的 $b \in B$，$\|b\| = \inf\{\|a\| \mid a \in A, \Phi(a) = b\}$。特别

$$\{b \in B \mid \|b\| < 1\} \subset \Phi(\{a \in A \mid \|a\| < 1\}),$$

于是对任意的 $g \in B^*$，

$$\begin{aligned}\|\Phi^*(g)\| &= \sup\{|g(\Phi(a))| \mid a \in A, \|a\| \leqslant 1\} \\ &\geqslant \sup\{|g(b)| \mid b \in B, \|b\| < 1\} = \|g\|.\end{aligned}$$

又显然 $\|\Phi^*\| = \|\Phi\| \leqslant 1$，因此，$\Phi^*$ 是等距的。证毕。

命题 3.5.12 设 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 上的 c^*-范，则 $\alpha^*(\cdot)$ 是

$\bigotimes\limits_{i=1}^{n} A_i^*$ 上不随 $\alpha(\cdot)$ 而异的交叉范.

证. 依定理 3.5.10 及命题 3.1.3, $\alpha^*(\cdot)$ 是 $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} A_i^*$ 上的交叉范. 由于 $\alpha_0^*(\cdot) \geqslant \alpha^*(\cdot) \geqslant \alpha_1^*(\cdot)$, 因此只须在 $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} A_i^*$ 上证明 $\alpha_0^*(\cdot) = \alpha_1^*(\cdot)$. 自然地定义 $\alpha_1 - \bigotimes\limits_{i=1}^{n} A_i$ 到 $\alpha_0 - \bigotimes\limits_{i=1}^{n} A_i$ 上的 * 同态 Φ, 使得 $\Phi(u) = u$, $\forall u \in \bigotimes\limits_{i=1}^{n} A_i$. 对任意的 $\omega \in \bigotimes\limits_{i=1}^{n} A_i^*$, 易见 $\alpha_0^*(\omega)$ 正是 ω 作为 $\left(\alpha_0 - \bigotimes\limits_{i=1}^{n} A_i\right)^*$ 元的范数. 从而由 Φ^*: $\left(\alpha_0 - \bigotimes\limits_{i=1}^{n} A_i\right)^* \to \left(\alpha_1 - \bigotimes\limits_{i=1}^{n} A_i\right)^*$ 及引理 3.5.11,

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^*(\omega) &= \sup\left\{ |\omega(u)| \,\middle|\, u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i,\ \alpha_1(u) \leqslant 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ |\omega(\Phi(u))| \,\middle|\, u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i,\ \alpha_1(u) \leqslant 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ |\Phi^*(\omega)(u)| \,\middle|\, u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i,\ \alpha_1(u) \leqslant 1 \right\} \\
&= \|\Phi^*(\omega)\| = \alpha_0^*(\omega)
\end{aligned}
$$

证毕.

注 本节见参考文献 [65], [97], [115], [132].

§6. 全 正 映 象

设 n 是正整数, 记 $\mathscr{H}_n$ 为 n 维的 Hilbert 空间, $M_n = B(\mathscr{H}_n)$ 即 $n \times n$ 阶的矩阵代数.

引理 3.6.1 设 n 是正整数, A 是任意的 c^*-代数, 则 $M_n \otimes A$ 上仅有一个 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$, 并且 $M_n \otimes A$ 依 $\alpha_0(\cdot)$ 就是 c^*-代

数. 此外，如果A是$\mathscr{H}$中的c^*-代数，则$M_n\otimes A^*$同构于$\mathscr{H}\oplus\cdots\oplus\mathscr{H}$（$n$个）中的$c^*$-代数

$$M_n(A)=\{(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\,|\,a_{ij}\in A,\ \forall i,j\},$$

并且

$$M_n(A)^*=M_n(A^*)=\{(f_{ij})_{1\le i,j\le n}\,|\,f_{ij}\in A^*,\ \forall i,j\},$$

这里$\langle(f_{ij}),(a_{ij})\rangle=\sum\limits_{i,j}f_{ij}(a_{ij})$.

证. 设$\{e_{ij}|1\leqslant i,j\leqslant n\}$是$M_n$的矩阵单位，即

$$e_{ij}^*=e_{ji},\quad e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il},\quad \forall i,j,k,l,$$

于是，每个$u\in M_n\otimes A$可唯一地写成$u=\sum\limits_{i,j}a_{ij}\otimes e_{ij}$，从而可自然地建立$M_n\otimes A$到$M_n(A)$上的$*$同构$\Phi$：$\Phi(u)=(a_{ij})$. 显然，$M_n(A)$是$\mathscr{H}\oplus\cdots\oplus\mathscr{H}$（$n$个）中的$c^*$-代数，如果把$M_n(A)$的范数通过$\Phi$转嫁到$M_n\otimes A$，那么，$M_n\otimes A$依此范数成为$c^*$-代数. 今依命题2.1.10，可见$M_n\otimes A$上仅有一个$c^*$-范$\alpha_0(\cdot)$，而且$\alpha_0(\cdot)$可以通过$M_n(A)$上范数转嫁得到. 余皆显然. 证毕.

注. 今后把$M_n\otimes A$与$M_n(A)$等同起来.

命题 3.6.2 设n是正整数，A是c^*-代数，$a=(a_{ij})\in M_n(A)$，则下列条件是相互等价的：1) a是$M_n(A)$的正元；2) a是形如$(a_i^*a_j)$元的和，这里$a_1,\cdots,a_n\in A$；3) 对任意的$x_1,\cdots,x_n\in A$，$\sum\limits_{i,j}x_i^*a_{ij}x_j$是$A$的正元.

证. 1) 推导 2)：设$(a_{ij})=(b_{ij})^*(b_{ij})$，于是

$$a_{ij}=\sum_k b_{ki}^*b_{kj},\quad \forall i,j.$$

如果命$c_k=(b_{ki}^*b_{kj})$，则$a=c_1+\cdots+c_n$.

2) 推导 3)：显然.

3) 推导 1)：如果$\{\pi,\mathscr{H},\xi\}$是A的任意的循环$*$表示，定义$M_n(A)$的$*$表示$\{\tilde{\pi},\mathscr{H}\oplus\cdots\oplus\mathscr{H}$（$n$个）$\}$：

$$\tilde{\pi}((b_{ij}))=(\pi(b_{ij})),\quad \forall(b_{ij})\in M_n(A).$$

对任意的 $\xi_1,\cdots,\xi_n\in\mathscr{H}$，取 $x_i^{(m)}\in A$，使得 $\pi(x_i^{(m)})\xi\to\xi_i$，$1\leqslant i\leqslant n$. 于是依条件 3)

$$\langle\tilde{\pi}(a)(\xi_i),\ (\xi_i)\rangle=\lim_m\left\langle\pi\left(\sum_{i,j}x_i^{(m)*}a_{ij}x_j^{(m)}\right)\xi,\ \xi\right\rangle\geqslant 0,$$

所以，$\tilde{\pi}(a)$ 是 $\mathscr{H}\oplus\cdots\oplus\mathscr{H}$ (n 个) 中的正算子.

今若 $\{\pi_l\}$ 是 A 的循环 * 表示族，使得 $\pi=\sum\limits_l\oplus\pi_l$ 是忠实的，则 $\tilde{\pi}=\sum\limits_l\oplus\tilde{\pi}_l$ 也将是 $M_n(A)$ 的忠实 * 表示. 依前段所证，$\tilde{\pi}(a)\geqslant 0$，因此，$a$ 是 $M_n(A)$ 的正元. 证毕.

定义 3.6.3 设 Φ 是 c^*-代数 A 到 c^*-代数 B 中的线性映象，n 是正整数，自然地定义 $M_n(A)$ 到 $M_n(B)$ 中的线性映象 Φ_n:

$$\Phi_n((a_{ij}))=(\Phi(a_{ij})),\ \forall(a_{ij})\in M_n(A).$$

Φ 称为 n-正的，指 Φ_n 把 $M_n(A)$ 的任意正元变为 $M_n(B)$ 的正元. Φ 称为全正的，指对任意的正整数 n，Φ 是 n-正的.

命题 3.6.4 1) 如果 Φ 是 A 到 B 中的 * 同态，则 Φ 是全正的；

2) 全正映象的复合也是全正的；

3) 设 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 A 的 * 表示，v 是 Hilbert 空间 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{H}$ 中的有界线性映象，则 $\Phi(\cdot)=v^*\pi(\cdot)v$ 是 A 到 $B(\mathscr{K})$ 中的全正映象.

证. 1) 只须注意，对任何的 n，Φ_n 也是 $M_n(A)$ 到 $M_n(B)$ 中的 * 同态. 2) 是显然的.

3) 对任何的 n，$a_1,\cdots,a_n\in A$，$b_1,\cdots,b_n\in B(\mathscr{K})$，

$$\sum_{i,j}b_i^*\Phi(a_i^*a_j)b_j=\left(\sum_i\pi(a_i)vb_i\right)^*\left(\sum_i\pi(a_i)vb_i\right)$$

是 $B(\mathscr{K})$ 的正元. 再依命题 3.6.2，Φ 是全正的. 证毕.

引理 3.6.5 如果 Φ 是 A 到 B 中的正(即 1-正)线性映象，则 Φ 是连续的.

证. 只须证明 Φ 是闭算子. 设 $a_n\to 0$，且 $\Phi(a_n)\to b$. 对 B 上任意的正泛函 f，$f\circ\Phi$ 是 A 上的正泛函，从而连续 (命题 2.3.2). 由此，$f\circ\Phi(a_n)\to 0$，$f(b)=0$，$b=0$. 证毕.

命题 3.6.6 设Φ是A到B中的正线性映象，并且A或者B是交换的，则Φ是全正的.

证. 设 $B\cong C_0^\infty(\Omega)$，这里$\Omega$是局部紧 Hausdorff 空间，对任意的 $a_1,\cdots,a_n\in A$, $b_1,\cdots,b_n\in B$, $t\in\Omega$,

$$\left(\sum_{i,j} b_i^*\Phi(a_i^*a_j)b_j\right)(t)=\sum_{i,j}\overline{b_i(t)}\,\Phi(a_i^*a_j)(t)b_j(t)$$

$$=\Phi\left(\left(\sum_i b_i(t)a_i\right)^*\cdot\left(\sum_i b_i(t)a_i\right)\right)(t)\geqslant 0$$

因此，Φ是全正的.

今设 $A\cong C_0^\infty(\Omega)$, $B\subset B(\mathscr{H})$，要证明

$$\sum_{i,j}\langle\Phi(a_i^*a_j)\xi_j,\xi_i\rangle\geqslant 0,\ \forall a_i\in A,\ \xi_i\in\mathscr{H},\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

依引理 3.6.5，存在Ω上有限的 Radon 测度μ_{ij}，使得$\langle\Phi(a)\xi_j,\xi_i\rangle=\int_\Omega a(t)d\mu_{ij}(t)$, $\forall a\in A, i,j$. 令 $\mu=\sum_{i,j}|\mu_{ij}|$，则有 $f_{ij}\in L^1(\Omega,\mu)$，使得 $\mu_{ij}=f_{ij}\cdot\mu$, $\forall i,j$[1]. 对任意固定的复数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，由于$\Phi$是正的，

$$\int_\Omega|a(t)|^2d\left(\sum_{i,j}\bar{\lambda}_i\lambda_j\mu_{ij}(t)\right)$$

$$=\left\langle\Phi(a^*a)\left(\sum_j\lambda_j\xi_j\right),\left(\sum_i\lambda_i\xi_i\right)\right\rangle\geqslant 0,$$

$\forall a\in A$，因此，$\sum_{i,j}\bar{\lambda}_i\lambda_j\mu_{ij}$ 是Ω上的正测度. 从而对 $p.p.\ \mu$ 的 t, $\sum_{i,j}\bar{\lambda}_i\lambda_j f_{ij}(t)\geqslant 0$. 进而存在$\Omega$的 Borel 子集$\Omega_0$, $\mu(\Omega_0)=0$，使得对于任何的复有理数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 及 $t\notin\Omega_0$, $\sum_{i,j}\bar{\lambda}_i\lambda_j f_{ij}(t)\geqslant 0$. 任何复数可为复有理数逼近，因此，

$$\sum_{i,j}\bar{\lambda}_i\lambda_j f_{ij}(t)\geqslant 0,\ \forall t\notin\Omega_0,\ \lambda_i\in\mathbb{C},\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

于是，

$$\sum_{i,j}\langle\Phi(a_i^*a_j)\xi_j,\xi_i\rangle=\sum_{i,j}\int_\Omega(a_i^*a_j)(t)f_{ij}(t)d\mu(t)$$

---

1) 例见后面的定理 5.1.4.

$$= \int_{\Omega} \Big(\sum_{i,j} \overline{a_i(t)}\, a_j(t) f_{ij}(t) \Big) d\mu(t) \geqslant 0,$$

证毕.

定理 3.6.7 设 A 是 c^*-代数，$\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间，Φ 是 A 到 $B(\mathscr{H})$ 中的全正映象，则存在 A 的 $*$ 表示 $\{\pi, \tilde{\mathscr{H}}\}$，vN 代数 $B = \Phi(A)'$ 到 $B(\tilde{\mathscr{H}})$ 中的正规 $*$ 同态 Ψ，以及 $\mathscr{H}$ 到 $\tilde{\mathscr{H}}$ 中的有界线性算子 v，使得

$$\Phi(a) = v^*\pi(a)v,\ \forall a \in A,\quad \Psi(b)v = vb,\ \forall b \in B.$$

以及 $\Psi(B) \subset \pi(A)'$，$\tilde{\mathscr{H}} = \overline{[\pi(A)v\mathscr{H}]}$，$\|v\| = \|\Phi\|^{1/2}$.

此外，如果 A 有单位元 1，并且 $\Phi(1) = 1_{\mathscr{H}}$，则 v 可以是等距的。

证. 设 $A \otimes \mathscr{H}$ 是 A，$\mathscr{H}$ 作为 Banach 空间的代数张量积，定义

$$\Big\langle \sum_i a_i \otimes \xi_i,\ \sum_j b_j \otimes \eta_j \Big\rangle = \sum_{i,j} \langle \Phi(b_j^* a_i)\xi_i, \eta_j \rangle$$

$\forall a_i, b_j \in A$，$\xi_i, \eta_j \in \mathscr{H}$. 由于 Φ 是全正的，它是非负内积. 记 $N = \{x \in A \otimes \mathscr{H} \mid \langle x, x \rangle = 0\}$，$x \to \tilde{x}$ 是 $A \otimes \mathscr{H}$ 到 $(A \otimes \mathscr{H})/N$ 上的正则映象，于是上面的非负内积诱导 $(A \otimes \mathscr{H})/N$ 上一个内积，依此完备化，得到 Hilbert 空间 $\tilde{\mathscr{H}}$. 对任意的 $a \in A$，$b \in B$，令

$$\pi(a) \widetilde{\sum_i a_i \otimes \xi_i} = \widetilde{\sum_i a a_i \otimes \xi_i},$$

$$\Psi(b) \widetilde{\sum_i a_i \otimes \xi_i} = \widetilde{\sum_i a_i \otimes b\xi_i},$$

$\forall a_i \in A$，$\xi_i \in \mathscr{H}$. 由于 Φ 是全正的，

$$\Big\| \pi(a) \widetilde{\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \xi_i} \Big\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \Phi(a_j^* a^* a a_i)\xi_i, \xi_j \rangle$$

$$= \Big\langle \Phi_n \Big(\begin{pmatrix} a_1 \cdots a_n \\ 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}a_1\cdots a_n\\ 0\end{pmatrix}\Big)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\Big\rangle$$

$$\leqslant\left\|\begin{pmatrix}a & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a\end{pmatrix}\right\|^2\Big\langle\Phi_n\Big(\begin{pmatrix}a_1\cdots a_n\\ 0\end{pmatrix}^*$$

$$\cdot\begin{pmatrix}a_1\cdots a_n\\ 0\end{pmatrix}\Big)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\Big\rangle$$

$$=\|a\|^2\left\|\widetilde{\sum_{i=1}^n a_i\otimes\xi_i}\right\|^2.$$

于是 $\pi(a)$ 可唯一扩充为 $\mathscr{H}$ 中的有界算子，仍记以 $\pi(a)$. 不难见 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 A 的 * 表示. 由 $B=\Phi(A)'$,

$$\left\|\Psi(b)\widetilde{\sum_{i=1}^n a_i\otimes\xi_i}\right\|^2=\sum_{i,j=1}^n\langle b^*b\Phi(a_i^*a_j)\xi_j,\xi_i\rangle,$$

但 Φ 是全正的，因此 $(\Phi(a_i^*a_j))$ 是 $M_n(B')$ 的正元，从而可写 $(\Phi(a_i^*a_j))=(b'_{ij})^*\cdot(b'_{ij})$，这里 $b'_{ij}\in B'$, $\forall i,j$. 由此，

$$\left\|\Psi(b)\widetilde{\sum_{i=1}^n a_i\otimes\xi_i}\right\|^2$$

$$=\Big\langle\begin{pmatrix}b^*b & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & b^*b\end{pmatrix}(b'_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},(b'_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\Big\rangle$$

$$\leqslant\|b\|^2\Big\langle(b'_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},(b'_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\Big\rangle$$

$$=\|b\|^2\cdot\left\|\widetilde{\sum_{i=1}^n a_i\otimes\xi_i}\right\|^2.$$

于是 $\Psi(b)$ 可唯一扩充为 $\mathscr{H}$ 中的有界算子，仍记以 $\Psi(b)$. 不难见 Ψ 是 B 到 $B(\mathscr{H})$ 中的 * 同态，并且 $\Psi(B)\subset\pi(A)'$.

如果 $\{b_l\}$ 是 B_+ 的任意有界递增网，于是 $\{\Psi(b_l)\}$ 是 $B(\mathscr{H})_+$ 的有界递增网，由于对任意的 $a_i\in A$, $\xi_i\in\mathscr{H}$,

$$\left\langle \Psi(b_l) \widetilde{\sum_i a_i \otimes \xi_i}, \widetilde{\sum_j a_j \otimes \xi_j} \right\rangle = \sum_{i,j} \langle \Phi(a_j^* a_i) b_l \xi_i, \xi_j \rangle,$$

对 l 取极限，即见 $\sup_l \Psi(b_l) = \Psi(\sup_l b_l)$，因此，$\Psi$ 是正规的。

今设 $\{d_l\}$ 是 A 的逼近单位元，于是依引理 3.6.5，$\{\Phi(d_l)\}$ 是 $B(\mathscr{H})_+$ 的有界递增网，因此，$\sup_l \Phi(d_l) = $ (强算子)-$\lim_l \Phi(d_l)$。令 v_l: $\mathscr{H} \to \mathscr{K}$，

$$v_l \xi = \widetilde{d_l \otimes \xi}, \ \forall \xi \in \mathscr{H},$$

由于 $\|v_l \xi\|^2 = \langle \Phi(d_l^2)\xi, \xi \rangle \leqslant \|\Phi\| \|\xi\|^2$，因此，$\|v_l\| \leqslant \|\Phi\|^{\frac{1}{2}}$，$\forall l$。当 $l' \geqslant l$ 时，$(d_{l'} - d_l)^2 \leqslant (d_{l'} - d_l)$，于是

$$\|(v_{l'} - v_l)\xi\|^2 \leqslant \langle (\Phi(d_{l'}) - \Phi(d_l))\xi, \xi \rangle \xrightarrow{l', l} 0, \ \forall \xi \in \mathscr{H}.$$

因此依强算子拓扑，$v_l \to v$，自然 $\|v\| \leqslant \|\Phi\|^{1/2}$。由于 $\langle v_l^* \widetilde{a \otimes \xi}, \eta \rangle = \langle \widetilde{a \otimes \xi}, \widetilde{d_l \otimes \eta} \rangle = \langle \Phi(d_l a)\xi, \eta \rangle$，$\forall \eta \in \mathscr{H}, l$，因此，$v^* \widetilde{a \otimes \xi} = \Phi(a)\xi$，$\forall a \in A, \xi \in \mathscr{H}$。由此，$v^* \pi(a) v_l \xi = v^* \widetilde{a d_l \otimes \xi} = \Phi(a d_l)\xi$，所以，

$$\Phi(a) = v^* \pi(a) v, \ \forall a \in A.$$

特别地，$\|\Phi\| \leqslant \|v\|^2$，所以，$\|\Phi\|^{\frac{1}{2}} = \|v\|$。又若 $a, b \in A$，$\xi, \eta \in \mathscr{H}$，

$$\begin{aligned} \langle \pi(a) v \xi, \widetilde{b \otimes \eta} \rangle &= \lim_l \langle \widetilde{a d_l \otimes \xi}, \widetilde{b \otimes \eta} \rangle \\ &= \langle \Phi(b^* a)\xi, \eta \rangle \\ &= \langle \widetilde{a \otimes \xi}, \widetilde{b \otimes \eta} \rangle. \end{aligned}$$

因此，$\pi(a) v \xi = \widetilde{a \otimes \xi}$，特别地，$\overline{[\pi(A) v \mathscr{H}]} = \mathscr{K}$，及 A 的 $*$ 表示 $\{\pi, \mathscr{K}\}$ 是非退化的，所以 $\pi(d_l) \xrightarrow{\text{强算子}} 1_{\mathscr{K}}$。注意当 $b \in B$，$\xi \in \mathscr{H}$，

$$\pi(d_l) \Psi(b) v \xi = \Psi(b) \pi(d_l) v \xi = \widetilde{d_l \otimes b\xi} = \pi(d_l) v b \xi.$$

因此，$\Psi(b) v = v b$，$\forall b \in B$。

最后,如果A有单位元1，并且 $\Phi(1)=1_{\mathscr{H}}$。取上面的 $d_l=1$，$\forall l$，则 $v\xi=\widetilde{1\otimes\xi}$，$\forall\xi\in\mathscr{H}$。由此，$\|v\xi\|^2=\langle\Phi(1)\xi,\xi\rangle=\|\xi\|^2$，$\forall\xi\in\mathscr{H}$，即$v$是等距的。 证毕。

命题 3.6.8 设Φ是A到B中的全正映象，则 $\Phi(a)^*\Phi(a)\leqslant\|\Phi\|\Phi(a^*a)$，$\forall a\in A$。

证．无妨设 $B\subset B(\mathscr{H})$，依定理 3.6.7，

$$\Phi(a)^*\Phi(a)=v^*\pi(a^*)vv^*\pi(a)v$$
$$\leqslant\|v\|^2v^*\pi(a^*a)v=\|\Phi\|\Phi(a^*a),$$

证毕。

引理 3.6.9 设A是c^*-代数,B是A的c^*-子代数，$\{\pi,\mathscr{H}\}$是B的$*$表示,则有A的$*$表示 $\{\pi_1,\mathscr{H}_1\}$，使得 $\mathscr{H}_1\supset\mathscr{H}$，并且 $\pi_1(b)\xi=\pi(b)\xi$，$\forall b\in B$，$\xi\in\mathscr{H}$。

证．依命题 2.3.21，可设 $\{\pi,\mathscr{H}\}$ 为B上的态φ产生． φ可开拓为A上的态,仍记以 φ。再用φ产生A的$*$表示,即满足要求．证毕。

命题 3.6.10 设A是c^*-代数，B是A的c^*-子代数，Φ是B到 $B(\mathscr{H})$ 中的全正映象，则Φ可开拓为A到 $B(\mathscr{H})$ 中的全正映象。

证．依定理 3.6.7，有B的$*$表示 $\{\pi,\mathscr{H}\}$，及 v: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}$，使得 $\Phi(b)=v^*\pi(b)v$，$\forall b\in B$． 设 $\{\pi_1,\mathscr{H}_1\}$ 是A的$*$表示,并满足引理 3.6.9，令P是 $\mathscr{H}_1$到 $\mathscr{H}$ 上的投影,再命

$$\Psi(a)=v^*P\pi_1(a)Pv,\ \forall a\in A,$$

依命题 3.6.4，Ψ是A到 $B(\mathscr{H})$ 中的全正映象．显然，Ψ也是Φ的开拓．证毕。

命题 3.6.11 设Φ_i是A_i到B_i中的全正映象，$1\leqslant i\leqslant n$，则 $\bigotimes\limits_{i=1}^{n}\Phi_i$ 可扩充为 $\alpha_0-\bigotimes\limits_{i=1}^{n}A_i$ 到 $\alpha_0-\bigotimes\limits_{i=1}^{n}B_i$ 的全正映象。

证．设 $B_i\subset B(\mathscr{H}_i)$，依定理 3.6.7，有 A_i 的$*$表示 $\{\pi_i,\mathscr{H}_i\}$，v_i: $\mathscr{H}_i\to\mathscr{H}_i$，使得

$$\Phi_i(a_i) = v_i^* \pi_i(a_i) v_i, \ \forall a_i \in A_i, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

依命题 3.2.6，$\bigotimes_{i=1}^n \pi_i$ 可扩充为 $\alpha_0 - \bigotimes_{i=1}^n A_i$ 的 * 表示。令

$$\Phi(a) = \left(\bigotimes_{i=1}^n v_i\right)^* \cdot \bigotimes_{i=1}^n \pi_i(a) \cdot \left(\bigotimes_{i=1}^n v_i\right), \ \forall a \in \alpha_0 - \bigotimes_{i=1}^n A_i,$$

则 Φ 是 $\alpha_0 - \bigotimes_{i=1}^n A_i$ 到 $B\left(\bigotimes_{i=1}^n \mathscr{H}_i\right)$ 中的全正映象. 此外，由于 $\Phi\left(\bigotimes_{i=1}^n A_i\right) \subset \bigotimes_{i=1}^n B_i$, 及 $\alpha_0 - \bigotimes_{i=1}^n B_i$ 是 $\bigotimes_{i=1}^n B_i$ 在 $B\left(\bigotimes_{i=1}^n \mathscr{H}_i\right)$ 中的一致闭包，因此，$\Phi\left(\alpha_0 - \bigotimes_{i=1}^n A_i\right) \subset \alpha_0 - \bigotimes_{i=1}^n B_i$. 证毕.

引理 3.6.12 设 $a_s = (a_{ij}^{(s)}) \in M_n(A)_+$, $1 \leqslant s \leqslant m$, 并且 $a_{ij}^{(s)} a_{kl}^{(s')} = a_{kl}^{(s')} a_{ij}^{(s)}$, $\forall s \neq s'$, i, j, k, l, 则

$$a = (a_{ij}^{(1)} \cdots a_{ij}^{(m)}) \in M_n(A)_+.$$

证. 只须对 $m=2$ 来证明，即若 $x = (x_{ij})$ 及 $y = (y_{ij}) \in M_n(A)_+$, 并且 $x_{ij} y_{kl} = y_{kl} x_{ij}$, $\forall i, j, k, l$, 要证明 $(x_{ij} y_{ij}) \in M_n(A)_+$.

用 $\{x_{ij} | i, j\}$, $\{y_{ij} | i, j\}$ 分别生成 A 的 c^*-子代数 B, C. 由于 $x_{ij}^* = x_{ji}$, $y_{kl}^* = y_{lk}$, $\forall i, j, k, l$, 因此，$bc = cb$, $\forall b \in B$, $c \in C$. 显然，x, y 也分别是 $M_n(B)$, $M_n(C)$ 的正元，于是可写

$$x_{ij} = \sum_k b_{ki}^* b_{kj}, \ y_{ij} = \sum_k c_{ki}^* c_{kj},$$

这里 $b_{ij} \in B$, $c_{ij} \in C$, $\forall i, j$. 从而

$$(x_{ij} y_{ij}) = \sum_{k,l} ((b_{ki} c_{li})^* \cdot (b_{kj} c_{lj})).$$

依命题 3.6.2，这是 $M_n(A)$ 的正元. 证毕.

命题 3.6.13 设 Φ_i 是 A_i 到 B 中的全正映象，并且 $\Phi_i(a_i)\Phi_j(a_j) = \Phi_j(a_j)\Phi_i(a_i)$, $\forall a_i \in A_i$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, 则 $\Phi\left(\bigotimes_{i=1}^n a_i\right) =$

$\prod_{i=1}^{n}\Phi_i(a_i)$ ($\forall a_i\in A_i$, $1\leqslant i\leqslant n$) 可扩张成 $\alpha_1-\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 到 B 的全正映象.

证. 令 B_i 是由 $\Phi(A_i)$ 生成的 B 的 c^*-子代数，于是 $b_ib_j=b_jb_i$，$\forall b_i\in B_i$，$1\leqslant i\neq j\leqslant n$.

首先指出 Φ 是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 到 B 的正线性映象. 设 $u=\sum_j\bigotimes_{i=1}^{n}a_j^{(i)}$，这里 $a_j^{(i)}\in A_i$，$\forall i,j$，于是

$$\Phi(u^*u)=\sum_{j,k}\Phi_1(a_j^{(1)*}a_k^{(1)})\cdots\Phi_n(a_j^{(n)*}a_k^{(n)}).$$

如果记 $b_{jk}=\Phi_1(a_j^{(1)*}a_k^{(1)})\cdots\Phi_n(a_j^{(n)*}a_k^{(n)})$，依引理 3.6.12，$(b_{jk})$ 是 $M_n(B)$ 的正元. 依命题 3.6.2，$\sum_{j,k}d_lb_{jk}d_l\in B_+$，$\forall l$，这里 $\{d_l\}$ 是 B 的逼近单位元. 因此，$\Phi(u^*u)=\sum_{j,k}b_{jk}\in B_+$.

对 B 上任意的正泛函 ρ，$\rho\circ\Phi$ 将是 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的正泛函，从而可唯一扩张为 $\alpha_1-\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的正泛函. 一般对任意的 $f\in B^*$，$f\circ\Phi$ 可唯一扩张为 $\alpha_1-\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 上的有界线性泛函，仍然记以 $f\circ\Phi$，于是可定义 Φ': $B^*\to\left(\alpha_1-\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\right)^*$，$\Phi'(f)=f\circ\Phi$，$\forall f\in B^*$.

我们说 Φ' 是连续的，只须证明 Φ' 是闭的. 设 $f_k(\in B^*)\to 0$，$\Phi'(f_k)=f_k\circ\Phi\to F\left(\in\left(\alpha_1-\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\right)^*\right)$，由于对任意的 $a_i\in A_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，

$$F\left(\bigotimes_{i=1}^{n}a_i\right)=\lim_k f_k\left(\prod_{i=1}^{n}\Phi_i(a_i)\right)=0.$$

因此，$F=0$，即 Φ' 是闭的.

今对任意的 $u\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$，

$$\|\Phi(u)\| = \sup\{|f\circ\Phi(u)|\,|\,f\in B^*,\ \|f\|\leqslant 1\}$$
$$= \sup\{|\Phi'(f)(u)|\,|\,f\in B^*,\ \|f\|\leqslant 1\} \leqslant \|\Phi'\|\alpha_1(u).$$
因此，Φ 可唯一扩张为 $\alpha_1-\otimes A_i$ 到 B 的有界线性映象，仍记为 Φ.

最后，证明 Φ 是 $\alpha_1-\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ 到 B 的全正映象. 由于 Φ 是连续的，依命题 3.6.2，只须对任意的正整数 m，$u_1,\cdots,u_m\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$，$b_1,\cdots,b_m\in B$，证明

$$\sum_{i,j=1}^{m} b_i^*\Phi(u_i^*u_j)b_j\in B_+.$$

设 $u_i=\sum_{k=1}^{p}\bigotimes_{s=1}^{n}a_{ik}^{(s)}$，$1\leqslant i\leqslant m$，这里 $a_{ik}^{(s)}\in A_s$，$\forall i,k,s$，由于 Φ_s 是全正的，因此，$(\Phi_s(a_{ik}^{(s)*}a_{jl}^{(s)}))_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant m\\1\leqslant k,l\leqslant p}}$ 是 $M_{pm}(B)$ 的正元，$1\leqslant s\leqslant n$. 依引理 3.6.12，

$$\left(\prod_{s=1}^{n}\Phi_s(a_{ik}^{(s)*}a_{jl}^{(s)})\right)_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant m\\1\leqslant k,l\leqslant p}}\in M_{pm}(B)_+.$$

如果令 $b_{ik}=b_i$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant k\leqslant p$，则

$$\sum_{i,j=1}^{m} b_i^*\Phi(u_i^*u_j)b_j=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{p} b_{ik}^*\prod_{s=1}^{n}\Phi_s(a_{ik}^{(s)*}a_{jl}^{(s)})b_{jl}.$$

依命题 3.6.2，可见它是 B 的正元. 证毕.

注 本节见参考文献[29]，[64]，[109].

§7. c^*-代数的诱导极限

设 I 是定向指标集，对每个指标 $\alpha\in I$，A_α 是 c^*-代数. 又设对任意的 $\alpha\leqslant\beta$ $(\alpha,\beta\in I)$，有 A_α 到 A_β 中的 * 同构 $\Phi_{\beta\alpha}$，使得

$$\Phi_{\gamma\beta}\Phi_{\beta\alpha}=\Phi_{\gamma\alpha},\ \forall\alpha,\beta,\gamma\in I,\ 且\ \alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma.$$

设

$$\mathscr{T}=\bigtimes_{\alpha\in I}A_\alpha=\{(a_\alpha)_{\alpha\in I}\,|\,a_\alpha\in A_\alpha,\ \forall\alpha\in I\}$$

以相应的分量相加、相乘、$*$运算等，$\mathscr{T}$ 自然地成为$*$代数. 令

$$\mathscr{L}=\{a=(a_l)\mid a\in\mathscr{T}，且有\ \alpha\in\mathrm{I},\ 使得\ a_\beta=\Phi_{\beta\alpha}(a_\alpha),\ \forall\beta\geqslant\alpha\},$$

易见 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{T}$ 的$*$子代数. 如果 $a=(a_\alpha)\in\mathscr{L}$，令 $\|a\|=\lim\|a_\alpha\|$，则 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{L}$ 上的 c^*-拟范. 再令

$$\vartheta=\{a\in\mathscr{L}\mid\|a\|=0\}=\{(a_l)\in\mathscr{T}\mid 有\ \alpha\in\mathrm{I},\ 使得\ a_\beta=0,\ \forall\beta\geqslant\alpha\}.$$

显然 ϑ 是 $\mathscr{L}$ 的$*$双侧理想. 如果 $a\to\tilde{a}$ 是 $\mathscr{L}$ 到 $\mathscr{L}/\vartheta$ 上的正则映象，显然 $\|\tilde{a}\|=\|a\|$ 将是 $\mathscr{L}/\vartheta$ 上的 c^*-范，依此完备化，得到 c^*-代数 A.

定义 3.7.1 记上面得到的 c^*-代数 A 为

$$\varinjlim_{\alpha}\{A_\alpha,\Phi_{\beta\alpha}\mid(\alpha,\beta)\in\mathrm{I}\times\mathrm{I},\ \alpha\leqslant\beta\},$$

称它为用$*$同构族 $\{\Phi_{\beta\alpha}\mid(\alpha,\beta)\in\mathrm{I}\times\mathrm{I},\ \alpha\leqslant\beta\}$ 定义的 c^*-代数族 $\{A_\alpha\mid\alpha\in\mathrm{I}\}$ 的诱导极限.

现在，对任意的 $\alpha\in\mathrm{I}$，令

$$\mathscr{L}_\alpha=\{(a_l)\in\mathscr{T}\mid a_\beta=\Phi_{\beta\alpha}(a_\alpha),\ \forall\beta\geqslant\alpha\}.$$

显然 $\mathscr{L}_\alpha$ 是 $\mathscr{L}$ 的$*$子代数，并且

$$\tilde{A}_\alpha=\mathscr{L}_\alpha/\vartheta=\left\{\tilde{a}\in\mathscr{L}/\vartheta\ \middle|\ 存在\ (a_l)\in\tilde{a},\ 使得\ a_l=\begin{cases}\Phi_{l\alpha}(a_\alpha), & \forall l\geqslant\alpha\\ 0, & \forall l\ngeqslant\alpha\end{cases}\right\}.$$

对任意的 $a_\alpha\in A_\alpha$，定义

$$a_l=\begin{cases}\Phi_{l\alpha}(a_\alpha), & \forall l\geqslant\alpha;\\ 0, & \forall l\ngeqslant\alpha.\end{cases}$$

于是，$\Phi_\alpha(a_\alpha)=(\tilde{a}_l)$ 定义一个由 A_α 到 $\tilde{A}_\alpha$ 上的$*$同构. 特别地，$\tilde{A}_\alpha$ 也是 A 的 c^*-子代数. 今指出

$$\Phi_\alpha=\Phi_\beta\Phi_{\beta\alpha},\ \forall\beta\geqslant\alpha.$$

事实上，对任意的 $a_\alpha\in A_\alpha$，$\beta\geqslant\alpha$，

$$\Phi_\alpha(a_\alpha)=\left(a_l=\begin{cases}\Phi_{l\alpha}(a_\alpha), & \forall l\geqslant\alpha\\ 0, & \forall l\ngeqslant\alpha\end{cases}\right)+\vartheta,$$

$$\Phi_\beta\Phi_{\beta\alpha}(a_\alpha) = \left(b_l = \begin{cases} \Phi_{l\beta}\Phi_{\beta\alpha}(a_\alpha) = \Phi_{l\alpha}(a_\alpha), & \forall l \geqslant \beta \\ 0 & , \forall l \ngeqslant \beta \end{cases} \right) + \vartheta.$$

因此，$\Phi_\beta\Phi_{\beta\alpha} = \Phi_\alpha$，$\forall \beta \geqslant \alpha$。特别地，

$$\tilde{A}_\alpha = \Phi_\alpha(A_\alpha) = \Phi_\beta\Phi_{\beta\alpha}(A_\alpha) \subset \Phi_\beta(A_\beta) = \tilde{A}_\beta,\ \forall \beta \geqslant \alpha.$$

这一点也可以$\mathscr{L}_\alpha \subset \mathscr{L}_\beta\ (\forall \beta \geqslant \alpha)$看出。此外，由于$\mathscr{L} = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \mathscr{L}_\alpha$，因此，$\mathscr{L}/\vartheta = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \tilde{A}_\alpha$。从而我们有

定理 3.7.2 设 $A = \varinjlim\limits_{\alpha} \{A_\alpha, \Phi_{\beta\alpha} | (\alpha, \beta) \in I \times I,\ \alpha \leqslant \beta\}$，则存在$A$的 c^*-子代数族 $\{\tilde{A}_\alpha | \alpha \in I\}$ 及对每个 $\alpha \in I$，有 A_α 到 $\tilde{A}_\alpha$ 上的$*$同构 Φ_α，使得：1) $\tilde{A}_\alpha \subset \tilde{A}_\beta$，$\forall \alpha \leqslant \beta$；2) $\Phi_\alpha = \Phi_\beta\Phi_{\beta\alpha}$，$\forall \alpha \leqslant \beta$；3) $\bigcup\limits_{\alpha \in I} \tilde{A}_\alpha$ 在A中是稠的。

反过来，我们也有

定理 3.7.3 设B是 c^*-代数，$\{B_\alpha | \alpha \in I\}$ 是B的 c^*-子代数族，且对每个 $\alpha \in I$，有 A_α 到 B_α 上的$*$同构 Ψ_α，使得：1) $B_\alpha \subset B_\beta$，$\forall \alpha \leqslant \beta$；2) $\Psi_\alpha = \Psi_\beta\Phi_{\beta\alpha}$，$\forall \alpha \leqslant \beta$；3) $\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$ 在B中稠，则存在 $A = \varinjlim\limits_{\alpha}\{A_\alpha, \Phi_{\beta\alpha} | (\alpha, \beta) \in I \times I,\ \alpha \leqslant \beta\}$ 到B上的$*$同构 Ψ，使得 $\Psi(\tilde{A}_\alpha) = B_\alpha$，$\Psi\Phi_\alpha = \Psi_\alpha$，$\forall \alpha \in I$，这里 $\{\tilde{A}_\alpha, \Phi_\alpha | \alpha \in I\}$ 如定理 3.7.2 所构作。

证。对任意的 $\alpha \in I$，$\Psi_\alpha\Phi_\alpha^{-1}$ 是 $\tilde{A}_\alpha$ 到 B_α 上的$*$同构，今指出

$$\Psi_\beta\Phi_\beta^{-1} | \tilde{A}_\alpha = \Psi_\alpha\Phi_\alpha^{-1},\ \forall \alpha \leqslant \beta.$$

事实上，对任意的 $a \in \tilde{A}_\alpha$，$\Psi_\beta\Phi_\beta^{-1}(a) = \Psi_\beta\Phi_\beta^{-1}\Phi_\alpha\Phi_\alpha^{-1}(a) = \Psi_\beta\Phi_\beta^{-1} \cdot \Phi_\beta\Phi_{\beta\alpha}\Phi_\alpha^{-1}(a) = (\Psi_\beta\Phi_{\beta\alpha})\Phi_\alpha^{-1}(a) = \Psi_\alpha\Phi_\alpha^{-1}(a)$。于是，我们可以定义 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} \tilde{A}_\alpha$ 到 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$ 上的$*$同构 Ψ，使得

$$\Psi | \tilde{A}_\alpha = \Psi_\alpha\Phi_\alpha^{-1},\ \forall \alpha \in I.$$

自然Ψ是等距的，从而Ψ可唯一扩张为A到B上的$*$同构，仍记以Ψ，即满足要求。证毕。

系 3.7.4 设A是 c^*-代数族，$\{A_\alpha | \alpha \in I\}$ 是A的 c^*-子代数

族，使得 $A_\alpha \subset A_\beta$，$\forall \alpha \leqslant \beta$，并且 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 在 A 中稠. 对 $\alpha \leqslant \beta$，令 $\Phi_{\beta\alpha}$ 是 A_α 到 A_β 中的嵌入映象，则 A * 同构于 $\varinjlim_\alpha \{A_\alpha, \Phi_{\beta\alpha} | (\alpha, \beta) \in I \times I, \alpha \leqslant \beta\}$.

事实上，取定理 3.7.3 中的 $B = A$，$B_\alpha = A_\alpha$，及 $\Psi_\alpha = I_\alpha$ (A_α 上的恒等映象)，$\forall \alpha \in I$，即得证.

定理 3.7.5 设 $A = \varinjlim_I \{A_\alpha, \Phi_{\beta\alpha} | (\alpha, \beta) \in I \times I, \alpha \leqslant \beta\}$，$B = \varinjlim_\alpha \{B_\alpha, \Psi_{\beta\alpha} | (\alpha, \beta) \in I \times I, \alpha \leqslant \beta\}$，并且对任意的 $\alpha \in I$，有 A_α 到 B_α 上的 * 同构 Λ_α，使得 $\Lambda_\beta \Phi_{\beta\alpha} = \Psi_{\beta\alpha} \Lambda_\alpha$，$\forall \alpha \leqslant \beta$，则 A * 同构于 B.

证. 由定理 3.7.2，$A = \overline{\bigcup_{\alpha \in I} \tilde{A}_\alpha}$，$B = \overline{\bigcup_{\alpha \in I} \tilde{B}_\alpha}$，并且有 A_α 到 $\tilde{A}_\alpha$ 上的 * 同构 Φ_α，B_α 到 $\tilde{B}_\alpha$ 上的 * 同构 Ψ_α，使得

$$\Phi_\alpha = \Phi_\beta \Phi_{\beta\alpha}, \quad \Psi_\alpha = \Psi_\beta \Psi_{\beta\alpha}, \quad \forall \alpha, \beta \in I, \ \alpha \leqslant \beta,$$

于是 $\Psi_\alpha \Lambda_\alpha$ 是 A_α 到 $\tilde{B}_\alpha$ 上的 * 同构，并且

$$(\Psi_\beta \Lambda_\beta) \Phi_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta \Psi_{\beta\alpha}) \Lambda_\alpha = \Psi_\alpha \Lambda_\alpha, \quad \forall \alpha \leqslant \beta.$$

今依定理 3.7.3，A * 同构于 B. 证毕.

命题 3.7.6 设 $A = \varinjlim_n \{A_n, \Phi_{mn} | m, n = 1, 2, \cdots, m \geqslant n\}$，$B = \varinjlim_n \{B_n, \Psi_{mn} | m, n = 1, 2, \cdots, m \geqslant n\}$，如果对每个 n，A_n 与 B_n 都 * 同构于 M_{p_n}，这里 M_{p_n} 是 $p_n \times p_n$ 阶的矩阵代数，且 $p_n < \infty$. 又若 Φ_{mn}，Ψ_{mn} 分别把 A_n，B_n 的单位元变成 A_m，B_m 的单位元，$\forall m \geqslant n$，则 A * 同构于 B.

证. 依定理 3.7.2，$A = \overline{\bigcup_n \tilde{A}_n}$，$B = \overline{\bigcup_n \tilde{B}_n}$，这里 $\tilde{A}_n$，$\tilde{B}_n$ 都 * 同构于 M_{p_n}，$\forall n$，并且

$$1_A \in \tilde{A}_1 \subset \cdots \subset \tilde{A}_n \subset \cdots, \quad 1_B \in \tilde{B}_1 \subset \cdots \subset \tilde{B}_n \subset \cdots.$$

我们只须对每个 n，构作 $\tilde{A}_n$ 到 $\tilde{B}_n$ 上的 * 同构 Λ_n，使得

$$\Lambda_{n+1} | \tilde{A}_n = \Lambda_n, \quad \forall n.$$

设已有 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$ 满足要求，我们来构造 $\tilde{A}_{n+1}$ 到 $\tilde{B}_{n+1}$ 上的 *

同构 Λ_{n+1}，使得 $\Lambda_{n+1}|\tilde{A}_n = \Lambda_n$.

设 $\{e_{ij}|1 \leqslant i, j \leqslant p_n\}$ 是 $\tilde{A}_n$ 的矩阵单位，即

$$e_{ij}^* = e_{ji},\quad e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il},\quad \forall i, j, k, l$$

如果把 $\tilde{A}_{n+1}$ 与 $M_{p_{n+1}} = B(\mathscr{H})$ 等同起来，这里 $\mathscr{H}$ 是 p_{n+1} 维的 Hilbert 空间，$\tilde{A}_n \subset \tilde{A}_{n+1}$，于是 $\{e_{ii}|1 \leqslant i \leqslant p_n\}$ 应当是 $\mathscr{H}$ 中相互直交、(关于 vN 代数 $B(\mathscr{H})$) 等价且和为 $1_{\mathscr{H}}$ 的投影族。因此，如果命 $\mathscr{H}_i = e_{ii}\mathscr{H}$，则 $\dim\mathscr{H}_i = \dim\mathscr{H}_j$，$1 \leqslant i, j \leqslant p_n$。这说明 $m = p_n^{-1}p_{n+1}$ 是正整数，并且 $\dim\mathscr{H}_i = m$，$\forall i$。今可取 $\{v_{1i,1j}|1 \leqslant i, j \leqslant m\} \subset \tilde{A}_{n+1}$，使得

$$v_{1i,1j}^* = v_{1j,1i},\quad v_{1i,1j}v_{1k,1l} = \delta_{jk}v_{1i,1l}\quad \forall i, j, k, l,$$

并且 $\sum_{i=1}^{m} v_{1i,1i} = e_{11}$。进而令

$$v_{ij,kl} = e_{i1}v_{1j,1l}e_{1k},\quad 1 \leqslant i, k \leqslant p_n,\quad 1 \leqslant j, l \leqslant m,$$

易证它是 $\tilde{A}_{n+1}$ 的矩阵单位.

记 $f_{ij} = \Lambda_n(e_{ij})$，自然 $\{f_{ij}|1 \leqslant i, j \leqslant p_n\}$ 是 $\tilde{B}_n$ 的矩阵单位。同样的手续施于 $\tilde{B}_{n+1}$，可找到 $\{u_{1i,1j}|1 \leqslant i, j \leqslant m\}$，使得

$$u_{1i,1j}^* = u_{1j,1i},\quad u_{1i,1j}u_{1k,1l} = \delta_{jk}u_{1i,1l},\quad \forall i, j, k, l,$$

并且 $\sum_{i=1}^{m} u_{1i,1i} = f_{11}$。于是

$$u_{ij,kl} = f_{i1}u_{1j,1l}f_{1k},\quad 1 \leqslant i, k \leqslant p_n,\quad 1 \leqslant j, l \leqslant m$$

是 $\tilde{B}_{n+1}$ 的矩阵单位。今命

$$\Lambda_{n+1}v_{ij,kl} = u_{ij,kl},\quad 1 \leqslant i, k \leqslant p_n,\quad 1 \leqslant j, l \leqslant m,$$

即见 Λ_{n+1} 满足要求。证毕.

现在考虑 $A = \varinjlim_{\alpha}\{A_\alpha, \Phi_{\beta\alpha}|(\alpha, \beta) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I}, \alpha \leqslant \beta\}$，并设 φ_α 是 A_α 上的态，$\forall \alpha \in \mathrm{I}$，使得

$$\varphi_\beta(\Phi_{\beta\alpha}(a_\alpha)) = \varphi_\alpha(a_\alpha),\quad \forall a_\alpha \in A_\alpha,\quad \alpha \leqslant \beta \tag{1}$$

用 φ_α 定义 $\tilde{A}_\alpha$ 上的态 $\tilde{\varphi}_\alpha$:

$$\tilde{\varphi}_\alpha(a_\alpha) = \varphi_\alpha(\Phi_\alpha^{-1}(a_\alpha)),\quad \forall a_\alpha \in \tilde{A}_\alpha,\quad \alpha \in \mathrm{I}.$$

这里 Φ_α 见定理 3.7.2，于是依 (1) 及定理 3.7.2，

$$\tilde{\varphi}_\beta(a_\alpha) = \varphi_\beta(\Phi_\beta^{-1}(a_\alpha)) = \varphi_\beta(\Phi_\beta^{-1}\Phi_\alpha\Phi_\alpha^{-1}(a_\alpha))$$
$$= \varphi_\beta(\Phi_\beta^{-1}\Phi_\beta\Phi_{\beta\alpha}\Phi_\alpha^{-1}(a_\alpha)) = \varphi_\alpha(\Phi_\alpha^{-1}(a_\alpha)) = \tilde{\varphi}_\alpha(a_\alpha),$$

$\forall a_\alpha \in \tilde{A}_\alpha$, $\alpha \leqslant \beta$. 因此，$\{\tilde{\varphi}_\alpha | \alpha \in \mathrm{I}\}$ 定义 $\bigcup_\alpha \tilde{A}_\alpha$ 上一个线性泛函 φ，使得 $\varphi | \tilde{A}_\alpha = \tilde{\varphi}_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathrm{I}$. 当然 φ 可以唯一地扩张为 A 上的态，仍记以 φ.

定义 3.7.7 上面得到的 $A = \varinjlim_\alpha \{A_\alpha, \Phi_{\beta\alpha} | (\alpha, \beta) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I}, \alpha \leqslant \beta\}$ 上的态 φ，称为 $\{\varphi_\alpha, \Phi_{\beta\alpha} | (\alpha, \beta) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I}, \alpha \leqslant \beta\}$ 的诱导极限，记以

$$\varphi = \varinjlim_\alpha \{\varphi_\alpha, \Phi_{\beta\alpha} | (\alpha, \beta) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I}, \alpha \leqslant \beta\}.$$

注 本节见参考文献 [97]，[111]。

§8. c^*-代数的任意张量积

设 Λ 是任意的指标集，对每个 $l \in \Lambda$，A_l 是有单位元 1_l 的 c^*-代数，命

$$\bigotimes_{l \in \Lambda} A_l = \left\{ u = u_F \otimes \bigotimes_{l \notin F} 1_l \,\middle|\, F \text{ 是 } \Lambda \text{ 的有限子集}, u_F \in \bigotimes_{l \in F} A_l \right\}$$

定义 $u = u_F \otimes \bigotimes_{l \notin F} 1_l = 0$，指 $\bigotimes_{l \in \Lambda} \varphi_l(u) = \bigotimes_{l \in F} \varphi_l(u_F) = 0$, $\forall \varphi_l \in \mathscr{S}_l$，这里 $\mathscr{S}_l$ 是 A_l 的态空间，$l \in \Lambda$. 显然，$\bigotimes_{l \in \Lambda} A_l$ 将自然地成为 $*$ 代数，称为 $\{A_l | l \in \Lambda\}$ 的代数张量积。

$\bigotimes_{l \in \Lambda} A_l$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 称为交叉范，指对 Λ 的任意有限子集 F，$a_l \in A_l$, $l \in F$，有

$$\left\| \bigotimes_{l \in F} a_l \otimes \bigotimes_{l \notin F} 1_l \right\| = \prod_{l \in F} \|a_l\|.$$

例如

$$\lambda(u) = \sup\left\{ \left| \bigotimes_{l \in F} f_l \otimes \bigotimes_{l \notin F} \varphi_l(u) \right| \right.$$

$$F\text{是}\Lambda\text{的有限子集},\ \begin{matrix} f_l\in A_l^*,\ \|f_l\|\leqslant 1,\ l\in F, \\ \varphi_l\in \mathscr{S}_l,\ l\notin F \end{matrix}\Big\},$$

$$\gamma(u)=\inf\Big\{\sum_i\prod_{l\in F}\|a_i^{(l)}\|\Big|u$$

$$=\sum_i\bigotimes_{l\in F}a_i^{(l)}\otimes\bigotimes_{l\notin F}1_l,\ \text{这里}\ a_i^{(l)}\in A_l,\ \forall l\in F\Big\}$$

都是交叉范，并且 $\gamma(\cdot)$ 是最大的交叉范。

$\bigotimes_{l\in\Lambda}A_l$ 上的范数 $\alpha(\cdot)$ 称为 c^*-范，指

$$\alpha(uv)\leqslant\alpha(u)\alpha(v),\ \alpha(u^*u)=\alpha(u)^2,\ \forall u,v\in\bigotimes_{l\in\Lambda}A_l$$

依此完备化的 c^*-代数记作 $\alpha-\bigotimes_{l\in\Lambda}A_l$，称为 c^*-代数族 $\{A_l|l\in\Lambda\}$ 依 c^*-范 $\alpha(\cdot)$ 的张量积.

在 $\bigotimes_{l\in\Lambda}A_l$ 上，同样有空间的 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$ 及其几何意义，最大的 c^*-范 $\alpha_1(\cdot)$，任意的 c^*-范 $\alpha(\cdot)$ 必满足 $\lambda(\cdot)\leqslant\alpha_0(\cdot)\leqslant\alpha(\cdot)\leqslant\gamma(\cdot)$，特别 $\alpha(\cdot)$ 是交叉范. 凡此种种，可仿照本章§1—§5 作相应讨论.

命 $\mathrm{I}=\{F|F$ 是 Λ 的有限子集$\}$，依包含关系，I 是定向指标集. 如果 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{l\in\Lambda}A_l$ 上的 c^*-范对任意的 $F\in\mathrm{I}$，令 $\alpha_F(\cdot)$ 是 $\alpha(\cdot)$ 限于 $\bigotimes_{l\in F}A_l\otimes\bigotimes_{l\notin F}1_l$ 所诱导的 $\bigotimes_{l\in F}A_l$ 上的 c^*-范，并记 $B_F=\alpha_F-\bigotimes_{l\in F}A_l$. 如果 $F, F'\in\mathrm{I}$，并且 $F'\supset F$，命

$$\Phi_{F',F}(u_F)=u_F\otimes\bigotimes_{l\in F'\setminus F}1_l,\quad\forall u_F\in\bigotimes_{l\in F}A_l$$

显然，$\Phi_{F'F}$ 可扩张为 B_F 到 $B_{F'}$ 中的 * 同构，并映 B_F 的单位元为 $B_{F'}$ 的单位元，也易见

$$\Phi_{F''F'}\Phi_{F'F}=\Phi_{F''F},\ \forall F''\supset F'\supset F.$$

依定理 3.7.3，容易证明

命题 3.8.1 c^*-代数 $\alpha-\bigotimes_{l\in\Lambda}A_l$ * 同构于

$$\varinjlim_{F}\{B_F, \Phi_{FF'}|(F, F')\in \mathbf{I}\times\mathbf{I},\ F\subset F'\},$$

作为例子，我们考虑

定义 3.8.2 c^*-代数 A 称为 (UHF) (一致超有限)的，指 A 有单位元 1，及 $1\in A_1\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots\subset A$，使得 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$，这里每个 A_n * 同构于有限阶的矩阵代数.

如果 A_n * 同构于 p_n 阶矩阵代数，$\forall n$，也称 A 是 $\{p_n\}$ 型的 (UHF) 代数.

这时，命 Φ_{mn} 是 A_n 到 A_m 中的嵌入映象，$\forall m\geq n$，依系 3.7.4，A * 同构于诱导极限

$$\varinjlim_{n}\{A_n, \Phi_{mn}|m, n=1, 2,\cdots, m\geq n\}.$$

此外，依命题 3.7.6，同型的 (UHF) 代数必然是 * 同构的.

命题 3.8.3 $\{p_n\}$ 型 (UHF) 代数存在的充要条件是：$p_n|p_{n+1}$，$n=1, 2,\cdots$. 这时，它 * 同构于 c^*-代数 $\alpha_0-\bigotimes_{n=1}^{\infty}M_{m_n}$，这里 M_{m_n} 是 m_n 阶矩阵代数，以及 $m_1=p_1$，$m_n=p_{n-1}^{-1}p_n$，$\forall n\geq 2$.

证．必要性已为命题 3.7.6 的证明所包含．反之，设 $p_n|p_{n+1}$，$\forall n$. 由于 $\alpha_0-\bigotimes_{i=1}^{n}M_{m_i}=M_{p_n}$，$\forall n$，因此，$\alpha_0-\bigotimes_{n=1}^{\infty}M_{m_n}$ 就是 $\{p_n\}$ 型的 (UHF) 代数.

已经指出同型的 (UHF) 代数必然是 * 同构的，因此，$\{p_n\}$ 型 (UHF) 代数必 * 同构于 $\alpha_0-\bigotimes_{n=1}^{\infty}M_{m_n}$. 证毕.

注．可仿引理 3.6.1 证明，$\bigotimes_{n=1}^{\infty}M_{m_n}$ 上仅有一个空间的 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$.

现在回到 c^*-代数任意张量积的讨论.

定义 3.8.4 设 Λ 是任意指标集，对每个 $l\in\Lambda$，$\mathscr{H}_l$ 是 Hilbert 空间．取定 $\xi=(\xi_l)_{l\in\Lambda}$，这里 $\xi_l\in\mathscr{H}_l$，$\|\xi_l\|=1$，$\forall l$.

Hilbert 空间族 $\{\mathscr{H}_l | l\in\Lambda\}$ 关于参考矢 $\xi=(\xi_l)_{l\in\Lambda}$ 的张量积，记作 $\overset{\xi}{\underset{l\in\Lambda}{\bigotimes}}\mathscr{H}_l$，指它是由线性空间

$$\overset{\xi}{\underset{l\in\Lambda}{\bigodot}}\mathscr{H}_l=\bigcup\left\{\underset{l\in F}{\bigodot}\mathscr{H}_l\otimes\bigotimes_{l\notin F}\xi_l\,\middle|\,F\text{ 是 }\Lambda\text{ 的有限子集}\right\}$$

(这里 $\underset{l\in F}{\bigodot}\mathscr{H}_l$ 是第一章 § 4 $^{\#}F=2$ 情形的自然推广)依照内积

$$\left\langle\bigotimes_{l\in F}\eta_l\otimes\bigotimes_{l\notin F}\xi_l,\ \bigotimes_{l\in F}\zeta_l\otimes\bigotimes_{l\notin F}\xi_l\right\rangle=\prod_{l\in F}\langle\eta_l,\zeta_l\rangle$$

($\forall\eta_l,\ \zeta_l\in\mathscr{H}_l,\ l\in F,\ F$ 是 Λ 的有限子集)的完备化.

引理 3.8.5 设 M, N 分别是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ 中的 vN 代数，$f\in M_*$，$g\in N_*$，则 $(f\otimes g)\in(M\overline{\otimes}N)_*$，并且 $\|f\otimes g\|=\|f\|\cdot\|g\|$，这里 $f\otimes g\in(M\overline{\otimes}N)_*$，指有 $\varphi\in(M\overline{\otimes}N)_*$，使得 $\varphi(x\otimes y)=f(x)g(y)$，$\forall x\in M$，$y\in N$. 自然这 φ 是唯一的，记以 $\varphi=f\otimes g$.

证. 设 $s\in T(\mathscr{H})$，$t\in T(\mathscr{K})$，使得

$$f(x)=\mathrm{tr}\,(sx),\ \forall x\in M,\quad g(y)=\mathrm{tr}\,(ty),\ \forall y\in N,$$

易见 $s\otimes t\in T(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$，$\|s\otimes t\|_1=\|s\|_1\cdot\|t\|_1$，及

$$\mathrm{tr}\,((s\otimes t)(x\otimes y))=f(x)g(y),\ \forall x\in M,\ y\in N.$$

因此，$f\otimes g(\cdot)=\mathrm{tr}\,((s\otimes t)\cdot)\in(M\overline{\otimes}N)_*$，且 $\|f\otimes g\|\leqslant\|s\|_1\cdot\|t\|_1$. 可以取 s，t，使得 $\|s\|_1$，$\|t\|_1$ 分别任意接近 $\|f\|$，$\|g\|$，所以，$\|f\otimes g\|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$. 反向不等式是显然的，因此，$\|f\otimes g\|=\|f\|\cdot\|g\|$. 证毕.

命题 3.8.6 设 $\mathscr{H}=\overset{\xi}{\underset{l\in\Lambda}{\bigotimes}}\mathscr{H}_l$，对每个 $l\in\Lambda$，M_l 是 $\mathscr{H}_l$ 中的 vN 代数. 又设 M 是由 $\left\{M_l\otimes\bigotimes_{l'\neq l}1_{l'}\,\middle|\,l\in\Lambda\right\}$ 生成的 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数. 则

1) M' 由 $\left\{M'_l\otimes\bigotimes_{l'\neq l}1_{l'}\,\middle|\,l\in\Lambda\right\}$ 生成；

2) $M=B(\mathscr{H})$，当且仅当，$M_l=B(\mathscr{H}_l)$，$\forall l\in\Lambda$；

3) M 是 $\mathscr{H}$ 中的因子，当且仅当，M_l 是 $\mathscr{H}_l$ 中的因子，$\forall l\in\Lambda$。

证。1) 设 F 是 Λ 的任意有限子集，显然

$$\mathscr{H}=\left(\bigotimes_{l\in F}\mathscr{H}_l\right)\otimes\left(\bigotimes_{l\notin F}^{\xi}\mathscr{H}_l\right),\quad M=M_F\overline{\otimes}M_{\Lambda\backslash F}$$

这里 M_F 是 $\{M_l|l\in F\}$ 的 vN 代数张量积，即 $M_F=\overline{\bigotimes_{l\in F}}M_l$，$M_{\Lambda\backslash F}$ 由 $\left\{B_l\otimes\bigotimes_{l'\notin F,l'\neq l}1_{l'}\middle| l\notin F\right\}$ 生成。依定理 1.4.12，

$$M'=M'_F\overline{\otimes}M'_{\Lambda\backslash F}.$$

令 $g_F(\cdot)=\left\langle\cdot\bigotimes_{l\notin F}\xi_l,\ \bigotimes_{l\notin F}\xi_l\right\rangle\in(M'_{\Lambda\backslash F})_*$，依引理 3.8.5，有 M' 到 M'_F 中的线性映象 Φ_F，使得

$$\Phi_F(x)(f_F)=(f_F\otimes g_F)(x),\quad\forall x\in M',\ f_F\in(M'_F)_*.$$

设 t 是 $\mathscr{H}$ 中如下形式的一秩算子

$$t\eta=\left\langle\eta,\ \xi_F\otimes\bigotimes_{l\notin F}\xi_l\right\rangle\left(\zeta_F\otimes\bigotimes_{l\notin F}\xi_l\right),\quad\forall\eta\in\mathscr{H},$$

这里 $\xi_F,\zeta_F\in\bigodot_{l\in F}\mathscr{H}_l$。于是可写 $t=t_F\otimes t_{\Lambda\backslash F}$，这里 t_F 是 $\bigotimes_{l\in F}\mathscr{H}_l$ 中的一秩算子，$t_F\eta_F=\langle\eta_F,\ \xi_F\rangle\zeta_F$，$\forall\eta_F\in\bigotimes_{l\in F}\mathscr{H}_l$，$t_{\Lambda\backslash F}$ 是 $\bigotimes_{l\notin F}^{\xi}\mathscr{H}_l$ 中的一秩算子，$t_{\Lambda\backslash F}\eta=\left\langle\eta,\bigotimes_{l\notin F}\xi_l\right\rangle\bigotimes_{l\notin F}\xi_l$，$\forall\eta\in\bigotimes_{l\notin F}^{\xi}\mathscr{H}_l$。设 $f_F(\cdot)=\mathrm{tr}(t_F\cdot)\in(M'_F)_*$，又显然 $\mathrm{tr}(t_{\Lambda\backslash F}\cdot)=g_F(\cdot)\in(M'_{\Lambda\backslash F})_*$，于是对任意的 $x\in M'$，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(t(\Phi_F(x)\otimes p_F))&=(f_F\otimes g_F)(\Phi_F(x)\otimes p_F)\\&=\Phi_F(x)(f_F)=(f_F\otimes g_F)(x)=\mathrm{tr}(tx),\end{aligned}\tag{1}$$

这里 $p_F=\bigotimes_{l\notin F}1_l$。由于 $\|\Phi_F\|\leqslant1$，$\forall F$，$B(\mathscr{H})$ 的有界球是 $\sigma(B(\mathscr{H}),T(\mathscr{H}))$ 紧的，因此 $\{\Phi_F(x)\otimes p_F|F\}$ 有聚点 y。依 (1)，对任何用 $\bigodot_{l\in\Lambda}^{\xi}\mathscr{H}_l$ 元构成的一秩算子 t，有 $\mathrm{tr}(t(x-$

$y)) = 0$. 但这样的 t 的线性和在 $T(\mathscr{H})$ 中是稠的，因此，$x = y$，即

$$\Phi_F(x) \otimes \rho_F \xrightarrow{\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))} x, \ \forall x \in M'.$$

依定理 1.4.12，$\Phi_F(x) \in M'_F = \overline{\bigotimes_{l \in F}} M'_l$，$\forall x \in M'$. 因此

$$M' \subset \left\{ M'_l \otimes \bigotimes_{l' \neq l} 1_{l'} \middle| l \in \Lambda \right\}''$$

反包含关系是显然的，因此，M' 由 $\left\{ M'_l \otimes \bigotimes_{l' \neq l} 1_{l'} \middle| l \in \Lambda \right\}$ 生成.

2) $M = B(\mathscr{H})$，当且仅当，$M' = \mathbb{C}1_{\mathscr{H}}$. 由 1)，这等价于 $M'_l = \mathbb{C}1_l$，$\forall l$，即 $M_l = B(\mathscr{H}_l)$，$\forall l$.

3) M 是 $\mathscr{H}$ 中的因子，当且仅当，$M \cup M'$ 生成 $B(\mathscr{H})$. 依 1)，这等价于 $\left\{ (M_l \cup M'_l) \otimes \bigotimes_{l' \neq l} 1_{l'} \middle| l \in \Lambda \right\}$ 生成 $B(\mathscr{H})$. 依 2)，即 $(M_l \cup M'_l)$ 生成 $B(\mathscr{H}_l)$，或 M_l 是 $\mathscr{H}_l$ 中的因子，$\forall l$. 证毕.

命题 3.8.7 设 Λ 是任意的指标集，A_l 是有单位元 1_l 的 C^*-代数，φ_l 是 A_l 上的态，$\forall l \in \Lambda$. 又若 $\alpha(\cdot)$ 是 $\bigotimes_{l \in \Lambda} A_l$ 上的 C^*-范，$A = \alpha - \bigotimes_{l \in \Lambda} A_l$，则 $\bigotimes_{l \in \Lambda} \varphi_l$ 可以唯一扩张为 A 上的态 φ，并且 φ 是 A 上的纯态(或因子态[1])，当且仅当，φ_l 是 A_l 上的纯态(或因子态)，$\forall l \in \Lambda$.

证. 用 φ_l 产生 A_l 的循环 * 表示 $\{\pi_l, \mathscr{H}_l, \xi_l\}$，$\forall l \in \Lambda$. 命 $\mathscr{H}$ 是 $\{\mathscr{H}_l | l \in \Lambda\}$ 关于参考矢 $\xi = (\xi_l)_{l \in \Lambda}$ 的张量积，$\pi = \bigotimes_{l \in \Lambda} \pi_l$，于是，$\{\pi, \mathscr{H}, \xi\}$ 是 A 的循环 * 表示.

依系 3.2.6，$\bigotimes_{l \in \Lambda} \varphi_l$ 可唯一扩张为 A 上的态 φ. 用 φ 产生 A 的循环 * 表示 $\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi, 1_\varphi\}$. 由于

1) C^*-代数的态称为因子的，指它产生的 * 表示是因子的 (定义 2.10.5).

$$\langle\pi(u)\xi,\xi\rangle=\bigotimes_{l\in\Lambda}\varphi_l(u)=\varphi(u)=\langle\pi_\varphi(u)1_\varphi,1_\varphi\rangle,$$

$\forall u\in\bigotimes_{l\in\Lambda}A_l$，因此，$\{\pi,\mathscr{H}\}\cong\{\pi_\varphi,\mathscr{H}_\varphi\}$。今依命题 3.8.6，立即得证.

注. 依命题 3.8.1，$A=\alpha-\bigotimes_{l\in\Lambda}A_l*$同构于

$$\lim_F\{B_F,\Phi_{F'F}|(F,F')\in\mathrm{I}\times\mathrm{I},F\subset F'\}.$$

显然 $\bigotimes_{l\in F}\varphi_l$ 可唯一扩张为 $B_F=\alpha_F-\bigotimes_{l\in F}A_l$ 上的态 φ_F，$\forall F\in\mathrm{I}$. 依定义 3.7.7 易见A上的态 $\varphi=\bigotimes_{l\in\Lambda}\varphi_l$ 即相应于 $\lim_F\{B_F,\Phi_{F'F}|(F,F')\in\mathrm{I}\times\mathrm{I},F\subset F'\}$ 上的诱导极限态 $\lim_F\{\varphi_F,\Phi_{F'F}|(F,F')\in\mathrm{I}\times\mathrm{I},F\subset F'\}$.

注 本节见参考文献[41]，[80]，[97]，[111].

第四章　w^*-代数

w^*-代数就是抽象的 vN 代数，它不依赖于 Hilbert 空间而定义，然而可以通过 vN 代数的理论来研究它。因此，本章是第一章的继续。

§1 指出范数为 1 的投影映象就是条件期望（4.1.5），它属于 H. Umegahi 与 J. Tomiyama. §2 证明重要的 S. Sakai 定理(4.2.6)，指出 w^*-代数与 vN 代数 * 同构，因此，w^*-代数是 vN 代数的抽象定义。这个定理与 c^*-代数表示定理（2.3.20），可以说整个算子代数的理论是基于它们而发展起来的。此外，§2 中的证明利用 §1 的结果（不同于 Sakai 原来的证明）。§3 用抽象的方式定义 w^*-代数的张量积，实质与 vN 代数张量积相同。§4 指出 w^*-代数上任意有界线性泛函可分解为正规部分与奇异部分，并给出了奇异泛函的特征（4.4.2，属于 M. Takesaki）与正规泛函的全可加的特征（4.4.5）。此外，又证明了 w^*-代数的准对偶是弱列备的（4.4.7，属于 C. A. Akemann）。§5 讨论 w^*-代数准对偶的弱紧子集的特征（4.5.1），可以说是第一章 §11 的继续。

§1.　范数为 1 的投影映象

定义 4.1.1　设 A 是有单位元 1 的 C^*-代数，B 是 A 的 c^*-子代数，且 $1\in B$，P 是 A 到 B 上范数为 1 的投影映象，指 P 是线性的，$PA=B$，$Pb=b$，$\forall b\in B$，及 $\|Pa\|\leqslant\|a\|$，$\forall a\in A$.

引理 4.1.2　设 Φ 是 c^*-代数 A 到 c^*-代数 B 中的正线性映象，并且 A 有单位元 1，则 $\|\Phi\|=\|\Phi(1)\|$.

证．依定理 2.12.5，只须证明

$$\|\Phi(e^{ih})\|\leqslant\|\Phi(1)\|,\ \forall h^*=h\in A,$$

因此可以假定 A 是交换的. 依命题 3.6.6, Φ 将是全正的. 无妨设 $B\subset B(\mathscr{K})$. 依定理 3.6.7, 有 A 的非退化 * 表示 $\{\pi, \mathscr{H}\}$, 及 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{H}$ 中的算子 v, 使得

$$\Phi(a)=v^*\pi(a)v,\ \forall a\in A,\ \|v\|=\|\Phi\|^{\frac{1}{2}},$$

于是 $\|\Phi(1)\|=\|v^*v\|=\|v\|^2=\|\Phi\|$. 证毕.

命题 4.1.3 设 A 是有单位元 1 的 c^*-代数, P 是 A 中的正线性映象,并且 $P1=1$ 及

$$P(Pb_1\cdot a\cdot Pb_2)=Pb_1\cdot Pa\cdot Pb_2,\ \forall a, b_1, b_2\in A,$$

则 $PA=B$ 是 A 的 c^*-子代数, $1\in B$, 及 P 是 A 到 B 上范数为 1 的投影映象.

证. 依引理 4.1.2, $\|P\|=1$. 对于任意的 $a\in A$, $P^2a=P(P1\cdot 1\cdot Pa)=Pa$, 因此 P 是 A 中的投影映象. 今只须证明 $PA=B$ 是 A 的 c^*-子代数. 由于 P 是正的,因此, $B^*=B$. 又

$$Pa\cdot Pb=Pa\cdot P1\cdot Pb=P(Pa\cdot 1\cdot Pb),\ \forall a, b\in A,$$

因此, B 对于乘法运算封闭. 此外,如果 a_n, $a\in A$, $Pa_n\to a$, 则 $P^2a_n=Pa_n\to Pa=a$, 即 B 是闭的. 证毕.

引理 4.1.4 设 P 是 A 到 B 上的范数为 1 的投影映象,则 P 可扩张为 A^{**} 到 B^{**} 上范数为 1 的投影映象,并且将是 $\sigma(A^{**}, A^*)$-$\sigma(B^{**}, B^*)$ 连续的.

注. 依定理 2.11.2, A^{**} 是 c^*-代数,并以 A 为它的 c^*-子代数,同时 A 的单位元亦将是 A^{**} 的单位元. 此外,依命题 2.11.4, B^{**} 可看作为 B 在 A^{**} 中的 $\sigma(A^{**}, A^*)$ 闭包,因此, B^{**} 也是 A^{**} 的 c^*-子代数.

证. 显然, P^{**} 是 A^{**} 到 B^{**} 上范数为 1 的、且 $\sigma(A^{**}, A^*)$-$\sigma(B^{**}, B^*)$ 连续的线性映象. 此外, $P^{**}|A=P$, 因此, P^{**} 也是投影映象. 证毕.

定理 4.1.5 设 A 是有单位元 1 的 c^*-子代数, B 是 A 的 c^*-子代数,且 $1\in B$, P 是 A 到 B 上范数为 1 的投影映象,则

1) P 是全正的;

2) $P(Pa\cdot b)=Pa\cdot Pb=P(a\cdot Pb)$, $\forall a, b\in A$;

3) $(Px)^* \cdot (Px) \leqslant P(x^*x)$, $\forall x \in A$.

证. 首先指出 P 是正的. 无妨设 $B \subset B(\mathscr{H})$, 及 $1 = 1_{\mathscr{H}}$, 对任意的 $\xi \in \mathscr{H}$, 令

$$\omega_\xi(a) = \langle P(a)\xi, \xi \rangle, \ \forall a \in A.$$

由于 $P1 = 1$, $\|P\| = 1$, 因此, $\omega_\xi(1) = \|\xi\|^2 = \|\omega_\xi\|$. 依命题 2.3.3, $\omega_\xi(\cdot)$ 是 A 上的正泛函. 因此, P 是 A 到 B 的正线性映象.

必要时,把 P 作如同引理 4.1.3 的扩张,于是依定理 2.11.2, 可以假定 B 为其投影元全体的线性闭包. 因此, 2) 可以归结为证明

$$P(pa) = p \cdot Pa, \ P(ap) = Pa \cdot p,$$

但由于 P 是正的,将保持 $*$ 运算,从而 2) 又归结为证明:

$$P(pa) = p \cdot Pa, \ \forall a \in A,$$

p 为 B 的投影元.

今取定 B 的投影元 p. 如果 $y \in A_+$, $\|y\| \leqslant 1$, 于是 $p \geqslant pyp$, $Pp = p \geqslant P(pyp)$. 所以, $pP(pyp)p = P(pyp)$. 进而

$$P(pxp) = pP(pxp)p, \ \forall x \in A \tag{1}$$

代 p 以 $(1-p)$, 则又有

$$\begin{aligned} &P((1-p)x(1-p)) \\ &= (1-p)P((1-p)x(1-p))(1-p), \ \forall x \in A. \end{aligned} \tag{1'}$$

取定 $a \in A$, $\|a\| \leqslant 1$, 则

$$\begin{aligned} \|pa(1-p) \pm np\| &= \|(pa(1-p) \pm np) \cdot (pa(1-p) \pm np)^*\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \|pa(1-p)a^*p + n^2p\|^{\frac{1}{2}} \leqslant (1+n^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

令 $a' = P(pa(1-p))$. 如果 $\frac{1}{2}(pa'p + pa'^*p) \neq 0$, 无妨设它有正的谱点 λ (若只有负谱,下面的 n 代以 $-n$, 同证之),于是

$$\begin{aligned} \|a' + np\| &\geqslant \|pa'p + np\| \\ &\geqslant \left\| \frac{1}{2}(pa'p + pa'^*p) + np \right\| \geqslant \lambda + n \end{aligned}$$

从而 $(1+n^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant \|pa(1-p) + np\| \geqslant \|P(pa(1-p) + np)\| = \|a' + np\| \geqslant \lambda + n$, 这当 n 充分大时是不可能的. 因此,

$$\frac{1}{2}(pa'p + pa'^*p) = 0.$$

同样，如果 $\frac{1}{2}(pa'p - pa'^*p) \neq 0$，代上面的 n 以 in，也得到矛盾. 所以

$$pa'p = 0. \tag{2}$$

由于 $a'^* = P((1-p)a^*p)$，同上证明(但代 p 以 $(1-p)$)，应有 $(1-p)a'^*(1-p) = 0$，因此

$$(1-p)a'(1-p) = 0. \tag{3}$$

今设 $(1-p)a'p \neq 0$，由 (2)，(3)，当 n 充分大时，

$$\|a' + n(1-p)a'p\| = \|pa'(1-p) + (n+1)(1-p)a'p\|$$
$$= \max\{\|pa'(1-p)\|, (n+1)\|(1-p)a'p\|\}$$
$$= (n+1)\|(1-p)a'p\|;$$

另一方面，n 充分大时，由于 $(1-p)a'p \in B$，

$$\|a' + n(1-p)a'p\| = \|P(pa(1-p) + n(1-p)a'p)\|$$
$$\leqslant \|pa(1-p) + n(1-p)a'p\| = n\|(1-p)a'p\|$$

这就产生矛盾. 因此，

$$(1-p)a'p = 0. \tag{4}$$

由 (2)，(3)，(4)，$a' = pa'(1-p)$，即

$$P(pa(1-p)) = pP(pa(1-p))(1-p) \tag{5}$$

代 p 以 $(1-p)$，同样有

$$P((1-p)ap) = (1-p)P((1-p)ap)p \tag{6}$$

由 $Pa = P(pap) + P(pa(1-p)) + P((1-p)ap) + P((1-p)a(1-p))$，并利用 (1)，(1′)，(5)，(6)，可见

$$p \cdot Pa \cdot (1-p) = P(pa(1-p)),$$
$$p \cdot Pa \cdot p = P(pap).$$

所以，$p \cdot Pa = P(pa)$. 于是 2) 得证.

对任意的 n，$b_1, \cdots, b_n \in B$，$a_1, \cdots, a_n \in A$，依 2) 及 P 是正的，于是

$$\sum_{i,j} b_i^* P(a_i^* a_j) b_j = \sum_{i,j} P(b_i^* a_i a_j b_j)$$

$$= P\left(\left(\sum_i a_i b_i\right)^* \cdot \left(\sum_i a_i b_i\right)\right)$$

是B的正元，因此，P是全正的。

最后，由于

$$\begin{aligned} & P(x^*x) - (Px)^* \cdot (Px) \\ &= P(x^*x) - P(Px^* \cdot x) - P(x^* \cdot Px) + P(Px^* \cdot 1 \cdot Px) \\ &= P((x - Px)^* \cdot (x - Px)) \geqslant 0. \end{aligned}$$

所以，$(Px)^* \cdot (Px) \leqslant P(x^*x)$，$\forall x \in A$. 证毕.

命题 4.1.6 设 M，N 分别是 $\mathscr{H}$，$\mathscr{K}$ 中的 vN 代数，则存在 $M\bar{\otimes}N$ 到N上的范数为 1 的投影映象Φ，并且Φ是$\sigma-\sigma$连续的.

注. 这里把N与$1_{\mathscr{H}}\otimes N$ 等同起来，从而N可看成 $M\bar{\otimes}N$ 的 c^*-子代数，且包含 $M\bar{\otimes}N$ 的单位元.

证. 设φ是 M 上的正规态，定义

$$\Phi(x)(f) = x(\varphi\otimes f),\ \forall x \in M\bar{\otimes}N、f \in N_*.$$

依引理 3.8.5，即可见Φ满足要求. 证毕.

注 本节见参考文献 [124]，[125]，[127].

§2. w^*-代数及其*表示

定义 4.2.1 c^*-代数 M 称为 w^*-代数，指存在 Banach 空间 M_*，使得 $M = (M_*)^*$.

依命题 1.3.3，所有的vN代数是 w^*-代数. 依定理 2.11.2，如果A是 c^*-代数，则 A^{**} 是 w^*-代数.

引理 4.2.2 w^*-代数必有单位元.

事实上，它的单位球是弱*紧凸的，必有端点. 再依定理 2.5.3，可见必有单位元.

今设 M 是 w^*-代数，其单位元是 1. 依定理 2.11.2，M^{**} 也是 w^*-代数 以 M 为它的 c^*-子代数，且 1 也是 M^{**} 的单位元. 设 $M = (M_*)^*$，把 M_* 看作 M^* 的闭子空间，令 $P: M^{**} \to M$，

$$P(X) = X|M_*,\ \forall X \in M^{**}.$$

显然，P 将是 M^{**} 到 M 上范数为 1 的投影映象，并且是 $\sigma(M^{**}, M^*)$-$\sigma(M, M_*)$ 连续的. 令

$$\vartheta = \{X \in M^{**} | PX = 0\} = M_*^{\perp},$$

即是 M_* 作为 M^* 的闭子空间在 M^{**} 中的直交余，因此，ϑ 是 $\sigma(M^{**}, M^*)$ 闭的. 依定理 4.1.5，

$$P(aXb) = a \cdot P(X) \cdot b, \ \forall X \in M^{**}, \ a, b \in M.$$

依第二章 § 11 的讨论，M^{**} 可以看作为 vN 代数，因此，M^{**} 中的乘法对单个变量是 $\sigma(M^{**}, M^*)$ 连续的. 又 M 在 M^{**} 中是 $\sigma(M^{**}, M^*)$ 稠的，从而，ϑ 是 M^{**} 的 * 双侧理想. 依命题 1.7.1，有 M^{**} 唯一的中心投影 z，使得

$$\vartheta = M_*^{\perp} = M^{**}(1 - z).$$

P 是投影映象及 ϑ 是双侧理想，因此，

$$(P(X) - X) \in \vartheta, \ (P(X) - X)Y \in \vartheta.$$

依定理 4.1.5，

$$P(XY) = P(X) \cdot P(Y), \ \forall X, Y \in M^{**},$$

所以，P 是 $M^{**}z$ 到 M 上的 * 同构.

显然，$P(xz) = x$, $\forall x \in M$，因此，如果 Q 是 $P: M^{**}z \to M$ 的逆映象，则

$$Q(x) = xz, \ \forall x \in M.$$

任意的 $X \in M^{**}$，可写为 $X = P(X) + (X - PX)$. 又若 $x \in M \cap \vartheta$，则 $x = Px = 0$，因此，

$$M^{**} = M \dotplus M_*^{\perp}.$$

M^{**} 中的乘法对单个变量是 $\sigma(M^{**}, M^*)$ 连续的，因此如果 $F \in M^*$，则 $R_z F$ 与 $R_{(1-z)} F$（其意义见第一章 § 9）也 $\in M^*$，从而，$M^* = R_z M^* \dotplus R_{(1-z)} M^*$. 今证明

$$M_* = R_z M^*.$$

事实上，M_* 是 M^* 的闭子空间，因此，$M_* = (M_*^{\perp})_{\perp} = (M^{**}(1-z))_{\perp}$. 由此，$M_* \supset R_z M^*$. 反之，如果 $f \in M_*$，则 $f(X(1-z)) = 0$，$f(X) = f(Xz) = (R_z f)(X)$，$\forall X \in M^{**}$，因此，$f = R_z f$. 所以，$M_* = R_z M^*$.

今指出 M 到 $M^{**}z$ 上的 * 同构 Q 也是 $\sigma(M, M_*)$-$\sigma(M^{**}, M^*)$ 连续的. 设网 $\{x_l\}\subset M$, $x_l \xrightarrow{\sigma(M, M_*)} 0$, 对任意的 $F\in M^*$, 由于 $f=R_zF\in M_*$, 因此,

$$F(Q(x_l))=F(x_lz)=f(x_l)\to 0.$$

综上所述,我们有

命题 4.2.3 设 M 是 w^*-代数, $M=(M_*)^*$, 把 M, M_* 分别正则地嵌入 M^{**}, M^* 之中,则存在 M^{**} 的中心投影 z 及 M^{**} 到 M 上范数为 1 的投影映象 P, 使得:

1) P 也是 M^{**} 到 M 上的 * 同态, 并且是 $\sigma(M^{**}, M^*)$-$\sigma(M, M_*)$ 连续的;

2) P 是 $M^{**}z$ 到 M 上的 * 同构, 设其逆映象为 Q, 则 $Q(x)=xz$, $\forall x\in M$, 并且 Q 也是 $\sigma(M, M_*)$-$\sigma(M^{**}, M^*)$ 连续的;

3) $M_*^{\perp}=M^{**}(1-z)$, $M_*=R_zM^*$, 以及

$$M^{**}=M\dotplus M_*^{\perp},\ M^*=M_*\dotplus R_{(1-z)}M^*.$$

定义 4.2.4 设 M 是 w^*-代数, $M=(M_*)^*$, $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 称为 M 的 w^*-表示,指 π 是 M 到 $B(\mathscr{H})$ 中的 * 同态, 并且是 $\sigma(M, M_*)$-$\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 连续的.

如果 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 M 的 w^*-表示,仿照命题 1.8.13 的证明,易见 $\pi(M)$ 是 $\mathscr{H}$ 中弱算子闭的 * 代数. 如果 π 还是非退化的,则 $\pi(1)=1_{\mathscr{H}}$, 及 $\pi(M)$ 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数. 此外,如果 π 是忠实的, 依命题 1.2.6 及 M 单位球的 $\sigma(M, M_*)$ 紧性, 易见 $\pi(M)$ 到 M 上的 * 同构 π^{-1} 也是 $\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$-$\sigma(M, M_*)$ 连续的.

定理 4.2.5 设 M 是 w^*-代数, 则 M 有忠实的非退化 w^*-表示. 特别, w^*-代数必可 * 同构于 vN 代数,且这 * 同构是 σ-σ 连续的.

证. 设 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 M 作为 c^*-代数的泛表示, 依第二章 § 11 的讨论, $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 可开拓为 w^*-代数 M^{**} 忠实的非退化 w^*-表示, 仍记以 $\{\pi, \mathscr{H}\}$. 依命题 4.2.3, 有 M 到 $M^{**}z$ 上 σ-σ 连续的 *

同构 Q，于是，$\{\pi\circ Q,\ \pi(z)\mathscr{H}\}$ 即为 M 忠实的非退化 w^*-表示。证毕。

注. 依此定理，我们可以把 w^*-代数当作 vN 代数来对待(只要不涉及到 vN 代数的交换子). 特别，我们有

命题 4.2.6 设 M 是 w^*-代数，$M=(M_*)^*$，则 M 中的 $*$ 运算是 $\sigma(M, M_*)$ 连续的；乘法对单个变量也是 $\sigma(M, M_*)$ 连续的；M_* 是 M 上正规正泛函全体的线性包，特别，M_* 是唯一的[1]；对 M 上任意的正规正泛函 φ，通过 GNS 构造，可以产生 M 的循环 w^*-表示 $\{\pi_\varphi,\ \mathscr{H}_\varphi,\ 1_\varphi\}$. 如果记 $\mathscr{S}_n$ 为 M 上正规态的全体，则 $\left\{\pi=\sum_{\varphi\in\mathscr{S}_n}\oplus\pi_\varphi,\ \mathscr{H}=\sum_{\varphi\in\mathscr{S}_n}\oplus\mathscr{H}_\varphi\right\}$ 是 M 忠实的非退化 w^*-表示，将称它为 w^*-代数 M 的正规泛表示。

现在讨论 w^*-表示的几个性质.

定理 4.2.7 设 A 是 c^*-代数，$\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 A 的 $*$ 表示，则存在 w^*-代数 A^{**} 唯一的 w^*-表示 $\{\tilde{\pi}, \mathscr{H}\}$ 是 π 的扩张，并且 $\tilde{\pi}(A^{**})$ 是 $\pi(A)$ 的弱算子闭包. 反之，如果 $\{\pi^w, \mathscr{H}\}$ 是 A^{**} 的 w^*-表示，$\{\pi=\pi^w|A,\ \mathscr{H}\}$ 是 A 的 $*$ 表示，当将 π 作上述的扩张时，$\tilde{\pi}=\pi^w$. 因此，A 的 $*$ 表示与 A^{**} 的 w^*-表示一一对应.

证. 注意 π: $A\to B(\mathscr{H})$，π^*: $B(\mathscr{H})^*\to A^*$. 令 $\pi_*=\pi^*|T(\mathscr{H})$，及 $\tilde{\pi}=(\pi_*)^*$，则 $\tilde{\pi}$: $A^{**}\to B(\mathscr{H})$，我们来证明 $\tilde{\pi}$ 即满足要求. 由于 $\pi_*: T(\mathscr{H})\to A^*$，因此，$\tilde{\pi}$ 是 $\sigma(A^{**}, A^*)$-$\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 连续的. 注意

$$\tilde{\pi}(a)(t)=a(\pi_*(t))=a(\pi^*(t))=\pi(a)(t),$$
$$\forall a\in A,\ t\in T(\mathscr{H}).$$

所以，$\tilde{\pi}$ 是 π 的扩张. 今 A 在 A^{**} 中是 $\sigma(A^{**}, A^*)$ 稠的，又 $\tilde{\pi}$ σ-σ 连续，因此，$\{\tilde{\pi}, \mathscr{H}\}$ 是 A^{**} 的 w^*-表示，且为 π 的唯一扩张. 定义 4.2.4 已指出 $\tilde{\pi}(A^{**})$ 是弱算子闭的，因此是 $\pi(A)$ 的弱算子闭包. 定理的其余部分是显然的. 证毕。

---

1) 因此，也称 M_* 为 M 的预对偶(predual)。

命题 4.2.8 设 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$ 是 w^*-代数M的非退化 w^*-表示，$\ker\pi_i = \{a \in M \mid \pi_i(a) = 0\}$，$i = 1, 2$. 如果 $\ker\pi_1 \subset \ker\pi_2$，则 $\{\pi_2, \mathscr{H}_2\}$ 酉等价于 $\{\pi_1, \mathscr{H}_1\}$ 的某个增补的诱导，即存在 Hilbert 空间 $\mathscr{K}$，及 $(\pi_1(M)\bar{\otimes}C1_{\mathscr{K}})'$ 的投影 p'，使得 $\{\pi_2, \mathscr{H}_2\}$ 酉等价于$\{\pi, p'(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{K})\}$，这里 $\pi(a) = (\pi_1(a) \otimes 1_{\mathscr{K}})p'$，$\forall a \in M$.

证. 令 $M_i = \pi_i(M)$，则 M_i 是 $\mathscr{H}_i$ 中的 vN 代数，$i = 1, 2$. 由于 $\ker\pi_1 \subset \ker\pi_2$，因此可以建立 M_1 到 M_2 上的正规 * 同态 Φ，使得 $\Phi \circ \pi_1 = \pi_2$. 今依定理 1.12.4，即得证.

命题 4.2.9 设$\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$是 w^*-代数 M 的 w^*-表示，$\ker\pi_i = \{a \in M \mid \pi_i(a) = 0\}$，$i = 1, 2$. 如果 $\pi_i(M)$ 在 $\mathscr{H}_i$ 中既有循环矢，又有分离矢，$i = 1, 2$，并且 $\ker\pi_1 = \ker\pi_2$，则 $\{\pi_1, \mathscr{H}_1\} \cong \{\pi_2, \mathscr{H}_2\}$.

证. $M_i = \pi_i(M)$ 是 $\mathscr{H}_i$ 中的 vN 代数，$i = 1, 2$. 由于 $\ker\pi_1 = \ker\pi_2$，因此可以建立 M_1 到 M_2 上的 * 同构 Φ，使得 $\Phi \circ \pi_1 = \pi_2$. 今依定理 1.13.5，即得证.

注 本节见参考文献 [13]，[90]，[124]，[125].

§ 3. w^*-代数的张量积

设 M, N 是 w^*-代数，我们要定义它们的张量积，使之仍然为 w^*-代数. 如果把它们与 vN 代数等同起来，可以通过 vN 代数的张量积来定义，而且这样的定义，并不依赖所 * 同构的 vN 代数的选择 (定理 1.12.6). 本节将从 M, N 本身出发来定义，而且结果与上面的一致.

设 M, N 是 w^*-代数，$M = (M_*)^*$，$N = (N_*)^*$. 作为 c^*-代数，M 与 N 的代数张量积 $M \otimes N$ 上有空间 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$，依此完备化，得到的 c^*-代数记以 $M \otimes_{\alpha_0} N$，设 $\alpha_0^*(\cdot)$ 是 $\alpha_0(\cdot)$的对偶范数(见第三章 § 1)，于是

$$(M \otimes_{\alpha_0} N)^* \supset M^* \otimes_{\alpha_0^*} N^* \supset M_* \otimes_{\alpha_0^*} N_*.$$

这里$M^* \otimes_{\alpha_0^*} N^*$ 是 $M^* \otimes N^*$ 依 $\alpha_0^*(\cdot)$ 的完备化；$M_* \otimes_{\alpha_0^*} N_*$ 是

$M_*\otimes N_*$ 依 $\alpha_0^*(\cdot)$ 的完备化，也可理解为 $M^*\otimes_{\alpha_0^*}N^*$ 的由 $M_*\otimes N_*$ 张成的闭子空间. 令

$$\vartheta=(M_*\otimes_{\alpha_0^*}N_*)^{\perp},$$

即 $(M_*\otimes_{\alpha_0^*}N_*)$ 作为 $(M\otimes_{\alpha_0}N)^*$ 的闭子空间在 $(M\otimes_{\alpha_0}N)^{**}$ 中的直交余. 设 $Y\in\vartheta$，$X\in(M\otimes_{\alpha_0}N)^{**}$，自然可取网 $\{u_l\}\subset M\otimes N$，使得依 $(M\otimes_{\alpha_0}N)^{**}$ 中的弱 * 拓扑，$u_l\to X$. 对任意的 $f\in M_*\otimes N_*$，由于 $L_{u_l}f$，$R_{u_l}f$ 仍然属于 $M_*\otimes N_*$，于是

$$f(u_lY)=(L_{u_l}f)(Y)=0,\ f(Yu_l)=(R_{u_l}f)(Y)=0,$$

对 l 取极取，可见 XY 与 $YX\in\vartheta$，即 ϑ 是 w^*-代数 $(M\otimes_{\alpha_0}N)^{**}$ 的弱 * 闭的双侧理想. 由此，$(M\otimes_{\alpha_0}N)^{**}/\vartheta$ 也是 w^*-代数，并且它是 $(M_*\otimes_{\alpha_0^*}N_*)$ 的共轭空间.

定义 4.3.1 w^*-代数 $(M\otimes_{\alpha_0}N)^{**}/\vartheta$ 称为 w^*-代数 M，N 的张量积，记以 $M\bar{\otimes}N$.

依前面的讨论， $M\bar{\otimes}N=(M_*\otimes_{\alpha_0^*}N_*)^*$， $M_*\otimes_{\alpha_0^*}N_*=(M\bar{\otimes}N)_*$.

引理 4.3.2 $M_*\otimes N_*$ 在 $(M\otimes_{\alpha_0}N)^*$ 中是弱 * 稠的.

证. 依命题 3.2.10，$M^*\otimes N^*$ 在 $(M\otimes_{\alpha_0}N)^*$ 中是弱 * 稠的. 今注意 M_*，N_* 在 M^*，N^* 中分别是有界地弱 * 稠的，又 $\alpha_0^*(\cdot)$ 是 $M^*\otimes N^*$ 上的交叉范，于是易证 $M_*\otimes N_*$ 在 $M^*\otimes N^*$ 中将依 $(M\otimes_{\alpha_0}N)^*$ 中的弱 * 拓扑是稠的. 所以，$M_*\otimes N_*$ 在 $(M\otimes_{\alpha_0}N)^*$ 中是弱 * 稠的. 证毕.

命题 4.3.3 $(M\otimes_{\alpha_0}N)\cap\vartheta=\{0\}$，于是 $M\otimes_{\alpha_0}N$ 可以嵌入 $M\bar{\otimes}N$ 之中，并且是弱 * 稠的.

证. 设 $x\in(M\otimes_{\alpha_0}N)\cap\vartheta$，于是

$$(f\otimes g)(x)=0,\ \forall f\in M_*,\ g\in N_*,$$

再依引理 4.3.2，$x=0$. 今若 $\tilde{X}\in M\bar{\otimes}N=(M\otimes_{\alpha_0}N)^{**}/\vartheta$，$X\in\tilde{X}$，于是有网 $\{x_l\}\subset M\otimes_{\alpha_0}N$，依 $(M\otimes_{\alpha_0}N)^{**}$ 的弱 * 拓扑，$x_l\to X$. 从而对任意的 $F\in(M\bar{\otimes}N)_*=M_*\otimes_{\alpha_0^*}N_*\subset(M\otimes_{\alpha_0}N)^*$，

$$|(\tilde{x}_l-\tilde{X})(F)|=|(x_l-X)(F)|\to 0,$$

即 $M\otimes_{\alpha_0}N$ 在 $M\bar{\otimes}N$ 中是弱 * 稠的. 证毕.

定理 4.3.4 设 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$ 是 w^*-代数 M_i 的非退化 w^*-表示，$i=1,2$，则存在 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 唯一的 w^*-表示 $\{\pi, \mathscr{H}\}$，这里 $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$，使得

$$\pi(a_1\otimes a_2)=\pi_1(a_1)\otimes\pi_2(a_2),\ \forall a_i\in M_i,\ i=1,2,$$

并且 $\pi(M_1\bar{\otimes}M_2)=\pi_1(M_1)\bar{\otimes}\pi_2(M_2)$（vN 代数 $\pi_1(M_1)$ 与 $\pi_2(M_2)$ 的张量积）. 此外，如果 π_i 是忠实的，$i=1,2$，则 π 也是忠实的.

证. 依命题 3.2.7，有 $M_1\otimes_{\alpha_0}M_2$ 唯一的 $*$ 表示 $\{\pi_0, \mathscr{H}\}$，使得 $\pi_0(a_1\otimes a_2)=\pi_1(a_1)\otimes\pi_2(a_2)$，$\forall a_1\in M_1$，$a_2\in M_2$. 依定理 4.2.7，$\pi_0$ 可以唯一扩张为 $(M_1\otimes_{\alpha_0}M_2)^{**}$ 的 w^*-表示 $\{\bar{\pi}_0, \mathscr{H}\}$. 对任意的 $\xi_i, \eta_i\in\mathscr{H}_i$，令 $f_i(\cdot)=\langle\pi_i(\cdot)\xi_i, \eta_i\rangle\in(M_i)_*$，$i=1,2$，于是 $f_1\otimes f_2\in(M_1)_*\otimes(M_2)_*\subset(M_1\otimes_{\alpha_0}M_2)^*$. 依 ϑ 的定义，

$$f_1\otimes f_2(\vartheta)=\{0\}.$$

又 $\mathscr{H}_1\odot\mathscr{H}_2$ 在 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 中稠，因此，$\bar{\pi}_0(\vartheta)=\{0\}$. 从而，$\bar{\pi}_0$ 可以诱导 $M_1\bar{\otimes}M_2=(M_1\otimes_{\alpha_0}M_2)^{**}/\vartheta$ 的 w^*-表示 $\{\pi, \mathscr{H}\}$. 易见 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 将满足要求. 其唯一性是显然的.

此外，如果 π_i 是忠实的，$i=1,2$. 由于 M_i 与 $\pi_i(M_i)$ $*$ 同构，因此如果 $f_i\in(M_i)_*$，必有 $\sum_n(\|\xi_n^{(i)}\|^2+\|\eta_n^{(i)}\|^2)<\infty$，这里 $\xi_n^{(i)}, \eta_n^{(i)}\in\mathscr{H}_i$，使得

$$f_i(\cdot)=\sum_n\langle\pi_i(\cdot)\xi_n^{(i)}, \eta_n^{(i)}\rangle,\ i=1,2,$$

从而对任意的 $x\in M_1\bar{\otimes}M_2$，有

$$f_1\otimes f_2(x)=\sum_{j,k}\langle\pi(x)\xi_j^{(1)}\otimes\xi_k^{(2)}, \eta_j^{(1)}\otimes\eta_k^{(2)}\rangle.$$

今若 $\pi(x)=0$，则 $f_1\otimes f_2(x)=0$，$\forall f_i\in(M_i)_*$，$i=1,2$. 但 $(M_1)_*\otimes(M_2)_*$ 在 $(M_1)_*\otimes_{\alpha_0^*}(M_2)_*=(M_1\bar{\otimes}M_2)_*$ 中是稠的，因此，$x=0$，即 π 也是忠实的. 证毕.

系 4.3.5 设 M_i 是 $\mathscr{H}_i$ 中的 vN 代数，$i=1,2$，则 M_1 与 M_2 的 w^*-代数张量积 $*$ 同构于其 vN 代数张量积.

命题 4.3.6 设 φ_i 是 w^*-代数 M_i 上的正规正泛函，$i=1,2$，则有唯一的 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 上的正规正泛函 φ，使得

$$\varphi(a_1 \otimes a_2) = \varphi_1(a_1) \cdot \varphi_2(a_2), \ \forall a_i \in M_i, \ i = 1, 2,$$

并且 $s(\varphi) = s(\varphi_1) \otimes s(\varphi_2)$.

证. 设 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i, \xi_i\}$ 是 φ_i 所产生的 M_i 的循环 w^*-表示, $i = 1, 2$. 依定理 4.3.4, $\pi_1 \otimes \pi_2$ 可唯一扩张为 $M_1 \overline{\otimes} M_2$ 的 w^*-表示 $\{\pi, \mathscr{H}\}$, 这里 $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. 令

$$\varphi(x) = \langle \pi(x) \xi_1 \otimes \xi_2, \ \xi_1 \otimes \xi_2 \rangle, \ \forall x \in M_1 \overline{\otimes} M_2,$$

易见 φ 即满足要求. 此外, 由命题 1.8.11 及定理 1.4.12, $s(\varphi) = s(\varphi_1) \otimes s(\varphi_2)$. 证毕.

命题 4.3.7 设 Φ_i 是 w^*-代数 M_i 到 w^*-代数 N_i 中的全正映象,并且是 σ-σ 连续的, $i = 1, 2$, 则存在 $M_1 \overline{\otimes} M_2$ 到 $N_1 \overline{\otimes} N_2$ 中 σ-σ 连续的全正映象 Φ, 使得

$$\Phi(a_1 \otimes a_2) = \Phi_1(a_1) \otimes \Phi_2(a_2), \ \forall a_i \in M_i, \ i = 1, 2.$$

证. 依命题 3.6.11, 有 $M_1 \otimes_{\alpha_0} M_2$ 到 $N_1 \otimes_{\alpha_0} N_2$ 中的全正映象 Φ_0, 使得

$$\Phi_0(a_1 \otimes a_2) = \Phi_1(a_1) \otimes \Phi_2(a_2), \ \forall a_i \in M_i, \ i = 1, 2,$$

对任意的 $f_i \in (N_i)_*$, $i = 1, 2$, 由于 Φ_i 是 σ-σ 连续的,因此,

$$\Phi_0^*(f_1 \otimes f_2) = \Phi_1^*(f_1) \otimes \Phi_2^*(f_2) \in (M_1)_* \otimes (M_2)_*.$$

进而, $\Phi_0^*((N_1)_* \otimes_{\alpha_0^*} (N_2)_*) \subset (M_1)_* \otimes_{\alpha_0^*} (M_2)_*$. 命

$$\Phi = (\Phi_0^* | (N_1)_* \otimes_{\alpha_0^*} (N_2)_*)^*,$$

则 Φ 是 $M_1 \overline{\otimes} M_2$ 到 $N_1 \overline{\otimes} N_2$ 中的 σ-σ 连续映象,并且 $\Phi(a_1 \otimes a_2) = \Phi_1(a_1) \otimes \Phi_2(a_2)$, $\forall a_i \in M_i$, $i = 1, 2$.

为了证明 Φ 是全正的,假定 $N_1 \overline{\otimes} N_2 \subset B(\mathscr{H})$, 于是需要对任意的正整数 n, $x_1, \cdots, x_n \in M_1 \overline{\otimes} M_2$, 及 $\xi_1, \cdots, \xi_n \in \mathscr{H}$, 证明

$$\sum_{ij} \langle \Phi(x_i^* x_j) \xi_j, \ \xi_i \rangle \geq 0.$$

这由 $\Phi | M_1 \otimes M_2 = \Phi_0$ 以及稠密性定理 1.6.1 即可得证.

注 本节可参考文献 [72].

§ 4. 全可加泛函与奇异泛函

定义 4.4.1 设 M 是 w^*-代数, $M = (M_*)^*$. 依命题 4.2.3,

有M^{**}的中心投影z，使得

$$M^* = M_* \dotplus R_{(1-z)}M^*, \quad M_* = R_z M^*,$$

M_*的元是M上$\sigma(M, M_*)$连续泛函，我们也称它为M上的正规泛函. 另一方面，我们称$R_{(1-z)}M^*$中的元为M上的奇异泛函.

于是，对任意的$F \in M^*$，有唯一的分解

$$F = F_n + F_s, \quad F_n = R_z F \in M_*, \quad F_s = R_{(1-z)}F,$$

F_n，F_s分别是M上的正规泛函、奇异泛函. 容易证明$\|F\| = \|F_n\| + \|F_s\|$.

定理 4.4.2 设F是w^*-代数M上的正泛函. 则F是奇异的，当且仅当，对M的每个非零投影p，有M的非零投影$q \leqslant p$，使得$F(q) = 0$.

证. 依命题 2.3.2，$F \in M^*$. 设$F = F_n + F_s$意义如上.

充分性. 如果$F_n \neq 0$，则F_n是M上非零正规正泛函，于是其支持$s(F_n) = p$是M的非零投影. 依假定有M的非零投影q，使得$q \leqslant p$，$F(q) = 0$. 但依定义 1.8.9，$F_n(q) > 0$. 当然$F_s(q) \geqslant 0$，这就发生矛盾，所以，$F_n = 0$，F是奇异的.

今设$F_n = 0$，$F = F_s$及p是M的非零投影，无妨假定$F(p) > 0$. 当然存在M上的正规正泛函f，使得$f(p) > F(p)$. 令

$$\mathscr{L} = \{q \mid q \text{ 是 } M \text{ 的投影}, \ q \leqslant p, \ f(q) \leqslant F(q)\}.$$

依投影的包含关系，$\mathscr{L}$是非空偏序集，如果$\{q_l\}$是$\mathscr{L}$的全序子集，$q = \sup_l q_l$，则由于f是正规的，

$$F(q) \geqslant \sup_l F(q_l) \geqslant \sup_l f(q_l) = f(q),$$

所以，$q \in \mathscr{L}$. 依 Zorn 辅理，$\mathscr{L}$至少有一个极大元p_0. 但$p \notin \mathscr{L}$，因此，$q_0 = p - p_0 \neq 0$. 依p_0的极大性质，对M的任意非零投影q，并且$q \leqslant q_0$，则

$$F(q) < f(q).$$

进而，$F(q_0 X q_0) \leqslant f(q_0 X q_0)$，$\forall x \in M_+$. 依命题 1.6.4，$F(q_0 X q_0) \leqslant f(q_0 X q_0)$，$\forall X \in M_+^{**}$. 特别，

$$F(q_0(1-z)) \leqslant f(q_0(1-z)),$$

但 $f \in M_* = R_z M^*$，因此，$f(q_0(1-z)) = 0$，$F(q_0(1-z)) = 0$. 又 F 是奇异的，所以，$F(q_0) = F(q_0(1-z)) = 0$，即 q_0 满足要求. 证毕.

系 4.4.3 如果 F 是 M 的奇异泛函，p 是 M 的投影，则存在 M 的相互直交的投影族 $\{p_l\}$，使得 $p = \sum\limits_l p_l$，$F(p_l) = 0$，$\forall l$.

定义 4.4.4 设 $f \in M^*$，f 称为全可加的，指对于 M 的任意相互直交的投影族 $\{p_l\}$，有 $f(p) = \sum\limits_l f(p_l)$，这里 $p = \sum\limits_l p_l$.

定理 4.4.5 设 $f \in M^*$，则 $f \in M_*$，当且仅当，f 是全可加的.

证. 必要性是显然的. 今设 f 是全可加的，$f = f_n + f_s$，我们要证明 $f_s = 0$. 依定理 2.3.23，可写 $f = f^{(1)} - f^{(2)} + if^{(3)} - if^{(4)}$，这里 $f^{(j)}$ 是 M 上的正泛函，于是 $f_s = f_s^{(1)} - f_s^{(2)} + if_s^{(3)} - if_s^{(4)}$，其中 $f_s^{(j)}$ 是 M 上的奇异正泛函. 记 $g_s = \sum\limits_{j=1}^{4} f_s^{(j)}$，它也是 M 上的奇异正泛函. 设 p 是 M 的任意投影，依系 4.4.3，有 M 的相互直交的投影族 $\{p_l\}$，使得 $p = \sum\limits_l p_l$，$g_s(p_l) = 0$，$\forall l$. 于是，$f_s(p_l) = 0$，$\forall l$. 但 f 是全可加的及 $f_n \in M_*$，从而

$$f_s(p) = f(p) - f_n(p) = \sum_l [f(p_l) - f_n(p_l)]$$

$$= \sum_l f_s(p_l) = 0.$$

p 是任意的，所以，$f_s = 0$. 证毕.

注. 本定理是命题 1.8.5 的推广.

现在设 Λ 是任意的集合，$\nu(\cdot)$ 是定义在 Λ 所有子集上的有界、可加复值函数，即

$$\nu(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = \nu(\Lambda_1) + \nu(\Lambda_2),$$

$\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \subset \Lambda$，并且 $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \phi$，以及 $\sup\limits_{J \subset \Lambda} |\nu(J)| < \infty$. 记全体这样的 ν 为 $BV(\Lambda)$，显然是线性空间.

1）设 $\nu\in {}^FV(\Lambda)$，对任意的 $J\subset\Lambda$，定义

$$v(\nu)(J)=\sup\left\{\sum_i|\nu(J_i)|\,|J_i\subset J,\ J_i\cap J_j=\phi,\ \forall i\neq j\right\},$$

则 $v(\nu)\in BV(\Lambda)$.

事实上，设 $J_1,\cdots,J_n\subset J$，且 $J_i\cap J_j=\phi$，$\forall i\neq j$，写 $\{1,\cdots,n\}=\mathrm{I}_1\cup\mathrm{I}_2=\mathrm{I}_3\cup\mathrm{I}_4$，这里 $\mathrm{I}_1\cap\mathrm{I}_2=\phi$，$\mathrm{I}_3\cap\mathrm{I}_4=\phi$，使得 i 属于 $\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2,\mathrm{I}_3,\mathrm{I}_4$ 时，分别有 $\mathrm{Re}\,\nu(J_i)\geqslant0$，$\mathrm{Re}\,\nu(J_i)<0$，$\mathrm{Im}\,\nu(J_i)\geqslant0$，$\mathrm{Im}\,\nu(J_i)<0$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n|\nu(J_i)|&\leqslant\sum_{i\in\mathrm{I}_1}\mathrm{Re}\,\nu(J_i)-\sum_{i\in\mathrm{I}_2}\mathrm{Re}\,\nu(J_i)\\&\quad+\sum_{i\in\mathrm{I}_3}\mathrm{Im}\,\nu(J_i)-\sum_{i\in\mathrm{I}_4}\mathrm{Im}\,\nu(J_i)\\&=\mathrm{Re}\,\nu\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}_1}J_i\right)-\mathrm{Re}\,\nu\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}_2}J_i\right)+\mathrm{Im}\,\nu\\&\quad\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}_3}J_i\right)-\mathrm{Im}\,\nu\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}_4}J_i\right)\\&\leqslant4\sup_{J'\subset\Lambda}|\nu(J')|<\infty.\end{aligned}$$

余皆显然。

2）对任意的 $\nu\in BV(\Lambda)$，定义 $\|\nu\|=v(\nu)(\Lambda)$，则 $BV(\Lambda)$ 是 Banach 空间。

易证，从略。

3）记 Λ 上有界复值函数全体为 $l^\infty(\Lambda)$，赋以极大模的范数，则 $l^\infty(\Lambda)^*=BV(\Lambda)$.

首先，如果 $f\in l^\infty(\Lambda)$ 是简单的，指可写 $\Lambda=\bigcup_{i=1}^n\Lambda_i$，$\Lambda_i\cap\Lambda_j=\phi$，$\forall i\neq j$，并且有复数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $f(l)=\lambda_i$，$\forall l\in\Lambda_i$，$1\leqslant i\leqslant n$. 这时对 $\nu\in BV(\Lambda)$，定义

$$\nu(f)=\int_\Lambda f(l)d\nu(l)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\nu(\Lambda_i).$$

显然，$|\nu(f)|\leqslant\|\nu\|\cdot\|f\|$.

对任意的 $f\in l^\infty(\Lambda)$，显然有简单的 $f_n\in l^\infty(\Lambda)$，使得 $\|f_n-f\|\to 0$。由于 $|\nu(f_n-f_m)|\leqslant\|\nu\|\cdot\|f_n-f_m\|\to 0$，可以定义 $\nu(f)=\int_\Lambda f(l)d\nu(l)=\lim\limits_n\nu(f_n)$，易见这个定义将不依赖 $\{f_n\}$ 的选择，且有 $|\nu(f)|\leqslant\|\nu\|\cdot\|f\|$。也容易证明

$$\|\nu\|=\sup\{|\nu(f)|\,|\,f\in l^\infty(\Lambda),\ \|f\|\leqslant 1\}.$$

因此，$BV(\Lambda)$ 等距地嵌入 $l^\infty(\Lambda)^*$ 之中。

反之，如果 $F\in l^\infty(\Lambda)^*$，令 $\nu(J)=F(\chi_J)$，$\forall J\subset\Lambda$，易见 $\nu\in BV(\Lambda)$，并且 $\nu(f)=F(f)$，$\forall f\in l^\infty(\Lambda)$。

4) 设 $\nu\in BV(\Lambda)$，则显然有

$$\sum_{l\in\Lambda}|\nu(\{l\})|\leqslant\|\nu\|.$$

5) 设 $\{\nu_n\}\subset BV(\Lambda)$，并且 $\sup\limits_n\|\nu_n\|<\infty$，及

$$\lim_n\nu_n(J)=0,\ \forall J\subset\Lambda,$$

则 $\lim\limits_n\sum\limits_{l\in\Lambda}|\nu_n(\{l\})|=0$。

设不然，有 $\varepsilon>0$，使得(必要时代以子列)

$$\sum_{l\in\Lambda}|\nu_n(\{l\})|\geqslant\varepsilon,\ \forall n, \tag{1}$$

对 $n=1$，有 Λ 的有限子集 F_1，使得

$$\sum_{l\in F_1}|\nu_1(\{l\})|>\sum_{l\in\Lambda}|\nu(\{l\})|-\frac{\varepsilon}{10},$$

由于 $\nu_n(\{l\})\to 0$，$\forall l$，于是有 n_2，使得 $\sum\limits_{l\in F_1}|\nu_{n_2}(\{l\})|<\dfrac{\varepsilon}{20}$。从而可找到有限子集 $F_2\subset\Lambda\backslash F_1$，使得

$$\sum_{l\in F_2}|\nu_{n_2}(\{l\})|>\sum_{l\in\Lambda}|\nu_{n_2}(\{l\})|-\frac{\varepsilon}{10}$$

…，一般可找到 Λ 的互不相交的有限子集列 $\{F_k\}$，及 $\{n_k\}$，使得

$$\sum_{l\in F_k}|\nu_{n_k}(\{l\})|>\sum_{l\in\Lambda}|\nu_{n_k}(\{l\})|-\frac{\varepsilon}{10},\ \forall k.$$

取定 m，使得 $m>\dfrac{10}{\varepsilon}\sup\limits_n\|\nu_n\|$。

令 $E_1 = F_1$，$\mu_1 = \nu_{n_1}$，如果对于 $p = 1, \cdots, m$，都有

$$\nu(\mu_1)\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_{mj+p}\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{10},$$

则

$$\begin{aligned}\|\mu_1\| &\geqslant \nu(\mu_1)\left(\bigcup_{p=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{\infty} F_{mj+p}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{m} \nu(\mu_1)\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_{mj+p}\right) \geqslant m \cdot \frac{\varepsilon}{10} \\ &> \sup_n \|\nu_n\| \geqslant \|\mu_1\|,\end{aligned}$$

产生矛盾．因此，必有 p_1，$1 \leqslant p_1 \leqslant k$，使得

$$\nu(\mu_1)\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_{mj+p_1}\right) < \frac{\varepsilon}{10}.$$

令 $E_2 = F_{m+p_1}$，$\mu_2 = \nu_{n_{m+p_1}}$．记 $F'_j = F_{mj+p_1}$，则 $\{F'_j\}$ 仍然是 A 的互不相交的有限子集列，于是同样可证明，存在 p_2，$1 \leqslant p_2 \leqslant m$，使得

$$\nu(\mu_2)\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F'_{mj+p_2}\right) = \nu(\mu_2)\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_{m(mj+p_2)+p_1}\right) < \frac{\varepsilon}{10}$$

$\cdots$，一般存在 $\{p_s | s = 1, 2, \cdots\}$，使得对每个 s．有 $1 \leqslant p_s \leqslant m$ 及(注意 (1))

$$\sum_{l \in E_s} |\mu_s(\{l\})| > \sum_{l \in A} |\mu_s(\{l\})| - \frac{\varepsilon}{10},$$

$$\nu(\mu_s)\left(\bigcup_{j > s} E_j\right) < \frac{\varepsilon}{10}, \tag{2}$$

其中 $\mu_s = \nu_{n_{b_s}}$，$E_s = F_{b_s}$，而 $b_1 = 1$，$b_2 = mb_1 + p_1, \cdots, b_s = mb_{s-1} + p_s, \cdots$．

今定义 $f \in l^\infty(A)$ 如下：

$$f(l) = \begin{cases} 0 & ，如 l \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j; \\ \arg \overline{\mu_j(\{l\})}, & 如 l \in E_j, \forall j. \end{cases}$$

于是由诸 E_j 的有限性及 (2)，对任意的 s，

$$\left|\mu_s(f)-\sum_{l\in E_s}|\mu_s(\{l\})|\right|$$
$$\leqslant\left|\sum_{j<s}\int_{E_j}fd\mu_s\right|+\left|\int_{E_s}fd\mu_s-\sum_{l\in E_s}|\mu_s(\{l\})|\right|$$
$$+\left|\int_{\bigcup\limits_{j>s}E_j}fd\mu_s\right|\leqslant\sum_{j<s}\sum_{l\in E_j}|\mu_s(\{l\})|$$
$$+v(\mu_s)\Big(\bigcup_{j>s}E_j\Big)<\frac{\varepsilon}{5}.$$

因此，由 (2)，(1)，对任意的 s，

$$|\mu_s(f)|\geqslant\sum_{l\in E_s}|\mu_s(\{l\})|-\frac{\varepsilon}{5}$$
$$>\sum_{l\in A}|\mu_s(\{l\})|-\frac{3}{10}\varepsilon\geqslant\frac{7}{10}\varepsilon;$$

另一方面，由于 $\sup\limits_n\|\nu_n\|<\infty$，$\nu_n(J)\to 0$，$\forall J\subset A$，应当有

$$\nu_n(f)\to 0,$$

从而 $\mu_s(f)\to 0$。这便发生矛盾．所以，

$$\lim_n\sum_{l\in A}|\nu_n(\{l\})|=0.$$

命题 4.4.6 设 M 是 w^*-代数，列 $\{f_k\}\subset M^*$，且依 $\sigma(M^*, M)$，$f_k\to f(\in M^*)$，则依 $\sigma(M^*, M)$，$f_k^n\to f^n$，$f_k^s\to f^s$，这里 $f_k^{n,s}$，$f^{n,s}$ 分别是 f_k，f 的正规部份与奇异部份．

注．依定理 2.3.23，对任意的 $g\in M^*$，可唯一地写 $g=g_1-g_2+ig_3-ig_4$，其中 g_j 是 M 上的正泛函，$\forall j$．记 $[g]=g_1+g_2+g_3+g_4$。

证．无妨设 $f=0$，只须证 $f_k^s\xrightarrow{\sigma(M^*,M)}0$．由于 $\sup\limits_k\|f_k^s\|<\infty$，因此，只须对 M 的任意投影 p，证明 $f_k^s(p)\to 0$。

记 $g=\sum\limits_k\frac{1}{2^k}[f_k^s]$，它是 M 上的奇异正泛函．依系 4.4.3，有 M 的相互直交的投影族 $\{p_l|l\in A\}$，使得 $p=\sum\limits_{l\in A}p_l$，$g(p_l)=0$，$\forall l\in A$。因此，$f_k^s(p_l)=0$，$\forall k$，$l$。

定义 $\nu_k \in BV(\Lambda)$ 如下

$$\nu_k(J) = f_k\left(\sum_{l \in J} p_l\right), \ \forall J \subset \Lambda$$

由于 $\sup_k \|f_k\| < \infty$，从而，$\sup\{|\nu_k(J)| \,\big|\, k, \ J \subset \Lambda\} < \infty$. 又显然 $\lim_k \nu_k(J) = 0, \forall J \subset \Lambda$. 于是依关于 $BV(\Lambda)$ 的讨论 5) 及 $f_k^s(p_l) = 0, \forall k, l$,

$$\begin{aligned}\lim_k \sum_{l \in \Lambda} |f_k^n(p_l)| &= \lim_k \sum_{l \in \Lambda} |f_k(p_l)| \\ &= \lim_k \sum_{l \in \Lambda} |\nu_k(\{l\})| = 0.\end{aligned}$$

进而，由 $f_k^n \in M_*, \forall k$，$\lim_k f_k^n(p) = \lim_k \sum_{l \in \Lambda} f_k^n(p_l) = 0$. 证毕.

定理 4.4.7 设 M 是 w^*-代数，$M = (M_*)^*$，则 M_* 是弱列备的.

证. 设 $\{f_k\}$ 是 M_* 的依弱拓扑 $\sigma(M_*, M)$ 的 Cauchy 列，自然，$\sup_k \|f_k\| < \infty$，于是有 $f \in M^*$，使得 $f_k \xrightarrow{\sigma(M^*, M)} f$. 依命题 4.4.6，按 $\sigma(M^*, M)$，

$$f_k^n \to f^n, \ f_k^s \to f^s,$$

但 $f_k^n = f_k$，$f_k^s = 0, \forall k$，所以，$f = f^n \in M_*$. 证毕.

注 本节见参考文献 [1]，[2]，[114].

§5. M_*的弱紧子集的特征

引理 1.11.5 实际上给出了 M_* 的弱紧子集的特征. 进一步我们有

定理 4.5.1 设 M 是 w^* 代数，$M = (M_*)^*$，$A \subset M_*$，则下列条件是相互等价的:

1) A 的 $\sigma(M_*, M)$ 闭包是 $\sigma(M_*, M)$ 紧的;

2) 存在 M 上的正规正泛函 ϕ，使得对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$，只要 $a \in M$，$\|a\| \leqslant 1$，并且 $\phi(a^*a + aa^*) < \delta$,

就有$|\varphi(a)|<\varepsilon$, $\forall\varphi\in\mathcal{A}$;

3) $\mathcal{A}$是有界集，并且对于任何的列$\{a_n\}\subset M$, $a_n\xrightarrow{s^*(M,M_*)}0$，对$\varphi\in\mathcal{A}$一致地有$\varphi(a_n)\to 0$;

4) $\mathcal{A}$是有界集，并且对于M的任何递减于0的投影列$\{p_n\}$，对$\varphi\in\mathcal{A}$一致地有$\varphi(p_n)\to 0$;

5) $\mathcal{A}$是有界集，并且对于M的任何相互直交的投影列$\{p_n\}$，对$\varphi\in\mathcal{A}$一致地有$\varphi(p_n)\to 0$;

6) 对于M的任何极大交换的w^*-子代数N, $\{(\varphi|N)\mid\varphi\in\mathcal{A}\}$[1]的$\sigma(N_*,N)$闭包是$\sigma(N_*,N)$紧的;

7) $\mathcal{A}$是有界集，并且对于M的任何投影递增网$\{p_l\}$，对$\varphi\in\mathcal{A}$一致地有$\varphi(p_l)\to\varphi(p)$，这里$p=\sup\limits_l p_l$;

8) $\mathcal{A}$是有界集，并且对于M的任何递增于1的投影网$\{p_l\}$，对$\varphi\in\mathcal{A}$一致地有

$$\|L_{(1-p_l)}R_{(1-p_l)}\varphi\|\to 0.$$

证. 1) 推导2): 即为引理1.11.5.

2) 推导3): 取条件2)的ϕ及$\varepsilon=1$，对任意的$a\in M$，取充分大的正整数m，使得

$$\phi(b^*b+bb^*)<\delta=\delta(1),$$

这里$b=\frac{a}{m}$，并且$\|b\|\leqslant 1$. 于是依2)

$$\sup\{|\varphi(a)|\mid\varphi\in\mathcal{A}\}\leqslant m,$$

依一致有界定理，$\mathcal{A}$是有界集. 今设M的列$a_n\xrightarrow{s^*(M,M_*)}0$. 自然$\sup\limits_n\|a_n\|<\infty$，于是有正整数$m$ 使得$\|a_n\|\leqslant m$ $\forall n$ 对任意的$\varepsilon>0$，由于$(a_n^*a_n+a_na_n^*)\xrightarrow{\sigma(M,M_*)}0$，所以有$n_0$，使得

$$\frac{1}{m^2}\varphi(a_n^*a_n+a_na_n^*)<\delta=\delta(\varepsilon),\ \forall n\geqslant n_0.$$

依2)，$|\varphi(a_n)|\leqslant m\varepsilon$, $\forall\varphi\in\mathcal{A}$, $n\geqslant n_0$，即说明对$\varphi\in\mathcal{A}$一致地

---

1) 这里$(\varphi|N)$表示泛函φ在N上的限制.

有 $\varphi(a_n)\to 0$。

3) 推导 4)：显然。

4) 推导 5)：设 $\{p_n\}$ 是 M 的相互直交投影列，则

$$\left\{q_n=\sum_{k\geqslant n}p_k\right\}$$

是 M 的递减于 0 的投影列．依 4)，对 $\varphi\in A$ 一致地有 $\varphi(q_n)\to 0$．于是，$\varphi(p_n)=(\varphi(q_n)-\varphi(q_{n+1}))$ 也对 $\varphi\in A$ 一致地 $\longrightarrow 0$。

5) 推导 1)：将 A 嵌入 M^* 之中，并令 $\bar{A}$ 是 A 在 M^* 中的 $\sigma(M^*, M)$ 闭包．由于 A 是有界的，因此 $\bar{A}$ 是 $\sigma(M^*, M)$ 紧的。今只须证明 $\bar{A}\subset M_*$。依定理 4.4.5，要对任意的 $f\in\bar{A}$，证明 f 是全可加的．设 $\{p_l|l\in\Lambda\}$ 是 M 的相互直交投影族，又归结为要证明对 $\varphi\in A$ 一致地有

$$\sum_{l\in F}\varphi(p_l)\to\varphi(p),$$

这里 F 是 Λ 的有限子集，依包含关系成为定向指标集，

$$p=\sum_{l\in\Lambda}p_l.$$

事实上，设网 $\{\varphi_\iota\}\subset A$，并且 $\varphi_\iota\xrightarrow{\sigma(M^*, M)}f$．对任意的 $\varepsilon>0$，于是有 Λ 的有限子集 F_0，只要 $F\supset F_0$，对任何 ι 都有

$$\left|\sum_{l\in F}\varphi_\iota(p_l)-\varphi_\iota(p_l)\right|<\varepsilon,$$

对 ι 取极限，即见 $\left|\sum_{l\in F}f(p_l)-f(p)\right|<\varepsilon$，$\forall F\supset F_0$，因此，$f$ 是全可加的。

今设有 $\varepsilon>0$，使得对 Λ 的任何有限子集 F，有 $\varphi_F\in A$，而

$$\left|\sum_{l\in F}\varphi_F(p_l)\right|>\varepsilon.$$

于是可以找到 Λ 的互不相交的有限子集列 $\{F_n\}$，及 $\{\varphi_n\}\subset A$，使得 $\left|\sum_{l\in F_n}\varphi_n(p_l)\right|\geqslant\varepsilon$，$\forall n$．但 $\left\{q_n=\sum_{l\in F_n}p_l\,\middle|\,n\right\}$ 是 M 的相互直交投影列，依 5)，对 $\varphi\in A$ 一致地有 $\varphi(q_n)\to 0$．这便产生矛盾。

因此，对 $\varphi\in A$ 一致地有 $\sum_{l\in F}\varphi(p_l)\to\varphi(p)$。

6) 推导 5)：设 $\{p_n\}$ 是 M 的相互直交的投影列，令 N 是包含 $\{p_n\}$ 的 M 的极大交换 w^*-子代数，于是依 6)，

$$A_N=\{(\varphi|N)|\varphi\in A\}$$

的 $\sigma(N_*,N)$ 闭包是 $\sigma(N_*,N)$ 紧的. 由于 1) 可推导 5)，所以，对 $\varphi\in A$ 一致地有 $\varphi(p_n)=(\varphi|N)(p_n)\to 0$。

同样可证 $\sup\{|\varphi(h)|\,|\,\varphi\in A\}<\infty$，$\forall h^*=h\in A$，因此，$A$ 是有界集。

1) 推导 6)：设 $\bar{A}$ 是 A 的 $\sigma(M_*,M)$ 闭包，于是 $\bar{A}$ 是 $\sigma(M_*,M)$ 紧的. 如果 N 是 M 的极大交换 w^*-子代数，自然

$$\bar{A}_N=\{(\varphi|N)\,|\,\varphi\in\bar{A}\}$$

是 N_* 的 $\sigma(N_*,N)$ 紧子集，又 $\bar{A}_N\supset\{(\varphi|N)\,|\,\varphi\in A\}$，因此，6) 成立。

2) 推导 7)：设 $\{p_l\}$ 是 M 的投影递增网，$p=\sup\limits_l p_l$. 取条件 2) 的 ϕ，对任意的 $\varepsilon>0$，由于

$$\begin{aligned}&\phi((p-p_l)^*(p-p_l)+(p-p_l)(p-p_l)^*)\\ &=2\phi(p-p_l)\to 0,\end{aligned}$$

所以，l 充分大时，$\phi(p-p_l)<\delta=\delta(\varepsilon)$. 于是依 2)，对 $\varphi\in A$ 一致地有 $|\varphi(p-p_l)|<\varepsilon$，即 $\varphi(p_l)\to\varphi(p)$ 对 $\varphi\in A$ 是一致的. 此外，在 2) 推导 3) 中已指出 A 是有界集。

7) 推导 4)：设 $\{p_n\}$ 是 M 的递减于 0 的投影列，于是 $\{1-p_n\}$ 是递增于 1 的投影列，依 7)，对 $\varphi\in A$ 一致地有 $\varphi(1-p_n)\to\varphi(1)$，即对 $\varphi\in A$ 一致地有 $\varphi(p_n)\to 0$。

8) 推导 7)：只须注意：如果 $\{p_l\}$ 是 M 的投影递增网，则 $\{p_l+(1-p)\}$ 是 M 的递增于 1 的投影网，这里 $p=\sup\limits_l p_l$。

2) 推导 8)：设 $\{p_l\}$ 是 M 的投影递增网，并且 $\sup p_l=1$，ϕ 如 2) 所述. 对任意的 $\varepsilon>0$，有 $l(\varepsilon)$，使得 $\phi(1-p_l)<\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$，

$\forall l \geqslant l(\varepsilon)$. 于是对任意的 $a \in M$, $\|a\| \leqslant 1$, 及 $l \geqslant l(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}\phi((1-p_l)a^*(1-p_l)a(1-p_l)\\ +(1-p_l)a(1-p_l)a^*(1-p_l))\\ \leqslant 2\phi(1-p_l)<\delta(\varepsilon),\end{aligned}$$

依 2), $|\varphi((1-p_l)a(1-p_l))|<\varepsilon$, $\forall\varphi \in A$, $l \geqslant l(\varepsilon)$, $\|a\| \leqslant 1$. 即对 $\varphi \in A$ 一致地有

$$\|L_{(1-p_l)}R_{(1-p_l)}\varphi\| \to 0,$$

证毕.

命题 4.5.2 设 A 是 M 上正规正泛函组成的集合, 并且其 $\sigma(M_*, M)$ 闭包是 $\sigma(M_*, M)$ 紧的, 则

$$E=\{R_a\varphi \mid a \in M,\ \|a\| \leqslant 1,\ \varphi \in A\}$$

的 $\sigma(M_*, M)$ 闭包也是 $\sigma(M_*, M)$ 紧的.

证. 显然 E 是有界的. 若 $\{p_n\}$ 是 M 的递减于 0 的投影列, 依定理 4.5.1, 对 $\varphi \in A$ 一致地有 $\varphi(p_n) \to 0$. 由 Schwartz 不等式

$$|R_a\varphi(p_n)| \leqslant \varphi(a^*a)^{1/2}\varphi(p_n)^{1/2} \leqslant \|\varphi\|^{1/2}\varphi(p_n)^{1/2}$$

可见对 $\rho \in E$ 也一致地有 $\rho(p_n) \to 0$. 再依定理 4.5.1 即得证.

注 本节见参考文献 [1], [43], [93], [113], [128].

第五章　交换的算子代数

我们已经知道，交换 c^*-代数同构于 $C(\Omega)$，这里 Ω 是它的谱空间．本章主要研究交换 w^*-代数及有关的测度理论．

§1 是局部紧空间上的测度与积分理论，这可以加强本书的自足性；另一方面，处理的方法与传统的 N. Bourbaki 的方法略为不同，而是沿袭 P. Halmos "测度论"一书的框架，特别测度不作完全化．§2 研究 Stonean 空间与超 Stonean 空间，这概念为 M. Stone 所引入，而本节则依据 J. Dixmier 的处理．§3 指出，若 Ω 是紧 Hausdorff 空间，则 $C(\Omega)$ 是 w^*-代数，当且仅当，Ω 是超 Stonean 空间（5.3.3 与 5.3.4）．此外，交换 w^*-代数必同构于 $L^\infty(\Gamma, \nu)$，这里 Γ 是局部紧空间，ν 是 Γ 上的测度（5.3.4）．本节也研究了可分 Hilbert 空间中的交换 vN 代数，指出它可以由一个元生成（5.3.7），相互不同构的仅可数个（5.3.9，这结果属于 P. R. Halmos 与 J. von Neumann)；以及极大交换的充要条件是具有循环矢（5.3.16）．§4讨论交换 c^*-代数在可分 Hilbert 空间中的 $*$ 表示，指出它可以为谱空间上唯一的测度列所决定（5.4.11）．本节系依据 Kirillov 的处理，也可以运用（I）型 vN 代数的理论来处理(例见 [5])，两者的结果是相同的．

§1. 局部紧空间上的测度理论

设 Ω 是局部紧 Hausdorff 空间，S 是 Ω 的 Borel 子集全体(由 Ω 的紧子集全体生成的 σ-Bool 环)．命

$$S_{loc} = \{E \subset \Omega \mid E \cap K \in S,\ \forall K \text{ 是 } \Omega \text{ 的紧子集}\},$$

S_{loc} 是 σ-Bool 代数，S_{loc} 中的子集称为局部 Borel 子集．显然，$E \in S_{loc}$，当且仅当，$E \cap F \in S$，$\forall F \in S$．

以下简称，Ω 上的复值函数 f 是可测的，指 f 是 S-可测的；f 是局部可测的，指 f 是 S_{loc} 可测的. 显然，可测函数必是局部可测的；反之，局部可测函数 f 是可测的，当且仅当，$\{t\in\Omega|f(t)\neq 0\}\in S$.

设 ν 是 Ω 上的正则 Borel 测度，$F(\subset\Omega)$ 称为 ν-零的，指 $F\in S$，且 $\nu(F)=0$；$E(\subset\Omega)$ 称为局部 ν-零的，指 $E\in S_{loc}$，且 $\nu(E\cap K)=0$，$\forall K$ 是 Ω 的紧子集. Ω 上的命题 $P(t)$ 称为关于 ν 殆遍成立 ($p.p.\nu$)，指 $\{t\in\Omega|P(t)$ 不成立$\}$是某 ν-零集的子集；$P(t)$ 称为关于 ν 局部殆遍成立 ($l.p.p.\nu$)，指 $\{t\in\Omega|P(t)$ 不成立$\}$ 是某局部 ν-零集的子集.

设 ν 是 Ω 上的正则 Borel 测度，令

$$V_0=\bigcup\{V\subset\Omega|V\text{ 是局部 }\nu\text{-零的开集}\}$$

易证 V_0 是最大的局部 ν-零的开集. 记

$$\operatorname{supp}\nu=\Omega\backslash V_0$$

称为 ν 的支集. 它显然有这样的性质：如果 $U(\subset\Omega)$ 是 Borel 开集，则 $\nu(U)=0$，当且仅当，$U\cap\operatorname{supp}\nu=\phi$.

引理 5.1.1 设 ν 是 Ω 上非零的正则 Borel 测度，则存在 Ω 的非空紧子集 K，使得对于 Ω 的任何开子集 U，只要 $K\cap U\neq\emptyset$，就有 $\nu(K\cap U)>0$.

证. 由于 $\operatorname{supp}\nu$ 是 Ω 的非空闭子集，我们能够取开集 V，使得 $\bar{V}$ 紧，并且 $K=\overline{V\cap\operatorname{supp}\nu}\neq\emptyset$. 我们说这 K 即满足要求. 事实上，如果有开集 U，$K\cap U\neq\emptyset$，但 $\nu(K\cap U)=0$. 依 K 的定义，有 $\nu(U\cap V\cap\operatorname{supp}\nu)=0$. 于是，

$$\nu(U\cap V)=\nu((U\cap V)\backslash\operatorname{supp}\nu),$$

但 $(U\cap V)\backslash\operatorname{supp}\nu$ 是与 $\operatorname{supp}\nu$ 无交的 Borel 开集，因此，

$$\nu(U\cap V)=\nu((U\cap V)\backslash\operatorname{supp}\nu)=0.$$

进而，$U\cap V\cap\operatorname{supp}\nu=\emptyset$. 取 $t\in U\cap K$，U 是 t 的开邻域，

$$t\in K=\overline{V\cap\operatorname{supp}\nu},$$

于是，$U\cap V\cap\operatorname{supp}\nu\neq\emptyset$. 矛盾. 所以，$K$ 满足要求. 证毕.

命题 5.1.2 设 ν 是 Ω 上非零的正则 Borel 测度，则存在 Ω 的

非空、相互无交的紧子集族 $\{K_l\}_{l\in\Lambda}$，使得 $N=\Omega\setminus\bigcup_{l\in\Lambda}K_l$ 是局部 ν-零集，并且对 Ω 的任意紧子集 K，$\{l\in\Lambda|K_l\cap K\neq\varnothing\}$ 是可数的（这个性质称为族 $\{K_l\}_{l\in\Lambda}$ 的局部可数的性质）。

证．依引理 5.1.1 及 Zorn 辅理，存在 Ω 的非空、相互无交的紧子集的极大族 $\{K_l\}_{l\in\Lambda}$，使得对于任意的 $l\in\Lambda$ 及 Ω 的开子集 U，只要 $K_l\cap U\neq\varnothing$，就有 $\nu(K_l\cap U)>0$。

如果 V 是任意开子集，并且 $\bar{V}$ 紧，于是

$$\sum_{l\in\Lambda}\nu(K_l\cap V)\leqslant\nu(V)<\infty.$$

因此，$\{l\in\Lambda|\nu(K_l\cap V)>0\}$ 至多可数．又若 $l\in\Lambda$ 使得

$$\nu(K_l\cap V)=0,$$

依 K_l 的性质，$K_l\cap V=\varnothing$，因此，$\{l\in\Lambda|K_l\cap V\neq\varnothing\}$ 是可数的．这即说明族 $\{K_l\}_{l\in\Lambda}$ 是局部可数的．特别地，$\bigcup_{l\in\Lambda}K_l\in S_{loc}$ 及 $N=\Omega\setminus\bigcup_{l\in\Lambda}K_l\in S_{loc}$.

尚须证明 N 是局部 ν-零的．若有紧子集 $H\subset N$，而 $\nu(H)>0$．对于 H 及 $\nu|H$ 使用引理 5.1.1，有 H 的非空紧子集 K（亦必是 Ω 的紧子集），使得对于 H 的任意开子集 U_H，只要 $U_H\cap K\neq\varnothing$，就有

$$\nu(U_H\cap K)>0,$$

因此也对于 Ω 的任意开子集 U，只要 $U\cap K\neq\varnothing$，就有

$$\nu(U\cap K)>0.$$

自然 $K\cap K_l=\varnothing$，$\forall l$，这便与族 $\{K_l\}$ 的极大性相矛盾．因此，N 是局部 ν-零的．证毕．

设 f 是 Ω 上局部可测函数，ν 是 Ω 上正则 Borel 测度，f 称为关于 ν 是局部本质有界的，指存在常数 C，使得

$$|f(t)|\leqslant C,\ l.p.p.\nu.$$

这样 C 的最小者称为 f 的局部本质上界．记

$$L^\infty(\Omega,\nu)=\{f|f\text{ 是 }\Omega\text{ 上局部可测函数},$$

且关于 ν 局部本质有界}

以局部本质上界为范数，显然 $L^\infty(\Omega, \nu)$ 将是交换 c^*-代数. 下面的定理说明 $L^\infty(\Omega, \nu)$ 还是 w^*-代数.

定理 5.1.3 $(L^1(\Omega, \nu))^* = L^\infty(\Omega, \nu)$.

证. 首先，如果 $f \in L^\infty(\Omega, \nu)$，显然可决定 $F_f \in (L^1(\Omega, \nu))^*$: $F_f(g) = \int_\Omega f(t)g(t)d\nu(t)$, $\forall g \in L^1(\Omega, \nu)$，且 $\|F_f\| = \|f\|$.

今设 $F \in (L^1(\Omega, \nu))^*$，对 Ω 的任意紧子集 K，可把 $L^1(K, \nu|K)$ 看为 $L^1(\Omega, \nu)$ 的闭子空间，由于 $\nu(K) < \infty$，因此有唯一的 $f_K \in L^\infty(K, \nu|K)$[1]，使得

$$|f_K(t)| \leqslant \|F\|, \ \forall t \in K, \ F(g) = \int_K f_K(t)g(t)d\nu(t),$$
$$\forall g \in L^1(K, \nu|K),$$

于是可写 $f_K = F|L^1(K, \nu|K)$.

依命题 5.1.2，$\Omega = N \cup \bigcup_{l \in A} K_l$，于是对每个 l，

$$F|L^1(K_l, \nu|K_l) = f_l \in L^\infty(K_l, \nu|K_l).$$

如果命

$$f(t) = \sum_{l \in A} \chi_{K_l}(t) f_l(t),$$

则 $|f(t)| \leqslant \|F\|$, $\forall t \in \Omega$，及 $f \in L^\infty(\Omega, \nu)$. 对任意的 $g \in L^1(\Omega, \nu)$，由于 $\mathrm{supp}\, g = \{t \in \Omega | g(t) \neq 0\} \in S$，因此

$$J = \{l \in A | K_l \cap \mathrm{supp}\, g \neq \varnothing\}$$

是可数的. 记 $g_l = \chi_{K_l} g$，则 $g = \sum_{l \in J} g_l$. 再由 F 的连续性及控制收敛定理，即见 $F(g) = \int_\Omega f(t)g(t)d\nu(t)$. 所以，$(L^1(\Omega, \nu))^* = L^\infty(\Omega, \nu)$. 证毕.

设 ν 是 Ω 上的正则 Borel 测度，Ω 上的函数 f 称为非负局部 ν-可积的，指 f 是非负局部可测函数，并且对 Ω 的任意紧子集 K，$\chi_K f \in L^1(\Omega, \nu)$. 这时定义

$$\mu(E) = \int_E f d\nu = \int f \chi_E d\nu, \ \forall E \in S.$$

---

1) 例见 [120] Th. 7.4-A.

易见μ也是Ω上的正则 Borel 测度，将记以

$$\mu = f\cdot\nu.$$

可以证明，这时如果g是Ω上的可测函数，则 $g\in L^1(\Omega,\mu)$，当且仅当，$fg\in L^1(\Omega\nu)$. 同时

$$\int g d\mu = \int fg d\nu.$$

此外，μ关于ν是绝对连续的，即若 $E\in S$, $\nu(E)=0$, 则 $\mu(E)=0$.

定理 5.1.4 设μ,ν是Ω上的正则 Borel 测度，则下列相互等价：

1）有非负局部可积函数f，使得 $\mu=f\cdot\nu$;

2）如果N为局部ν-零集，则也是局部μ-零的；

3）如果K是紧子集，且 $\nu(K)=0$，则 $\mu(K)=0$，即μ关于ν是绝对连续的.

证. 2）与 3）的等价，及 1）推导 2）均为显然. 今只须证明 2）推导 1). 依命题 5.1.2，$\Omega=N\cup\bigcup\limits_l K_l$，其中$N$为局部$\nu$-零集，从而也是局部$\mu$-零的. 对每个$l$，由于$\nu(K_l)<\infty$, $\mu(K_l)<\infty$，依 Radon-Nikodym 定理，有 $0\leqslant f_l\in L^1(K_l,\nu|K_l)$，使得

$$\mu(E)=\int_E f_l d\nu,\ \forall E\in S,\ 且\ E\subset K_l.$$

令$f=\sum\limits_l \chi_{K_l}f_l$，由于 $\{K_l\}$ 局部可数，因此，f是非负局部可测的. 对任意的 $E\in S$，由于 $f|N=0$, $\mu(E\cap N)=0$，及 $J=\{l\,|\,K_l\cap E\neq\emptyset\}$ 可数，

$$\mu(E)=\sum_{l\in J}\mu(K_l\cap E)$$
$$=\sum_{l\in J}\int_{K_l\cap E} f d\nu=\int_E f d\nu$$

即 $\mu=f\cdot\nu$. 证毕.

如果μ关于ν是绝对连续的，记以 $\mu\prec\nu$.

如果同时有$\mu\prec\nu$，及$\nu\prec\mu$，称μ与ν是等价的，记以$\mu\sim$

ν. 这时 $p.p.\mu = p.p.\nu$, $l.p.p.\mu = l.p.p\nu$, 并且有非负局部 ν 可积函数 f, 与非负局部 μ-可积函数 g, 使得

$$\mu = f \cdot \nu, \quad \nu = g \cdot \mu.$$

易证 $f(t)g(t) = 1$, $l.p.p.\mu$ 或者 $l.p.p.\nu$.

Ω 上的正则 Borel 测度 μ, ν 称为相互奇异的,记以 $\mu \perp \nu$, 指存在 $A \in S_{loc}$, 使得 A 为局部 μ-零集,同时 $(\Omega \backslash A)$ 为局部 ν-零集.

定理 5.1.5 设 μ, ν 是 Ω 上的正则 Borel 测度,则可以唯一地写 $\mu = f \cdot \nu + \mu_1$, 其中 f 是非负局部 ν-可积函数, $\mu_1 \perp \nu$.

证. 依定理 5.1.4, 必有局部 $(\mu + \nu)$-可积函数 g, 使得 $\mu = g \cdot (\mu + \nu)$, 且 $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$, $\forall t \in \Omega$. 令

$$B = \{t \in \Omega | g(t) = 1\}, \quad A = \{t \in \Omega | 0 \leqslant g(t) < 1\},$$

$$\mu_1 = \mu | B, \quad \mu_0 = \mu | A.$$

显然 A 是局部 μ_1-零的. 又若紧集 $K \subset B$ 时,

$$\mu(K) = \int_K g d(\mu + \nu) = \mu(K) + \nu(K).$$

因此, $\nu(K) = 0$, 即 B 是局部 ν-零的. 因此, $\mu_1 \perp \nu$.

今设 K 是 ν-零的紧集,于是

$$\begin{aligned}\mu_0(K) &= \mu(K \cap A) \\ &= \int_{K \cap A} g d\mu + \int_{K \cap A} g d\nu = \int_{K \cap A} g d\mu\end{aligned}$$

即 $\int_{K \cap A} (1 - g) d\mu = 0$. 依 A 的定义, $\mu_0(K) = \mu(K \cap A) = 0$, 即 $\mu_0 \prec \nu$. 从而有非负局部 ν-可积函数 f, 使得 $\mu_0 = f \cdot \nu$, 由此, $\mu = f \cdot \nu + \mu_1$.

今设 $\mu = f_i \cdot \nu + \mu_i$, 其中 f_i 是非负局部 ν-可积的, $\mu_i \perp \nu$, 于是有 $A_i \in S_{loc}$, 使得 A_i 是局部 ν-零的, $\Omega \backslash A_i$ 是局部 μ_i-零的, $i = 1, 2$. 于是 $A_1 \cup A_2$ 是局部 ν-零的,而

$$\Omega \backslash (A_1 \cup A_2) = (\Omega \backslash A_1) \cap (\Omega \backslash A_2)$$

同时是局部 μ_1-与 μ_2-零的. 设紧集 $K \subset A_1 \cup A_2$, 则 $\nu(K) = 0$, 因此 $\mu(K) = \mu_1(K) = \mu_2(K)$, 即 $\mu_1 | A_1 \cup A_2 = \mu_2 | A_1 \cup A_2$. 从而

$\mu_1=\mu_2$. 进而 $f_1=f_2$ $l.p.p.v.$ 证毕。

注 本节见参考文献 [6], [47], [120].

§ 2. Stonean 空间

定义 5.2.1 一个 Hausdorff 空间称为极不连通的，指它的每个开子集的闭包仍然是开子集. 紧的极不连通空间又称为Stonean 空间。

命题 5.2.2 设 Ω 是 Stonean 空间,则 $C(\Omega)$ 的投影全体的线性包在 $C(\Omega)$ 中是稠的。

证. 设 $f\in C(\Omega)$, $f\geqslant 0$ 及 $\varepsilon>0$, 考虑分割

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=\|f\|+1$$

使得 $(\lambda_{i+1}-\lambda_i)<\varepsilon$, $0\leqslant i\leqslant n-1$. 显然

$$E_1=\{t\in\Omega\,|\,f(t)<\lambda_1\}$$

是 Ω 的开子集,于是 $G_1=\bar{E}_1$ 是 Ω 的既闭又开的子集. 归纳地定义

$$E_i=\left\{t\in\Omega\,|\,f(t)<\lambda_i,\ t\notin\bigcup_{j=1}^{i-1}G_j\right\}$$

及 $G_i=\bar{E}_i$, $2\leqslant i\leqslant n$. 显然, E_i 是 Ω 的开子集, G_i 是 Ω 的既闭又开的子集, $1\leqslant i\leqslant n$.

我们说 $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}G_i$. 事实上,若 $t\in\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{n}G_i$, 特别地, $t\notin G_n$, $t\notin\bigcup_{i=1}^{n-1}G_i$. 另一方面, 自然 $f(t)\leqslant\|f\|<\lambda_n$,依 E_n 的定义, $t\in E_n\subset G_n$, 矛盾.

我们也有 $G_i\cap G_j=\emptyset$, $\forall i\neq j$. 事实上,无妨设 $i>j$, 于是 $\bigcup_{k=1}^{i-1}G_k$ 是包含 G_j 的开集. 又显然 $\left(\Omega\setminus\bigcup_{k=1}^{i-1}G_k\right)$ 是包含 E_i 的闭集,因此, $G_i\subset\Omega\setminus\bigcup_{k=1}^{i-1}G_k$. 所以, $G_i\cap G_j=\emptyset$.

今命 χ_i 是 G_i 的特征函数，它是 $C(\Omega)$ 的投影，并且 $\lambda_{i-1} \leqslant f(t) \leqslant \lambda_i$, $\forall t \in G_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 于是，$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i \right\| < \varepsilon$. 证毕.

定理 5.2.3 设 Ω 是紧 Hausdorff 空间，$C_r(\Omega)$ 表示 Ω 上实值连续函数的全体，则下列等价：

1) Ω 是 Stonean 空间；

2) $C_r(\Omega)$ 的任意有界非负递增网在 $C_r(\Omega)$ 中有上端；

3) $C_r(\Omega)$ 的任意有界子集在 $C_r(\Omega)$ 中有上端；

4) 对 Ω 上任意有界的下半连续实值函数 g，有 $f \in C_r(\Omega)$ 及 Ω 的第一纲的 Borel 子集 E，使得 $f(t) = g(t)$, $\forall t \notin E$.

此外，4) 中的 f 可以取为 $f(t) = \overline{\lim\limits_{t' \to t}} g(t')$, $\forall t \in \Omega$.

证. 4) 推导 3)：设 A 是 $C_r(\Omega)$ 的有界子集，于是

$$g(t) = \sup\{f'(t) | f' \in A\}$$

是 Ω 上有界的下半连续函数. 依 4)，有 $f \in C_r(\Omega)$ 及 Ω 的第一纲子集 E，使得 $f(t) = g(t)$, $\forall t \notin E$. 当然，$(g - f)$ 也是下半连续的，于是开子集 $G = \{t \in \Omega | g(t) > f(t)\} \subset E$，但 Ω 是 Baire 空间及 E 是第一纲的，所以，$G = \emptyset$，即 $f(t) \geqslant g(t)$, $\forall t \in \Omega$. 如果 $h \in C_r(\Omega)$，并且 $h \geqslant f'$, $\forall f' \in A$，自然 $h(t) \geqslant g(t)$, $\forall t \in \Omega$，所以，$h(t) \geqslant f(t)$, $\forall t \notin E$. 另一方面，$(\Omega \backslash E)$ 在 Ω 中是稠的，因此，$h \geqslant f$，即 f 是 A 在 $C_r(\Omega)$ 中的上端.

3) 推导 2)：显然.

2) 推导 1)：设 U 是 Ω 的任意开子集，令

$$A = \{f' \in C_r(\Omega) | 0 \leqslant f' \leqslant 1, \ \mathrm{supp}\, f' \subset U\}$$

依 $C_r(\Omega)$ 的偏序，显然 A 是 $C_r(\Omega)$ 的有界非负递增网，依 2)，A 在 $C_r(\Omega)$ 中有上端 f. 又令

$$g(t) = \sup\{f'(t) | f' \in A\}, \ \forall t \in \Omega.$$

显然 $g(t) \leqslant f(t)$, $\forall t \in \Omega$. 对任意的 $t \in U$，显然有 $f' \in A$，使得 $f'(t) = 1$，因此，$g(t) = 1$. 又 $1 \geqslant f'$, $\forall f' \in A$，所以，$1 \geqslant f$，从而

$f(t)=1$, $\forall t\in\bar{U}$.

今若有 $t_0\bar{\in}\bar{U}$, 使得 $f(t_0)>0$. 可以取 $h\in C_r(\Omega)$, 使得 $h\geqslant 0$, $h(t_0)=0$, $h(t)=1$, $\forall t\in\bar{U}$. 于是,

$$f'\leqslant\inf\{h,f\}\lneqq f,\ \forall f'\in A.$$

这将与 f 是 A 的上端相矛盾. 所以, $f(t)=0$, $\forall t\bar{\in}\bar{U}$. 从而, $\bar{U}$ 也是 Ω 的开子集.

1) 推导 4): 设 g 是 Ω 上有界的下半连续实值函数, 无妨认为 $0\leqslant g(t)\leqslant 1$, $\forall t\in\Omega$. 对任意的实数 λ, $F(\lambda)=\{t\in\Omega\,|\,g(t)\leqslant\lambda\}$ 是 Ω 的闭子集. 记 $G(\lambda)=\mathring{F}(\lambda)$, 注意

$$G(\lambda)=\Omega\backslash\overline{(\Omega\backslash F(\lambda))},$$

依 1), $G(\lambda)$ 是 Ω 的既闭又开的子集, 因此, $G(\lambda)$ 的特征函数 $\chi_\lambda\in C_r(\Omega)$. 令

$$f_n=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{k}{2^n}\left(\chi_{\frac{k}{2^n}}-\chi_{\frac{k-1}{2^n}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\chi_{\frac{k}{2^n}}$$

任意固定 n 及 $t\in\Omega$, 设 k 是 $\{0,1,\cdots,2^n\}$ 中的最小数, 使得 $\chi_{\frac{k}{2^n}}(t)=1$, 于是 $\chi_{\frac{m}{2^n}}(t)=1$, $\forall m\geqslant k$. 所以, $f_n(t)=\frac{k}{2^n}$. 同时显然有 $\chi_{\frac{m}{2^{n+1}}}(t)=1$, $\forall m\geqslant 2k$; $\chi_{\frac{m}{2^{n+1}}}(t)=0$, $\forall m\leqslant 2(k-1)$, 因此 $\frac{k}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant f_{n+1}(t)\leqslant\frac{k}{2^n}$. 所以, 在 $C_r(\Omega)$ 中, $\|f_n-f_{n+1}\|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$, $\forall n$. 从而有 $f\in C_r(\Omega)$, 使得 $\|f_n-f\|\to 0$. 令

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^n}\left(F\left(\frac{k}{2^n}\right)\Big\backslash G\left(\frac{k}{2^n}\right)\right),$$

易见 E 是 Ω 的第一纲的 Borel 子集. 今只须证明

$$f(t)=g(t),\ \forall t\bar{\in}E.$$

任意固定 n, 记 $N=2^n$, $F_k=F\left(\frac{k}{N}\right)$, $G_k=G\left(\frac{k}{N}\right)=\mathring{F}_k$,

及 $E_k=\Omega\backslash F_k$. 于是，$F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_N=\Omega$，$G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_N=\Omega$，$E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_N=\phi$. 因此，$G_i\cap E_j=G_i\backslash F_j=\phi$，$\forall i\leqslant j$. 由此，运用集合论的公式

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

我们有：

$$(G_1\cup E_1)\cap(G_2\cup E_2)=G_1\cup E_2\cup(E_1\cap G_2),$$

$$[G_1\cup E_2\cup(E_1\cap G_2)]\cap(G_3\cup E_3)$$

$$=G_1\cup E_3\cup(G_2\cap E_1)\cup(G_3\cap E_2),\cdots,\text{可见}$$

$$\bigcap_{k=1}^{N}(G_k\cup E_k)=G_1\cup\bigcup_{k=1}^{N-1}(G_{k+1}\backslash F_k).$$

如果 $t\in G_1$，则 $0\leqslant g(t)\leqslant\frac{1}{N}$；$\chi_{\frac{k}{N}}(t)=1$，$\forall k\geqslant 1$，从而，

$$f_n(t)=\frac{1}{N}-\frac{1}{N}\chi_0(t).$$

如果 $t\in G_{k+1}\backslash F_k(1\leqslant k\leqslant N-1)$，则

$$\frac{k}{N}<g(t)\leqslant\frac{k+1}{N};\quad \chi_{\frac{m}{N}}(t)=1,\ \forall m\geqslant k+1;$$

$$\chi_{\frac{m}{N}}(t)=0,\ \forall m\leqslant k,$$

从而，$f_n(t)=\frac{k+1}{N}$. 总之，

$$|g(t)-f_n(t)|\leqslant\frac{1}{2^n},\ \forall t\in\bigcap_{k=1}^{2^n}(G_k\cup E_k).$$

上面的 n 是任意的，又 $f_n\to f$，所以，$g(t)=f(t)$，$\forall t\in E$.

今只须证明上面构造的 f 满足

$$f(t)=\overline{\lim_{t'\to t}}\,g(t'),\ \forall t\in\Omega.$$

在前面证明 $\|f_n-f_{n+1}\|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 中，已指出 $f_n(t)\searrow f(t)$，$\forall t\in\Omega$. 当 $t'\in E$ 时，有 n 及 $k(1\leqslant k\leqslant 2^n)$，使得 $t'\in F\left(\frac{k}{2^n}\right)\Big\backslash G\left(\frac{k}{2^n}\right)$. 由

于对任意的 p，$\chi_{\frac{2^p k}{2^{n+p}}}(t')=\chi_{\frac{k}{2^n}}(t')=0$，因此

$$f_{n+p}(t')\geqslant 1-\frac{1}{2^{n+p}}\sum_{i>2^p k}^{2^{n+p}-1}1>\frac{k}{2^n}\geqslant g(t'),$$

所以，$f(t)\geqslant g(t)$，$\forall t\in\Omega$. 从而

$$\overline{\lim_{t'\to t}}\, g(t')\leqslant\overline{\lim_{t'\to t}}\, f(t')=f(t),\ \forall t\in\Omega.$$

另一方面，对 $t\in\Omega$ 及任意的 $\varepsilon>0$，有 t 的邻域 U，使得 $f(t'')>f(t)-\varepsilon$，$\forall t''\in U$. 但 E 是第一纲的，因此有 $t'\in U\backslash E$，从而，$g(t')=f(t')>f(t)-\varepsilon$. 因此，$\overline{\lim_{t'\to t}}\, g(t')\geqslant f(t)-\varepsilon$. $\varepsilon>0$ 是任意的，所以，$\overline{\lim_{t'\to t}}\, g(t')=f(t)$，$\forall t\in\Omega$. 证毕.

定义 5.2.4 设 Ω 是 Stonean 空间，μ 是 Ω 上的正则 Borel 测度（相当于 $C(\Omega)$ 上的一个正泛函）. 我们称 μ 是正规的，指对于 $C_r(\Omega)$ 的任意有界非负递增网 $\{f_l\}$，有 $\mu(f)=\sup\limits_l\mu(f_l)$，这里 f 是 $\{f_l\}$ 在 $C_r(\Omega)$ 中的上端.

命题 5.2.5 设 Ω 是 Stonean 空间，μ 是 Ω 上正规的正则 Borel 测度，则对于 Ω 的任意稀疏闭子集 F 及第一纲 Borel 子集 E，有 $\mu(F)=\mu(E)=0$.

证. $(\Omega\backslash F)$ 是 Ω 的开稠子集，于是

$$\Omega\backslash F=\{\operatorname{supp} f\,|\,f\in C(\Omega),\ 0\leqslant f\leqslant 1,\ \operatorname{supp} f\subset\Omega\backslash F\}.$$

注意 $\operatorname{supp} f=\overline{\{t\in\Omega\,|\,f(t)\neq 0\}}$，又 Ω 是 Stonean 空间，因此，

$$\Omega\backslash F=\bigcup\{G\,|\,G\text{ 是 }\Omega\text{ 的既闭又开子集，且 }\subset\Omega\backslash F\}.$$

于是，依 G 的包含关系，$\{\chi_G\,|\,G\text{ 如上}\}$ 是 $C_r(\Omega)$ 的有界非负递增网，并且它在 $C_r(\Omega)$ 中的上端是 1. 因此，

$$\mu(\Omega)=\sup\{\mu(G)\,|\,G\text{ 如上}\}.$$

自然 $\mu(G)\leqslant\mu(\Omega\backslash F)$，所以，$\mu(F)=0$.

可以写 $E=\bigcup\limits_n F_n$，其中每个 F_n 是稀疏的. 于是 $\bar{F}_n$ 是稀疏闭子集，$\forall n$. 再依上面的讨论，可见 $\mu(E)=0$. 证毕.

命题 5.2.6 设 Ω 是 Stonean 空间，μ 是 Ω 上正规的正则 Borel 测度，则 $\operatorname{supp}\mu$ 是既闭又开的。

证. 记 $F=\operatorname{supp}\mu$，它是 Ω 的闭子集. 于是，$(F\backslash\mathring{F})$ 是稀疏闭子集，依命题 5.2.5，$\mu(F)=\mu(\mathring{F})$。令 E 是 $\mathring{F}$ 的闭包，则 E 是既闭又开的，并且 $\mathring{F}\subset E\subset F$，从而 $\mu(E)=\mu(F)$. 依 $\operatorname{supp}\mu$ 的定义，$F=E$. 证毕.

命题 5.2.7 设 Ω 是 Stonean 空间，h 是 Ω 上的有界 Borel 可测函数，则存在 $f\in C(\Omega)$，使得对于 Ω 上任意正规的正则 Borel 测度 μ，有

$$f(t)=h(t),\ p.p.\mu.$$

证. 无妨设 h 是实值的，于是，$g(t)=\varliminf_{t'\to t}h(t')$ 是 Ω 上有界的下半连续实值函数. 依定理 5.2.3，有 $f\in C_r(\Omega)$ 及 Ω 的第一纲 Borel 子集 E，使得

$$f(t)=g(t),\ \forall t\notin E.$$

对 Ω 上任意正规的正则 Borel 测度 μ，依 Лузин 定理，有 Ω 的互不相交的紧子集列 $\{K_n\}$，使得 $h|K_n$ 是连续的，$\forall n$，并且

$$\mu\left(\Omega\Big\backslash\bigcup_n K_n\right)=0.$$

于是

$$h(t)=g(t),\ \forall t\in\bigcup_n\mathring{K}_n.$$

由于 $(K_n\backslash\mathring{K}_n)$ 是闭稀疏集，依命题 5.2.5，$\mu(K_n\backslash\mathring{K}_n)=0$，$\forall n$. 因此，$\mu\left(\left(\Omega\Big\backslash\bigcup_n\mathring{K}_n\right)\cup E\right)=0$，并对任意的 $t\in\left(\bigcup_n\mathring{K}_n\right)\cap(\Omega\backslash E)$，$f(t)=h(t)$. 证毕.

定义 5.2.8 Ω 称为超 Stonean 空间，指它是 Stonean 空间，并且对于 $C(\Omega)$ 的任意非零正元 f，有 Ω 上正规的正则 Borel 测度 μ，使得 $\mu(f)>0$.

命题 5.2.9 设 Ω 是超 Stonean 空间，则存在 Ω 上正规的正则 Borel 测度族 $\{\mu_l\}$，使得对任意的 $l\neq l'$，$\operatorname{supp}\mu_l\cap\operatorname{supp}\mu_{l'}=\emptyset$，

并且 $\bigcup\limits_l \operatorname{supp}\mu_l$ 在 Ω 中稠.

证. 设 $\{\mu_l\}$ 是 Ω 上正规的正则 Borel 测度极大族，使得 $\operatorname{supp}\mu_l \cap \operatorname{supp}\mu_{l'} = \emptyset$，$\forall l \neq l'$. 记 $\Gamma = \bigcup\limits_l \operatorname{supp}\mu_l$，依命题 5.2.6，$\Gamma$ 是 Ω 的开子集，于是 Γ 是既闭又开的. 如果 $\Gamma \neq \Omega$，则 $\chi_{\Omega\backslash\Gamma}$ 是 $C(\Omega)$ 的非零正元，因此有 Ω 上正规的正则 Borel 测度 μ'，使得 $\mu'(\Omega\backslash\Gamma) > 0$. 令

$$\mu(E) = \mu'(E\backslash\Gamma),\ \forall E \text{ 是 } \Omega \text{ 的 Borel 子集.}$$

易见 μ 是 Ω 上正规的正则 Borel 测度，并且

$$\emptyset \neq \operatorname{supp}\mu \subset \Omega\backslash\Gamma,$$

这便与 $\{\mu_l\}$ 的极大性相矛盾. 因此，$\Gamma = \Omega$. 证毕.

注 本节见参考文献 [14]，[110]，[119].

§ 3. 交换的 w^*-代数

定理 5.3.1 设 Z 是 σ-有限的交换 w^*-代数，Ω 是其谱空间，则 Ω 是超 Stonean 空间，并且在 Ω 上有正规的正则 Borel 测度 ν，使得

$$\operatorname{supp}\nu = \Omega,\ C(\Omega) = L^\infty(\Omega, \nu).$$

证. 无妨设 $Z \subset B(\mathscr{H})$，依命题1.14.5，Z 在 $\mathscr{H}$ 中有分离矢 ξ_0. 设 $f \to m_f$ 是 $C(\Omega)$ 到 Z 上的 $*$ 同构，依定理 5.2.3 的 2) 及命题 1.2.10，可见 Ω 是 Stonean 空间. 自然有 Ω 上的正则 Borel 测度 ν，使得 $\langle m_f\xi_0, \xi_0\rangle = \int_\Omega f(t)d\nu(t)$，$\forall f \in C(\Omega)$. 同样由命题 1.2.10，$\nu$ 是正规的. 如果有 Ω 的非空开子集 U，使得 $\nu(U) = 0$. 取 $f \in C(\Omega)$，$f \geqslant 0$，$f \neq 0$，$\operatorname{supp} f \subset U$，则 $\langle m_f\xi_0, \xi_0\rangle = 0$. 但 ξ_0 是 Z 的分离矢，因此，$f = 0$，矛盾. 所以，$\operatorname{supp}\nu = \Omega$. 特别，$\Omega$ 是超 Stonean 空间，并且 $C(\Omega)$ 一一地嵌入 $L^\infty(\Omega, \nu)$ 之中.

设网 $\{f_l\} \subset C(\Omega)$，且 $\|f_l\| \leqslant 1$，$\forall l$ 及依 $L^\infty(\Omega, \nu)$ 的弱 $*$ 拓扑，$f_l \to f \in L^\infty(\Omega, \nu)$. 记 $m_l = m_{f_l} \in Z$，于是 $\|m_l\| \leqslant 1$，必要时

代以子网，可设 $m_l \xrightarrow{\text{弱算子}} m_g$，这里 $g\in C(\Omega)$。对任意的 $h\in C(\Omega)$，

$$\left|\int (f_l-g)hd\nu\right| = |\langle (m_l-m_g)m_h\xi_0, \xi_0\rangle| \to 0,$$

又 $C(\Omega)$ 在 $L^1(\Omega,\nu)$ 中是稠的，因此，依 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 的弱 * 拓扑，$f_l\to g$，从而 $f(t)=g(t)$，$p.p.\nu$。这表明 $C(\Omega)$ 在 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 中是弱 * 闭的。易见 $C(\Omega)$ 在 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 中是弱 * 稠的，所以，$C(\Omega)=L^\infty(\Omega,\nu)$。证毕。

命题 5.3.2 设 Ω 是紧 Hausdorff 空间，ν 是 Ω 上的正则 Borel 测度，则 $Z=L^\infty(\Omega,\nu)$ 是 σ-有限的交换 w^*-代数。

证。令 $\omega(f)=\int_\Omega f(t)d\nu(t)$，$\forall f\in L^\infty(\Omega,\nu)$。由于 $1\in L^1(\Omega,\nu)$，可见 φ 是 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 上忠实的弱 * 连续的正泛函，依命题 1.14.2，Z 是 σ-有限的。证毕。

定理 5.3.3 设 Ω 是超 Stonean 空间，则 $C(\Omega)$ 是交换的 w^*-代数。此外，如果 Ω 上有正规的正则 Borel 测度 ν，而 $\operatorname{supp}\nu=\Omega$，则 $C(\Omega)=L^\infty(\Omega,\nu)$ 还是 σ-有限的。

证。首先设 Ω 上有正规的正则 Borel 测度 ν，而 $\operatorname{supp}\nu=\Omega$。于是 $C(\Omega)$ 一一嵌入 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 之中，对任意的 $h\in L^\infty(\Omega,\nu)$，依命题 5.2.7，有 $f\in C(\Omega)$，使得 $f(t)=h(t)$，$p.p.\nu$。所以，$C(\Omega)=L^\infty(\Omega,\nu)$。依命题 5.3.2，$C(\Omega)$ 是 σ-有限的交换 w^*-代数。

一般，依命题 5.2.9，有 Ω 上正规的正则 Borel 测度族 $\{\nu_l\}$，使得 $\Omega_l\cap\Omega_{l'}=\emptyset$，这里 $\Omega_l=\operatorname{supp}\nu_l$，$\forall l\neq l'$，并且 $\Gamma=\bigcup_l \Omega_l$ 在 Ω 中稠。依命题 5.2.6，Ω_l 是 Ω 的既闭又开子集，$\forall l$。于是，Γ 依诱导拓扑是局部紧 Hausdorff 空间。从而，$\nu=\sum_l\oplus\nu_l$ 将是 Γ 上的正则 Borel 测度，并且 $\operatorname{supp}\nu=\Gamma$。由此，$f\to f|\Gamma$ 是 $C(\Omega)$ 到 $L^\infty(\Gamma,\nu)$ 中的一一映象。反之，如果 $h\in L^\infty(\Gamma,\nu)$，令 $h(t)=0$，$\forall t\in\Omega\backslash\Gamma$，依命题 5.2.7，有 $f\in C(\Omega)$，使得 $f(t)=h(t)$ $p.p.\nu_l$，$\forall l$。因此在 Γ 上，$f(t)=h(t)$，$l.p.p.\nu$。这说明 $C(\Omega)$ 与 $L^\infty(\Gamma,\nu)$ 是 * 同构的，因此，$C(\Omega)$ 是交换 w^*-代数。证毕。

定理 5.3.4 设 Z 是交换的 w^*-代数，Ω 是它的谱空间，则 Ω 是超 Stonean 空间，并且存在局部紧 Hausdorff 空间 Γ，及 Γ 上的正则 Borel 测度 ν，$\mathrm{supp}\nu=\Gamma$，使得 $Z*$ 同构于 $L^\infty(\Gamma,\nu)$.

证. 设 $Z\subset B(\mathscr{H})$，$f\to m_f$ 是 $C(\Omega)$ 到 Z 上的 $*$ 同构，于是对每个 $\xi\in\mathscr{H}$，可决定 Ω 上的正则 Borel 测度 ν_ξ，使得

$$\langle m_f\xi,\xi\rangle=\int_\Omega f(t)d\nu_\xi(t),\quad \forall f\in C(\Omega).$$

依定理 5.2.3 的 2) 及命题 1.2.10，Ω 是 Stonean 空间，并且 ν_ξ 是正规的，$\forall\xi\in\mathscr{H}$. 如果 f 是 $C(\Omega)$ 的非零正元，自然有 $\xi\in\mathscr{H}$，使得 $\nu_\xi(f)>0$，因此，Ω 是超 Stonean 空间. 其余部份，已包含于定理 5.3.3 的证明之中. 证毕.

定义 5.3.5 设 M 是 w^*-代数，$E(\subset M)$ 称为 M 的生成集，指 M 的包含 E 的最小 w^*-子代数就是 M. 此外，如果 M 有一个可数的生成集，则称 M 是可数生成的.

相仿地理解 c^*-代数的生成集.

引理 5.3.6 设 Ω 是紧 Hausdorff 空间，如果 c^*-代数 $C(\Omega)$ 由可数个投影生成，则 $C(\Omega)$ 可以由一个可逆的正元生成.

证. 设 $\{p_n\}$ 是 $C(\Omega)$ 的投影列，且生成 $C(\Omega)$. 令

$$h=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(2p_n+\frac{1}{2}\right),$$

则 h 是 $C(\Omega)$ 的可逆正元. 对任意的 $t_1,t_2\in\Omega$，$t_1\neq t_2$，由于 $\{p_n\}$ 生成 $C(\Omega)$，有最小的正整数 k，使得 $p_k(t_1)\neq p_k(t_2)$. 于是，

$$|h(t_1)-h(t_2)|=2\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{3^n}(p_n(t_1)-p_n(t_2))\right|$$

$$\geqslant\frac{2}{3^k}-2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3^k},$$

即函数 h 也是分离 Ω 的点的. 再由 Stone-Weierstrass 定理及引理 2.1.5，可见 h 生成 $C(\Omega)$. 证毕.

定理 5.3.7 设 Z 是可数生成的交换 w^*-代数，则 Z 可以由一个可逆的正元生成. 特别，可分 Hilbert 空间中的交换 vN 代数可

以由一个元生成.

证. 设 $\{a_n\}$ 生成Z,代 a_n 以 $\frac{a_n+a_n^*}{2}$, 可以认为 $a_n^*=a_n$, $\forall n$. 再由关于 a_n 的谱分解,可见Z能够由可数个投影生成. 把Z看作 c^*-代数,设这可数个投影所生成的Z的 c^*-子代数是A. 依引理 5.3.6, A将由一个可逆的正元 a 生成. 自然A也是 w^*-代数 Z的生成集,因此,$\{a\}$ 生成 Z.此外,可分 Hilbert 空间中任意 vN 代数都是可数生成的,由此得证.

定理 5.3.8 如果Z是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的交换 vN 代数, 并且无极小投影 (Z 的投影 p 称为极小的, 指如果Z的投影 $q\leqslant p$, 则 $q=0$ 或 p), 则 Z * 同构于 $L^\infty([0,1])$, 这里 $[0,1]$ 使用的是 Lebesgue 测度.

证. 设Ω是Z的谱空间,依定理 5.3.1, Ω是超 Stonean 空间, 并且Ω上有正规的正则 Borel 测度 ν, 使得 $\operatorname{supp}\nu=\Omega$, $C(\Omega)=L^\infty(\Omega,\nu)$. 又依定理 5.3.7, 存在$Z$的正元 a, 它生成 Z. 无妨设 $0\leqslant a\leqslant 1$. 记$I=[0,1]$,由于$a(\cdot)$是Ω到I的连续映象,可定义 I 上的 Borel 测度 μ:

$$\mu(E)=\nu(a^{-1}(E)),\ \forall E \text{ 是 } I \text{ 的 Borel 子集}$$

及 $L^\infty(I,\mu)$ 到 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 的 * 同态 Φ:

$$\Phi(f)(t)=f(a(t)),\ \forall t\in\Omega,\ f\in L^\infty(I,\mu),$$

如果 f 是 I 的多项式,显然, $\Phi(f)=f(a)$. 但 $\{a\}$ 生成 Z, 因此, $\Phi(L^\infty(I,\mu))$ 包含 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 的一个弱*稠集.

我们说$\Phi(L^\infty(I,\mu))$在 $L^1(\Omega,\nu)$ 中也是稠的. 事实上,如果 $g\in L^\infty(\Omega,\nu)$, 使得 $\int_\Omega g(t)\Phi(f)(t)d\nu(t)=0$, $\forall f\in L^\infty(I,\mu)$, 由于 $\Phi(L^\infty(I,\mu))$ 在 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 是弱 * 稠的,因此有网 $\{f_l\}\subset L^\infty(I,\mu)$, 使得依 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 的弱 * 拓扑, $\Phi(f_l)\to\bar{g}$. 自然 $\bar{g}$ 也 $\in L^1(\Omega,\nu)$, 因此

$$0=\int_\Omega g(t)\Phi(f_l)(t)d\nu(t)\to\int_\Omega|g(t)|^2d\nu(t)$$

即 $g=0$.

现在指出Φ是 σ-σ 连续的，这需要对任意的网 $\{f_l\}\subset L^\infty(I, \mu)$, $\|f_l\|\leqslant 1$, $\forall l$, 且 $f_l\xrightarrow{\text{弱}*\text{拓扑}}0$, 来证明 $\Phi(f_l)\xrightarrow{\text{弱}*\text{拓扑}}0$. 对任意的 $g\in L^1(\Omega, \nu)$ 及 $\varepsilon>0$, 依前段，可取 $f\in L^\infty(I, \mu)$, 使得

$$\int_\Omega |g(t)-\Phi(f)(t)|d\nu(t)<\varepsilon,$$

于是当 l 充分大，

$$\left|\int_\Omega g(t)\Phi(f_l)(t)d\nu(t)\right|\leqslant\left|\int_I f_l(\lambda)f(\lambda)d\mu(\lambda)\right|$$
$$+\int_\Omega |g(t)-\Phi(f)(t)|d\nu(t)<2\varepsilon,$$

即说明Φ是σ-σ 连续的. 于是，$\Phi(L^\infty(I, \mu))=L^\infty(\Omega, \nu)$.

如果 $f\in L^\infty(I, \mu)$, 使得 $\Phi(f)=0$, 于是，

$$\Phi(fg)=0, \ \forall g\in C(I).$$

因此，$\int_I f(\lambda)g(\lambda)d\mu(\lambda)=\int_\Omega \Phi(fg)(t)d\nu(t)=0$, $\forall g\in C(I)$, 即 $f=0$. 所以，Φ是 $L^\infty(I, \mu)$ 到 $L^\infty(\Omega, \nu)$ 上的$*$同构.

现在指出 I 上的测度 μ 是非原子的，即对任意的 $\lambda\in I$, 有 $\mu(\{\lambda\})=0$. 事实上，如果有 $\lambda\in I$, 使得 $\mu(\{\lambda\})>0$. 记 $E=a^{-1}(\{\lambda\})$, 则 $\nu(E)>0$. 从而χ_E是 $L^\infty(\Omega, \nu)$ 的非零投影. 由 $\Phi(\chi_{\{\lambda\}})=\chi_E$, $\chi_{\{\lambda\}}$ 也是 $L^\infty(I, \mu)$ 的非零投影，自然 $\chi_{\{\lambda\}}$ 是极小的，所以，χ_E 将是 $L^\infty(\Omega, \nu)$ ($\cong Z$) 的极小投影，这与假设相矛盾.

令 $f(\lambda)=\mu([0, \lambda])$, $\forall\lambda\in I$, 则 f 是 I 上的递增连续函数，并且 $f(0)=0$, $f(1)=1$ (这里无妨设 $\nu(\Omega)=1$). 又命 $g(\lambda)=\min\{\lambda'|f(\lambda')=\lambda\}$, $\forall\lambda\in I$, 则 g 是 I 上左连续的严格增函数，并且至多有可数个跳跃点. 如果 $\{\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots\}$ 是 g 的跳跃点，则有 $\{\lambda_n'\}$, $\lambda_1<\lambda_1'<\lambda_2<\lambda_2'<\cdots<\lambda_n<\lambda_n'<\cdots$, 使对每个 n,

$$f(\lambda)=f(\lambda_n), \ \forall\lambda\in[\lambda_n, \lambda_n'], \ f(\lambda)>f(\lambda_n), \ \forall\lambda>\lambda_n'.$$

于是，$g\circ f(\lambda)=\lambda$, $\forall\lambda\in I\setminus\bigcup_n[\lambda_n, \lambda_n']$. 另一方面，

$$\mu([\lambda_n, \lambda_n'])=\mu((\lambda_n, \lambda_n'])=f(\lambda_n')-f(\lambda_n)=0, \ \forall n,$$

因此，$g\circ f(\lambda)=\lambda$，$p.p.\mu$.

注意，如果m是I上的 Lebesgue 测度，对于任意的 $0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant 1$，

$$m((f(\lambda_1),f(\lambda_2)])=f(\lambda_2)-f(\lambda_1)=\mu((\lambda_1,\lambda_2]),$$

因此，$m=\mu\circ f^{-1}$. 进而，$\mu=m\circ g^{-1}$.

今可以定义 $L^\infty(I)=L^\infty(I,m)$ 到 $L^\infty(I,\mu)$ 的 * 同态 Ψ:

$$\Psi(h)=h\circ f,\ \forall h\in L^\infty(I).$$

如果 $k\in L^\infty(I,\mu)$，则 $k\circ g\in L^\infty(I)$，并且

$$\Psi(k\circ g)(\lambda)=(k\circ g\circ f)(\lambda)=k(\lambda)\quad p.p.\mu,$$

因此，$\Psi(L^\infty(I))=L^\infty(I,\mu)$. 此外，如果 $h\in L^\infty(I)$，使得 $\Psi(h)=0$. 由于 $\int\Psi(h\bar{h})(\lambda)d\mu(\lambda)=\int|h(\lambda)|^2dm(\lambda)$，所以，$h=0$. 即$\Psi$是$L^\infty(I)$到$L^\infty(I,\mu)$上的 * 同构. 进而，$\Phi\circ\Psi$是$L^\infty([0,1])$ 到 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 上的 * 同构. 证毕.

系 5.3.9 可分 Hilbert 空间中，相互不 * 同构的交换 vN 代数只有可数多个.

定义 5.3.10 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的交换 vN 代数 Z 称为极大交换的，指在 $\mathscr{H}$ 中没有真的包含 Z 的交换 vN 代数.

显然，Z 是极大交换的，当且仅当，$Z=Z'$.

定义 5.3.11 设Ω是局部紧 Hausdorff 空间，ν是Ω上的正则 Borel 测度，对任意的 $f\in L^\infty(\Omega,\nu)$，定义 $\hat{m}_fg=fg$，$\forall g\in L^2(\Omega,\nu)$，自然 $\hat{m}_f$是 $L^2(\Omega,\nu)$ 中的有界线性算子. 称 $\{\hat{m}_f|f\in L^\infty(\Omega,\nu)\}$ 为 $L^2(\Omega,\nu)$ 中的乘法代数.

引理 5.3.12 如果Ω是紧 Hausdorff 空间，ν是Ω上的正则 Borel 测度，则 $L^2(\Omega,\nu)$ 中的乘法代数 Z 是极大交换的 vN 代数.

证. 设 $a'\in Z'$，于是对任意的 $f\in L^\infty(\Omega,\nu)$，$a'f=a'\hat{m}_f1=f\cdot a'1$，这里 1 是$\Omega$上恒取值 1 的函数. 记 $a'1=g(\in L^2(\Omega,\nu))$，则 $a'f=gf$，$\forall f\in L^\infty(\Omega,\nu)$.

今指出$|g(t)|\leqslant\|a'\|$，$p.p.\nu$. 若否，则有 $\varepsilon>0$ 及Ω的紧子集 K，使得

$$\nu(K)>0,\ |g(t)|\geqslant\|a'\|+\varepsilon,\ \forall t\in K.$$
于是，

$$\nu(K)(\|a'\|+\varepsilon)^2\leqslant\int|g(t)\chi_K(t)|^2d\nu(t)$$
$$=\|a'\chi_K\|^2\leqslant\|a'\|^2\nu(K)$$

矛盾. 因此，$g\in L^\infty(\Omega,\ \nu)$. 再由 $a'f=gf$, $\forall f\in L^\infty(\Omega\nu)$, 及 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 在 $L^2(\Omega,\ \nu)$ 中稠，可见 $a'=\hat{m}_g$. 所以，$Z'=Z$. 证毕.

定理 5.3.13 设 Ω 是局部紧 Hausdorff 空间，ν 是 Ω 上的正则 Borel 测度，则 $L^2(\Omega,\nu)$ 中的乘法代数 Z 是极大交换的 vN 代数，并且 $f\to\hat{m}_f$ 是 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 到 Z 上的 σ-σ 连续 $*$ 同构.

证. 对任意的 $f\in L^\infty(\Omega,\nu)$, 显然 $\|\hat{m}_f\|\leqslant\|f\|$. 另一方面，如果在 Ω 的某紧子集 K 上，$|f(t)|\geqslant\lambda$, 并且 $\nu(K)>0$, 则

$$\|\hat{m}_f\chi_K\|\geqslant\lambda\|\chi_K\|.$$

因此，$\|\hat{m}_f\|=\|f\|$, 即 $f\to\hat{m}_f$ 是 $L^\infty(\Omega,\nu)$ 到 Z 上的 $*$ 同构. 容易证明这 $*$ 同构是 σ-σ 连续的. 特别，Z 是 $L^2(\Omega,\nu)$ 中的 vN 代数.

依命题 5.1.2，$\Omega=N\cup\bigcup_l K_l$, 其中 $\{K_l\}$ 是互不相交的局部可数的紧集族，N 是局部 ν-零的. 于是

$$L^2(\Omega,\ \nu)=\sum_l\oplus L^2(K_l,\ \nu_l),$$

这里 $\nu_l=\nu|K_l,\forall l$, 今如 $a'\in Z'$, 由于 $a'h_l=a'\hat{m}_lh_l=\hat{m}_la'h_l$, $\forall h\in L^2(K_l,\ \nu_l)$, 这里 $\hat{m}_l$ 为 $L^2(\Omega,\nu)$ 中乘以 χ_{K_l} 的算子，因此，a' 对 $L^2(\Omega,\nu)$ 的闭子空间 $L^2(K_l,\nu_l)$ 是不变的，$\forall l$. 依引理 5.3.12，$a'|L^2(K_l,\ \nu_l)=\hat{m}_{g_l}$, 这里 $g_l\in L^\infty(K_l,\ \nu_l),\forall l$. 令

$$g=\sum_l\chi_{K_l}g_l,$$

则 $g\in L^\infty(\Omega,\ \nu)$, 且 $a'=\hat{m}_g$. 因此，$Z'=Z$. 证毕.

命题 5.3.14 设 Z 是 $\mathscr{H}$ 中的交换 vN 代数，且有循环矢 ξ_0, 则在 Z 的谱空间 Ω 上有正则 Borel 测度 ν, 及 $\mathscr{H}$ 到 $L^2(\Omega,\ \nu)$ 上

的酉算子 u，使得

$$\operatorname{supp}\nu = \Omega, \ C(\Omega) = L^\infty(\Omega, \nu),$$

$$u m_f u^{-1} = \hat{m}_f, \ \forall f \in L^\infty(\Omega, \nu)$$

这里 $f \to m_f$ 是 $C(\Omega)$ 到 Z 上的 * 同构.

证. ξ_0 对 Z' 是分离的，但 $Z \subset Z'$，因此，ξ_0 对 Z 也是分离的. 依定理 5.3.1 的证明，由

$$\langle m_f \xi_0, \xi_0 \rangle = \int_\Omega f(t) d\nu(t), \ \forall f \in C(\Omega)$$

决定的 Ω 上的正则 Borel 测度 ν 满足：

$$\operatorname{supp}\nu = \Omega, \ C(\Omega) = L^\infty(\Omega, \nu).$$

今命 $u m_f \xi_0 = f$，$\forall f \in C(\Omega)$，由于 ξ_0 是 Z 的循环矢，因此 u 可扩张为 $\mathscr{H}$ 到 $L^2(\Omega, \nu)$ 上的酉算子，并且

$$u m_f u^{-1} = \hat{m}_f, \ \forall f \in C(\Omega) = L^\infty(\Omega, \nu).$$

证毕.

命题 5.3.15 设 Z 是 $\mathscr{H}$ 中的交换 vN 代数，则 Z 是极大交换且 σ-有限的，当且仅当，Z 在 $\mathscr{H}$ 中有循环矢.

证. 充分性由命题 5.3.14 及 1.14.2 立见.

今设 Z 是极大交换且 σ-有限的，依命题 1.14.5，Z 有分离矢 ξ_0. 但 $Z' = Z$，因此，ξ_0 也是 Z 的循环矢. 证毕.

系 5.3.16 如果 Z 是可分 Hilbert 空间中的交换 vN 代数，则 Z 是极大交换的，当且仅当，Z 有循环矢.

定理 5.3.17 设 Z 是 $\mathscr{H}$ 中极大交换的 vN 代数，则存在局部紧 Hausdorff 空间 Ω，Ω 上的正则 Borel 测度 ν，$\operatorname{supp}\nu = \Omega$，使得 Z 酉等价于 $L^2(\Omega, \nu)$ 中的乘法代数.

证. 依 Zorn 辅理，可分解

$$\mathscr{H} = \sum_l \oplus \mathscr{H}_l, \ \mathscr{H}_l = \overline{Z\xi_l}.$$

令 p_l 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_l$ 上的投影，则 $p_l \in Z' = Z$，$\forall l$. 设 Ω' 是 Z 的谱空间，$f \to m_f$ 是 $C(\Omega')$ 到 Z 上的 * 同构. 于是对每个 l，存在 Ω' 的既闭又开的子集 Ω_l，使得 $p_l = m_{\chi_l}$，这里 χ_l 是 Ω_l 的特征函

数. 由于 $p_lp_{l'}=0$, 因此, $\Omega_l\cap\Omega_{l'}=\emptyset$, $\forall l\neq l'$.

对每个 l, $Z_l=Zp_l$ 是 $\mathscr{H}_l$ 中有循环矢 ξ_l 的交换 vN 代数,其谱空间是 Ω_l, 从而依命题 5.3.14, 有 Ω_l 上的正则 Borel 测度 ν_l, $\text{supp}\,\nu_l=\Omega_l$, 及 $\mathscr{H}_l$ 到 $L^2(\Omega_l,\nu_l)$ 上的酉算子 u_l, 使得

$$C(\Omega_l)=L^\infty(\Omega_l,\nu_l),\quad u_lm_f^{(l)}u_l^{-1}=\hat{m}_f^{(l)},\quad \forall f\in L^\infty(\Omega_l,\nu_l),$$

这里 $f\to m_f^{(l)}$ 是 $C(\Omega_l)$ 到 Z_l 上的 * 同构, $\hat{m}_f^{(l)}$ 是 $L^2(\Omega_l,\nu_l)$ 中乘以 f 的算子.

记 $\Omega=\bigcup\limits_l\Omega_l$, 它是 Ω' 的开稠子集,从而是局部紧 Hausdorff 空间. 又令 $\nu=\sum\limits_l\oplus\nu_l$, 则 ν 是 Ω 上的正则 Borel 测度, 且 $\text{supp}\,\nu=\Omega$. 再设 $u=\sum\limits_l\oplus u_l$, 则 u 是 $\mathscr{H}=\sum\limits_l\oplus\mathscr{H}_l$ 到

$$L^2(\Omega,\nu)=\sum_l\oplus L^2(\Omega_l,\nu_l)$$

上的酉算子. 对任意的 $f\in C(\Omega')$, $g=f|\Omega\in L^\infty(\Omega,\nu)$, 易见 $um_fu^{-1}=\hat{m}_g$. 因此, $uZu^{-1}\subset L^2(\Omega,\nu)$ 中的乘法代数,但依定理 5.3.13, 两者都是极大交换的,因此, $uZu^{-1}=L^2(\Omega,\nu)$ 中的乘法代数. 证毕.

定义 5.3.18 w^*-代数 M 的投影 p 称为交换的, 指 pMp 是交换的.

命题 5.3.19 设 M 是 w^*-代数, p, q 是 M 的投影,且 p 是交换的.

1) 若 $p\sim q$, 则 q 也是交换的;

2) $pMp=Zp$, 这里 Z 是 M 的中心;

3) 若 $q\leqslant p$, 则 $q=c(q)p$, 这里 $c(q)$ 是 q 在 M 中的中心覆盖.

证. 无妨设 M 是 vN 代数.

1) 由命题 1.5.2 立见.

2) 由于 M_p 是交换的,因此, $M_p\subset M_p'$. 依命题 1.3.8, $M_p=M_p\cap M_p'=Zp$.

3) 依命题 1.5.8，q 在 M_p 中的中心覆盖是 $c(q)p$，但 M_p 是交换的，所以，$q = c(q)p$. 证毕.

注 本节见参考文献 [14]，[48]，[104].

§ 4. 交换 C^*-代数的 * 表示

本节中，设 A 是有单位元的交换 C^*-代数，于是 $A \cong C(\Omega)$，这里 Ω 是 A 的谱空间(紧 Hausdorff).

定理 5.4.1 如果 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 A 的循环 * 表示，则在测度等价的意义下，在 Ω 上有唯一的正则 Borel 测度 μ，使得

$$\{\pi, \mathscr{H}\} \cong \{\Phi_\mu, L^2(\Omega, \mu)\},$$

这里 $(\Phi_\mu(a)f)(t) = a(t)f(t)$，$\forall f \in L^2(\Omega, \mu)$，而 $a \to a(\cdot)$ 是 A 到 $C(\Omega)$ 上的 * 同构.

证. 设 $\xi \in \mathscr{H}$ 是 π 的循环矢，于是有 Ω 上的正则 Borel 测度 μ，使得

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \int_\Omega a(t)d\mu(t), \quad \forall a \in A.$$

令 $u\pi(a)\xi = a(\cdot)(\forall a \in A)$，则 u 可扩张 $\mathscr{H}$ 到 $L^2(\Omega, \mu)$ 上的酉算子，且显然 $u\pi(a)u^{-1} = \Phi_\mu(a)$，$\forall a \in A$.

今若 μ, ν 是 Ω 上的正则 Borel 测度，v 是 $L^2(\Omega, \mu)$ 到 $L^2(\Omega, \nu)$ 上的酉算子，使得

$$v\Phi_\mu(a)v^{-1} = \Phi_\nu(a), \quad \forall a \in A,$$

记 $v1 = \alpha \in L^2(\Omega, \nu)$，则 $va = v\Phi_\mu(a)1 = \Phi_\nu(a)\alpha$. 于是

$$\int |a(t)|^2 d\mu(t) = \int |a(t)\alpha(t)|^2 d\nu(t), \quad \forall a \in A,$$

即 $\mu = |\alpha|^2 \cdot \nu$. 从而 $\mu \prec \nu$. 同证 $\nu \prec \mu$，所以，$\mu \sim \nu$. 证毕.

当然，A 的任何 * 表示都可分解成循环 * 表示族与零表示的直和. 但本节中，将特别研究 A 的这样一类 * 表示 $\{\pi, \mathscr{H}\}$，它可分解成可数个循环 * 表示的直和，依命题 1.14.2，这等价于说 $\pi(A)'$ 是 σ-有限的.

定义 5.4.2 设 $\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 A 的 * 表示，对任意的 $\xi\in\mathscr{H}$，有 Ω 上唯一的正则 Borel 测度 μ_ξ，使得

$$\langle\pi(a)\xi, \xi\rangle=\int_\Omega a(t)d\mu_\xi(t), \ \forall a\in A.$$

我们引入 $\mathscr{H}$ 的元之间的偏序关系 $>$：$\xi>\eta$，指 $\mu_\xi\succ\mu_\eta$。$\xi\in\mathscr{H}$ 称为极大的，指 $\xi>\eta$，$\forall\eta\in\mathscr{H}$。

引理 5.4.3 如果 $\eta\in\mathscr{H}_\xi=\overline{\pi(A)\xi}$，则 $\eta<\xi$。

证。依定理 5.4.1，有 $\mathscr{H}_\xi$ 到 $L^2(\Omega, \mu_\xi)$ 上的酉算子 u，使得 $u(\pi(a)|\mathscr{H}_\xi)u^{-1}=\Phi_{\mu_\xi}(a)$，$\forall a\in A$。设 $f=u\eta(\in L^2(\Omega, \mu_\xi))$，则

$$\langle\pi(a)\eta, \eta\rangle=\int a(t)|f(t)|^2d\mu_\xi(t), \ \forall a\in A.$$

从而，$\mu_\eta=|f|^2\cdot\mu_\xi$，即 $\mu_\eta\prec\mu_\xi$，$\eta<\xi$。证毕。

引理 5.4.4 如果 $\mathscr{H}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\oplus\mathscr{H}_k$，$\mathscr{H}_k=\overline{\pi(A)\xi_k}$，$\|\xi_k\|\leqslant 1$，$\forall k$，则 $\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}}\xi_k$. 是极大矢。

证。显然 $\mu_\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}\mu_{\xi_k}$. 任意的 $\eta\in\mathscr{H}$，可分解为 $\eta=\sum\limits_k\eta_k$，这里 $\eta_k\in\mathscr{H}_k$，$\forall k$，于是 $\mu_\eta=\sum\limits_k\mu_{\eta_k}$，并依引理 5.4.3，$\mu_{\eta_k}\prec\mu_{\xi_k}$，$\forall k$。今若 Ω 的 Borel 子集 E，使得 $\mu_\xi(E)=0$，于是 $\mu_{\xi_k}(E)=0$，$\mu_{\eta_k}(E)=0$，$\forall k$。进而 $\mu_\eta(E)=0$，即 $\mu_\eta\prec\mu_\xi$，$\eta<\xi$。证毕。

引理 5.4.5 如果 $\pi(A)'$ 是 σ-有限的，则极大矢的全体在 $\mathscr{H}$ 中是稠的。

证。依引理 5.4.4，$\mathscr{H}$ 至少有一个极大矢 ξ，记 $\mathscr{H}_\xi=\overline{\pi(A)\xi}$。任意的 $\eta\in\mathscr{H}$ 可分解为

$$\eta=\eta_1+\eta_2, \ \eta_1\in\mathscr{H}_\xi, \ \eta_2\in\mathscr{H}_\xi^\perp,$$

记 $\mathscr{H}_1=\overline{\pi(A)\eta_1}(\subset\mathscr{H}_\xi)$，又可分解

$$\xi = \xi_1 + \xi_2,\ \xi_1 \in \mathscr{H}_1,\ \xi_2 \in \mathscr{H}_1^{\perp}$$

如果记 $\mu_i = \mu_{\xi_i}$, $i = 1, 2$，则 $\mu_\xi = \mu_1 + \mu_2$. 对任意的 $\varepsilon > 0$，显然 $\mu_{\eta_1+\varepsilon\xi_2} = \mu_{\eta_1} + \varepsilon^2\mu_2$. 既然 $\xi_1 \in \mathscr{H}_1$，依引理 5.4.3，$\mu_1 \prec \mu_{\eta_1}$. 于是

$$\mu_{\eta_1+\varepsilon\xi_2} \succ \mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 \sim \mu_1 + \mu_2 = \mu_\xi,$$

因此，$\eta_1 + \varepsilon\xi_2$ 也是极大矢. 注意 $\xi_1 \in \mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_\xi$，于是 $\xi_2 = \xi - \xi_1 \in \mathscr{H}_\xi$，$\eta_1 + \varepsilon\xi_2 \in \mathscr{H}_\xi$. 从而

$$\mu_{\eta_1+\varepsilon\xi_2+\eta_2} = \mu_{\eta_1+\varepsilon\xi_2} + \mu_{\eta_2},$$

所以 $\eta + \varepsilon\xi_2 = \eta_1 + \varepsilon\xi_2 + \eta_2$ 也是极大矢. 显然

$$\|(\eta + \varepsilon\xi_2) - \eta\| \leqslant \varepsilon\|\xi\|,$$

因此，极大矢的全体在 $\mathscr{H}$ 中是稠的. 证毕.

引理 5.4.6 如果 $\pi(A)'$ 是 σ-有限的，则可以分解

$$\mathscr{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathscr{H}_k,\quad \mathscr{H}_k = \overline{\pi(A)\xi_k},$$

且 $\xi_1 > \xi_2 > \cdots > \xi_k > \cdots$.

证. 设 $\{\zeta_n\}$ 是 $\pi(A)$ 的循环矢列，命

$$\{\eta_k | k = 1, 2, \cdots\}$$
$$= \{\zeta_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \cdots\},$$

依引理 5.4.5，可取 $\mathscr{H}$ 中的极大矢 ξ_1，使得

$$\|\xi_1 - \eta_1\| < 1.$$

令 p_1 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_1 = \overline{\pi(A)\xi_1}$ 上的投影，同样可取 $(1 - p_1)\mathscr{H}$ 中的极大矢 ξ_2，使得

$$\|\xi_2 - (1 - p_1)\eta_1\| < \frac{1}{2},$$

再命 p_2 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_2 = \overline{\pi(A)\xi_2}$ 上的投影，$\cdots$，一般设已取到 $\xi_1, \cdots, \xi_{k-1}$，及 p_i 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_i = \overline{\pi(A)\xi_i}$ 上的投影，$1 \leqslant i \leqslant k-1$，则再取 ξ_k 是 $\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i\right)\mathscr{H}$ 中的极大矢，使得

$$\left\|\xi_k - \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i\right)\eta_k\right\| < \frac{1}{k},$$

并命 p_k 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_k=\overline{\pi(A)\xi_k}$ 上的投影. 这样得到的列 $\{\xi_k\}$ 显然满足

$$\xi_1>\xi_2>\cdots>\xi_k>\cdots,\ \mathscr{H}_i\perp\mathscr{H}_j,\ \forall i\neq j$$

今只须证明 $\mathscr{H}=\sum_{i=1}^{\infty}\oplus\mathscr{H}_i$.

对任意的 ζ_k, 有子列 $\{k_n\}$, 使得 $\eta_{k_n}=\zeta_k$, $\forall n$. 依作法

$$\left\|\xi_{k_n}-\left(1-\sum_{j=1}^{k_n-1}p_j\right)\eta_{k_n}\right\|<\frac{1}{k_n},\ \forall n,$$

即

$$\left\|\left(\xi_{k_n}+\sum_{j=1}^{k_n-1}p_j\zeta_k\right)-\zeta_k\right\|<\frac{1}{k_n}\to 0,$$

因此, $\zeta_k\in\sum_{i=1}^{\infty}\oplus\mathscr{H}_i$, $\forall k$. 但 $\{\zeta_1,\cdots,\zeta_k,\cdots\}$ 是 $\pi(A)$ 的循环矢列, 所以, $\mathscr{H}=\sum_{i=1}^{\infty}\oplus\mathscr{H}_i$. 证毕.

引理 5.4.7 设 μ,ν 是 Ω 上的正则 Borel 测度, v 是 $L^2(\Omega,\mu)$ 到 $L^2(\Omega,\nu)$ 中的有界线性算子, 使得

$$v\Phi_\mu(a)=\Phi_\nu(a)v,\ \forall a\in A,$$

则 $vf=\alpha f$, $\forall f\in L^2(\Omega,\mu)$, 这里 $\alpha=v1\in L^2(\Omega,\nu)$.

证. 对任意的 $a\in C(\Omega)$, $va=v\Phi_\mu(a)1=\alpha a$, 于是,

$$\int|\alpha(t)a(t)|^2d\nu(t)\leqslant\|v\|^2\int|a(t)|^2d\mu(t),\ \forall a\in C(\Omega).$$

因此, $\|v\|^2\mu\geqslant|\alpha|^2\cdot\nu$, 由此, $\alpha f\in L^2(\Omega,\nu)$, $\forall f\in L^2(\Omega,\mu)$. 再由 $C(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega,\mu)$ 中是稠的, $va=\alpha a$ $(\forall a\in C(\Omega))$ 及

$$\|v\|^2\mu\geqslant|\alpha|^2\cdot\nu,$$

即可见 $vf=\alpha f$, $\forall f\in L^2(\Omega,\mu)$. 证毕.

引理 5.4.8 设 $\{\mu_k\}$, $\{\nu_k\}$ 是 Ω 上的正则 Borel 测度列, $\mathscr{H}=\sum_k\oplus L^2(\Omega,\mu_k)$, $\mathscr{K}=\sum_k\oplus L^2(\Omega,\nu_k)$, 又 u 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{K}$ 中的等距算子, 使得

$$u\Phi_{\mathscr{H}}(a) = \Phi_{\mathscr{K}}(a)u, \ \forall a \in A,$$

这里 $\Phi_{\mathscr{H}}(a)(f_1, \cdots, f_k, \cdots) = (af_1, \cdots, af_k, \cdots)$，其中

$$f_k \in L^2(\Omega, \mu_k), \ \forall k,$$

并且 $(f_1, \cdots, f_k, \cdots) \in \mathscr{H} \left(即 \sum_k \int |f_k(t)|^2 d\mu_k(t) < \infty \right)$，同样定义 $\Phi_{\mathscr{K}}(a)$，$\forall a \in A$。如果还假定

$$\mu_1 \succ \mu_2 \succ \cdots \succ \mu_k \succ \cdots, \ \nu_2 \succ \nu_3 \succ \cdots \succ \nu_j \succ \cdots$$

则 $\nu_j \succ \mu_j$，$\forall j \geqslant 2$.

证. 记 p_k 为 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}_k = L^2(\Omega, \mu_k)$ 上的投影，q_i 为 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{K}_i = L^2(\Omega, \nu_i)$ 上的投影，$u_{jk} = q_j u p_k$，易见

$$u_{jk}\Phi_{\mu_k}(a) = \Phi_{\nu_j}(a)u_{jk}, \ \forall j, k, \ a \in A.$$

如果记 $u_{jk}1 = \alpha_{jk}(\in \mathscr{K}_j)$，$\forall j, k$，依引理 5.4.7，

$$\begin{aligned} &u(0, \cdots, f_k, 0, \cdots) \\ &= (\alpha_{1k}f_k, \cdots, \alpha_{jk}f_k, \cdots), \ \forall f_k \in \mathscr{H}_k, \end{aligned}$$

u 是等距的，因此，

$$\int |f_k(t)|^2 d\mu_k(t) = \sum_j \int |\alpha_{jk}(t) f_k(t)|^2 d\nu_j(t). \tag{1}$$

今设 E 是 Ω 的 Borel 子集，使得 $\nu_2(E) = 0$，自然 $\nu_j(E) = 0$，$\forall j \geqslant 2$。于是对任意的 $a \in A$，

$$k_{\text{th}} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a\chi_E \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{u} \begin{pmatrix} a\alpha_{1k}\chi_E \\ \vdots \\ a\alpha_{jk}\chi_E \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_{1k}\chi_E \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\int \alpha_{11}(t)\overline{\alpha_{12}(t)} a(t)\chi_E(t) d\nu_1(t) = \left\langle \begin{pmatrix} a\alpha_{11}\chi_E \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \alpha_{12}\chi_E \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle \overset{(2)}{=} \left\langle u \begin{pmatrix} a\chi_E \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 0 \\ a\chi_E \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a\chi_E \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left\langle \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ a\chi_E \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \ \forall a \in A,$$

因此对 $p.p.\nu_1$ 的 $t\in E$，$\alpha_{11}(t)\overline{\alpha_{12}(t)}=0$。命

$$E_1=\{t\in E\,|\,\alpha_{11}(t)\neq 0\}, \ E_2=E\backslash E_1,$$

于是对 $p.p.\nu_1$ 的 $t\in E_1$，$\alpha_{12}(t)=0$。依 (2)

$$u(\chi_{E_2}, 0, \cdots)=(\alpha_{11}\chi_{E_2}, 0, \cdots),$$

但在 E_2 上，$\alpha_{11}(t)=0$，又 u 是等距的，因此，$\mu_1(E_2)=0$。从而 $\mu_2(E_2)=0$。又依 (2)

$$0=u(0, \chi_{E_2}, 0, \cdots)=(\alpha_{12}\chi_{E_2}, 0, \cdots),$$

因此对 $p.p.\nu_1$ 的 $t\in E_2$，$\alpha_{12}(t)=0$。所以 $\alpha_{12}(t)=0$，$p.p.\nu_1$ 于 E。由此，依 (2)

$$u(0, \chi_E, 0, \cdots)=(\alpha_{12}\chi_E, 0, \cdots)=0,$$

因此，$\mu_2(E)=0$。这表明

$$\nu_2\succ\mu_2\succ\mu_3\succ\cdots. \tag{3}$$

依 (1)，对任意的 k，

$$\int|\alpha_{1k}(t)f_k(t)|^2d\nu_1(t)\leqslant\int|f_k(t)|^2d\mu_k(t), \ \forall f_k\in\mathscr{H}_k. \tag{4}$$

设 E 是 Ω 的 Borel 子集，使得 $\nu_2(E)=0$，依(3)，则 $\mu_k(E)=0$，$\forall k\geqslant 2$。在 (4) 中命 $f_k=\chi_E$，则 $\int_E|\alpha_{1k}(t)|^2d\nu_1(t)=0$，$\forall k\geqslant 2$。这说明 $|\alpha_{1k}|^2\cdot\nu_1\prec\nu_2$，$\forall k\geqslant 2$。依定理 5.1.4，有 Ω 上的非负可测函数 β_k，使得

$$|\alpha_{1k}|^2\cdot\nu_1=\beta_k\cdot\nu_2, \ \forall k\geqslant 2. \tag{5}$$

今定义 v: $\mathscr{H}\ominus\mathscr{H}_1\to\mathscr{K}\ominus\mathscr{K}_1$，

$$v(0, \cdots, f_k, 0, \cdots)=(0, (\beta_k+|\alpha_{2k}|^2)^{\frac{1}{2}}f_k, \alpha_{3k}f_k, \cdots),$$

$\forall f_k\in\mathscr{H}_k$，$k\geqslant 2$。依 β_k 的定义 (5) 及 (1)，v 是等距的。自然也有

$$v\Phi_{\mathscr{H}\ominus\mathscr{H}_1}(a)=\Phi_{\mathscr{K}\ominus\mathscr{K}_1}(a)v, \ \forall a\in A.$$

在 $\mathscr{H}\ominus\mathscr{H}_1$ 中，$\mu_2\succ\mu_3\succ\cdots$，在 $\mathscr{K}\ominus\mathscr{K}_1$ 中，$\nu_3\succ\nu_4\succ\cdots$，

同上可证 $\nu_3 > \mu_3$，及 ν_2, ν_3 之间有类似(5)的关系。

继续这过程，即可得证。

引理 5.4.9 设 u 是 $\mathscr{H} = \sum_k \oplus L^2(\Omega, \mu_k)$ 到

$$\mathscr{K} = \sum_k \oplus L^2(\Omega, \nu_k)$$

中的等距算子，并且

$$u\Phi_{\mathscr{H}}(a) = \Phi_{\mathscr{K}}(a)u, \ \forall a \in A,$$

又设 $i \geqslant 2$，及 $\mu_1 \succ \mu_2 \succ \cdots$，$\nu_i \succ \nu_{i+1} \succ \cdots$，则 $\nu_k \succ \mu_k$，$\forall k \geqslant i$.

证。当 $i = 2$，即为引理 5.4.8。今归纳设命题对 $(i-1)$ 成立 $(i > 2)$.

$\sum_{k \geqslant i-1} \oplus L^2(\Omega, \nu_k)$ 是表示 $\Phi_{\mathscr{K}}$ 的不变子空间，依引理 5.4.6 及定理 5.4.1，有 Ω 上的正则 Borel 测度列

$$r_{i-1} \succ r_i \succ \cdots,$$

使得 A 的 $*$ 表示 $\{\mathscr{K}', \Phi_{\mathscr{K}'}\} \cong \{\mathscr{L}, \Phi_{\mathscr{L}}\}$，其中

$$\mathscr{K}' = \sum_{k \geqslant i-1} \oplus L^2(\Omega, \nu_k),$$

$$\mathscr{L} = \sum_{k \geqslant i-1} \oplus L^2(\Omega, r_k).$$

依引理 5.4.8，$\nu_k \succ r_k$，$\forall k \geqslant i$. 再把归纳假设用于 $\mathscr{H}$ 与

$$\sum_{k=1}^{i-2} \oplus L^2(\Omega, \nu_k) \oplus \mathscr{L},$$

可见 $r_k \succ \mu_k$，$\forall k \geqslant i-1$. 因此，$\nu_k \succ \mu_k$，$\forall k \geqslant i$. 证毕。

引理 5.4.10 设 u 是 $\mathscr{H} = \sum_k \oplus L^2(\Omega, \mu_k)$ 到

$$\mathscr{K} = \sum_k \oplus L^2(\Omega, \nu_k)$$

上的酉算子，使得 $u\Phi_{\mathscr{H}}(a)u^{-1} = \Phi_{\mathscr{K}}(a)$，$\forall a \in A$. 如果 $\mu_1 \succ \mu_2 \succ \cdots$，$\nu_1 \succ \nu_2 \succ \cdots$，则 $\nu_k \sim \mu_k$，$\forall k \geqslant 1$.

证。命 $\xi = u(1, 0, \cdots)$，则对任意的 $a \in A$，

$$\int a(t)d\mu_1(t) = \langle \Phi_{\mathscr{K}}(a)(1,0,\cdots),(1,0,\cdots)\rangle$$
$$= \langle \Phi_{\mathscr{K}}(a)\xi,\xi\rangle = \int a(t)d\nu_\xi(t),$$

这里 ν_ξ 为 $\mathscr{K}$ 的矢 ξ 所决定的测度，因此，$\mu_1 = \nu_\xi$.

设 $\eta_k = (0,\cdots,1,0,\cdots)$ $(\in \mathscr{K})$，它决定的测度是 ν_k，$\forall k$. 若命 $\eta = \sum_k (\|\eta_k\| 2^{\frac{k}{2}})^{-1}\eta_k$，依引理 5.4.4，$\eta$ 是 $\mathscr{K}$ 的极大矢，因此，$\nu_\eta \succ \nu_\xi = \mu_1$. 又显然

$$\nu_\eta = \sum_k (\|\eta_k\|^2 2^k)^{-1}\nu_k,$$

因此，$\nu_1 \sim \nu_\eta$，$\nu_1 \succ \mu_1$. 依引理 5.4.9，自然有 $\nu_k \succ \mu_k$，$\forall k \geqslant 2$. 从而 $\nu_k \succ \mu_k$，$\forall k \geqslant 1$.

u 是酉算子，同样也有 $\mu_k \succ \nu_k$，$\forall k \geqslant 1$. 证毕.

定理 5.4.11 设 A 是有单位元的交换 c^*-代数，Ω 是它的谱空间，$\{\pi, \mathscr{H}\}$ 是 A 的非退化 $*$ 表示，并且 $\pi(A)'$ 是 σ-有限的，则在测度等价的意义下，有 Ω 上唯一的正则 Borel 测度列 $\mu_1 \succ \mu_2 \succ \cdots$，使得 A 的 $*$ 表示 $\{\pi, \mathscr{H}\} \cong \left\{\Phi, \sum_{k=1}^{\infty} \oplus L^2(\Omega, \mu_k)\right\}$，这里

$$\Phi(a)(f_1,\cdots,f_k,\cdots) = (af_1,\cdots,af_k,\cdots),\ f_k \in L^2(\Omega,\mu_k),$$
$$(af_k)(t) = a(t)f_k(t)\ \ (\forall t \in \Omega),\ \forall k,$$

且 $\sum_k \int |f_k(t)|^2 d\mu_k(t) < \infty$.

此外，对任意的 $k \geqslant 1$，测度 μ_k 等价于集合

$$\left\{\mu_\eta \,\middle|\, \eta \text{是} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \oplus \overline{\pi(A)\xi_j}\right)^{\perp} \text{的极大矢}, \forall \xi_1,\cdots,\xi_{k-1} \in \mathscr{H}\right\}$$

中的最小（依绝对连续性而言）测度.

本定理由引理 5.4.10，5.4.6，5.4.1 及 5.4.9 立见

注. 定理后面部份所叙述的 $\{\mu_k\}$ 的决定方式与熟知的 Courant 原理很为相似，即若 a 是 $\mathscr{H}$ 中的全连续非负算子，$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$ 是它的本征值列，则对任意的 k，

$$\lambda_k = \min_{\xi_1,\cdots,\xi_{k-1}\in\mathscr{H}} \max_{0\neq\eta\in[\xi_1,\cdots,\xi_{k-1}]^\perp} \frac{\langle a\eta, \eta\rangle}{\langle\eta, \eta\rangle}.$$

命题 5.4.12 在定理 5.4.11 的假定与符号之下，为了表示 π 是忠实的，当且仅当，$\operatorname{supp}\mu_1 = \Omega$.

证. 设 $\operatorname{supp}\mu_1 = \Omega$. 如果 $a\in A$，使得 $\Phi(a) = 0$，于是 $af = 0$，$\forall f\in L^2(\Omega, \mu_1)$. 特别取 $f = \bar{a}$，可见 $a(t) = 0$，$p.p.\mu_1$. 记 $U = \{t\in\Omega | a(t) \neq 0\}$ 是开集，且 $\mu_1(U) = 0$. 但 $\operatorname{supp}\mu_1 = \Omega$，因此，$U = \emptyset$，即 $a = 0$.

反之如果有非空集 U，使得 $\mu_1(U) = 0$，于是 $\mu_k(U) = 0$，$\forall k \geqslant 1$. 取 $a\in A$，而 $\operatorname{supp} a(\cdot)\subset U$，则 $\Phi(a) = 0$，即 π 不能是忠实的. 证毕.

定义 5.4.13 Ω 上的函数 $n(\cdot)$ 称为重数函数，指 $n(\cdot)$ 是 Ω 上的可测函数，并且取值为 $1, 2, \cdots, \infty$.

给定 Ω 上的正则 Borel 测度 μ 及重数函数 $n(\cdot)$，$A \cong C(\Omega)$ 的 * 表示 $\Phi_{\mu,n}$，指表示空间 $\mathscr{H} = \sum\limits_k \oplus \mathscr{H}_k$，这里

$$\mathscr{H}_k = L^2(\Omega, \mu_k),\quad \mu_k = \chi_{E_k}\cdot\mu,$$
$$E_k = \{t\in\Omega | n(t) \geqslant k\},\quad \forall k\geqslant 1,$$

并且

$$\Phi_{\mu,n}(a)(f_1, \cdots, f_k, \cdots) = (af_1, \cdots, af_k, \cdots),$$

$\forall a\in A$，$(f_1, \cdots, f_k, \cdots)\in\mathscr{H}$.

引理 5.4.14 设 μ 是 Ω 上的正则 Borel 测度，$0\leqslant\rho\in L^1(\Omega, \mu)$，$\nu = \rho\cdot\mu$，$E = \{t\in\Omega | \rho(t) > 0\}$，则 $\nu\sim\chi_E\cdot\mu$.

证. 设 F 是 Ω 的 Borel 子集，使得 $\nu(F) = 0$. 由于 $\nu(F) = \int_F \rho(t)d\mu(t)$，因此，$\rho(t) = 0$ $p.p.\mu$ 于 F，即有 Borel 子集 $F_1\subset F$，使得 $\rho(t) = 0$，$\forall t\in F\backslash F_1$，$\mu(F_1) = 0$. 于是，

$$(\chi_E\cdot\mu)(F) = \mu(E\cap F) = \mu(E\cap(F\backslash F_1)).$$

但在 E 上，$\rho(t) > 0$；而在 $(F\backslash F_1)$ 上，$\rho(t) = 0$，因此，

$$E\cap(F\backslash F_1) = \emptyset.$$

从而 $(\chi_E\cdot\mu)(F)=0$.

反之，设 $(\chi_E\cdot\mu)(F)=\mu(E\cap F)=0$，显然，在 $(F\backslash E)$ 上，$\rho(t)=0$，于是

$$v(F)=\int_F\rho(t)d\mu(t)=\int_{F\cap E}\rho(t)d\mu(t)=0.$$

证毕.

定理 5.4.15 设 A 是有单位元的交换 C^*-代数，Ω 是它的谱空间，$\{\pi,\mathscr{H}\}$ 是 A 的非退化 $*$ 表示，并且 $\pi(A)'$ 是 σ-有限的，则在测度的等价意义下，在 Ω 上有唯一的正则 Borel 测度 μ，及在 p.p.μ 的意义下，在 Ω 上有唯一的重数函数 $n(\cdot)$，使得 $*$ 表示 π 与 $\Phi_{\mu,n}$ 酉等价. 此外，π 是忠实的，当且仅当，$\operatorname{supp}\mu=\Omega$.

证. 取定理 5.4.11 的测度列 $\{\mu_k\}$. 依定理 5.1.4，有

$$0\leqslant\rho_k\in L^1(\Omega,\mu),$$

使得 $\mu_k=\rho_k\cdot\mu$，$\forall k\geqslant1$，这里 $\mu=\mu_1$，$\rho_1=1$. 再令

$$E_k=\{t\in\Omega|\rho_k(t)>0\},$$

由于 $\mu_k\succ\mu_{k+1}$，无妨认为

$$\Omega=E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k\supset\cdots.$$

今命

$$n(t)=\begin{cases}k, & \text{如 } t\in E_k\backslash E_{k+1};\\ \infty, & \text{如 } t\in\bigcap\limits_k E_k.\end{cases}$$

显然 $n(\cdot)$ 是 Ω 上的重数函数，且 $E_k=\{t\in\Omega|n(t)\geqslant k\}$，$\forall k$. 依引理 5.4.14，$\mu_k\sim\chi_{E_k}\cdot\mu$，$\forall k$. 因此，$\pi$ 与 $\Phi_{\mu,n}$ 酉等价.

至于 μ 与 $n(\cdot)$ 的唯一性，依定理 5.4.11 的唯一性不难可见. 最后，依命题 5.4.12，π 是忠实的，当且仅当，

$$\Omega=\operatorname{supp}\mu_1=\operatorname{supp}\mu.$$

证毕.

注 本节见参考文献 [5]，[21]，[62].

第六章 von Neumann 代数的分类

本章的内容直接与 Murray-von Neumann 的维数理论有关。§1 提出有限投影等的概念，并利用交换投影，把 vN 代数分成有限的、半有限的、真无限的、纯无限的、离散的及连续的，或 (I), (II), (III) 型，及指出任意 vN 代数可表示成它们的直和(6.1.6, 6.1.8)。以下各节，分别研究各类 vN 代数的性质。特别对有限的(§3)，半有限的(§5)，及离散的(§7) vN 代数的探讨较为详细。例如指出有限 vN 代数上存在正规迹态的完全集(6.3.10)，并且有限 vN 代数有到它的中心上的重要映象——中心值的迹(6.3.13)；半有限 vN 代数的正部份上存在忠实的半有限正规迹(6.5.8)；(I) 型 vN 代数可分解为 (I_n) 型 vN 代数的直和(6.7.11)等。§9 讨论 vN 代数张量积的类型(6.9.12)。

§1. vN 代数的分类

定义 6.1.1 设M是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，M的投影 p 称为有限的，指若M的投影 $q \leqslant p$，并且 $q \sim p$，则 $q = p$。M的投影 p 称为无限的，指它不是有限的，即存在M的投影 $q \lneqq p$，并且 $q \sim p$。M的投影 p 称为纯无限的，指它不包含任何非零的有限投影，即若M的非零投影 $q \leqslant p$，则 q 必是无限的。

M 称为有限的，无限的，纯无限的，分别指它的单位元是有限的，无限的，纯无限的投影。

命题 6.1.2 在 vN 代数M中，存在最大的有限中心投影 z_1。

证。记 $z_1 = \sup\{z \mid z$ 是M的有限中心投影$\}$，只须证明 z_1 是有限的。设M的投影 $p \leqslant z_1$，且 $p \sim z_1$，又若 z 是 M 的任意有限中心投影，于是，$z = zz_1 \sim zp \leqslant z$，所以，$pz = z$，即 $p \geqslant z$。

从而 $z_1 = p$，因此，z_1 是有限的．证毕．

命题 6.1.3 设 p，q 是 vN 代数 M 的投影，并且 $p \geq q$ 及 p 是有限的，则 q 也是有限的．

证．设有M的部分等距元 v，使得 $v^*v = q$，$vv^* = q_1 \leqslant q$．令 $u = v + (p - q)$，则 $u^*u = p$，$uu^* = (p - q) + q_1 \leqslant p$．但 p 是有限的，因此，$(p - q) + q_1 = p$，即 $q_1 = q$，从而，q 也是有限的．证毕．

命题 6.1.4 在 vN 代数M中，存在最大的纯无限中心投影 z_3．

证．命 $z_3 = \sup\{z | z$ 是 M 的纯无限中心投影$\}$，只须证明 z_3 是纯无限的．设 p 是 M 的有限投影，并且 $p \leqslant z_3$，而 z 是任意的纯无限中心投影．依命题 6.1.3，pz 也是有限的，但 $pz \leqslant z$，因此，$pz = 0$．从而，$p = pz_3 = 0$．证毕．

定义 6.1.5 vN 代数 M 称为半有限的，指 $z_3 = 0$，即任何中心投影都不能是纯无限的．M 称为真无限的，指 $z_1 = 0$，即任何非零中心投影都是无限的．

M 的投影 p 称为半有限或真无限的，指 vN 代数 M_p 是半有限或真无限的．

定理 6.1.6 任何 vN 代数 M 可唯一分解为

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3,$$

其中 $M_1 = Mz_1$ 是有限的 vN 代数，$M_3 = Mz_3$ 是纯无限的 vN 代数，$M_2 = Mz_2$ 是半有限且真无限的 vN 代数，$z_1 + z_2 + z_3 = 1$．

证．由命题 6.1.2 及 6.1.4，可见能够这样分解．今若 $M = Mp_1 \oplus Mp_2 \oplus Mp_3$ 是这样的另一个分解，自然 $p_1 \leqslant z_1$，$p_3 \leqslant z_3$．中心投影 $(z_1 - p_1)p_i$ 应该是有限的，$i = 2, 3$，但依 Mp_2，Mp_3 的性质，必然有 $(z_1 - p_1)p_i = 0$，$i = 2, 3$．因此，$z_1 = p_1$．同样，中心投影 $(z_3 - p_3)p_i$ 如非零，则必纯无限，$i = 1, 2$，但 Mp_1，Mp_2 不包含纯无限中心投影，因此，$(z_3 - p_3)p_i = 0$，$i = 1, 2$．因此，$z_3 = p_3$．证毕．

定义 6.1.7 vN 代数 M 称为离散的，指 M 的每个非零中心投

影都包含非零的交换投影. M 称为连续的，指 M 不包含任何非零的交换投影.

离散的 vN 代数也称为 (I) 型的；纯无限的 vN 代数也称为 (III) 型的；半有限且连续的 vN 代数称为 (II) 型的；有限的 (II) 型 vN 代数也称为 (II_1) 型的；真无限的 (II) 型 vN 代数又称为 (II_∞) 型的.

离散的概念与连续的概念显然相互排斥，因此，(I) 型与 (II) 型的概念互不相容. 半有限与纯无限相互排斥，因此，(II) 型与 (III) 型的概念互不相容. 容易证明交换投影必是有限的，因此，(I) 型 vN 代数必是半有限的. 从而，(I) 型与 (III) 型的概念也互不相容.

定理 6.1.8 任何 vN 代数 M 可唯一分解成

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3,$$

其中 $M_i = Mz_i$, $i = 1, 2, 3$ 分别是 (I), (II), (III) 型的 vN 代数，且 $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

证. 依命题 6.1.4，M 有最大的纯无限中心投影 z_3，于是，$M_3 = Mz_3$ 是 (III) 型的.

记 $z_1 = \sup\{z \mid z$ 是 M 的中心投影，使得 Mz 是(I)型的$\}$. 如果 p 是 M 的非零中心投影，并且 $p \leqslant z_1$，于是必有 M 的中心投影 z，使得 Mz 是 (I) 型的，并且 $pz \neq 0$. 由此，pz 是 (I) 型 vN 代数 Mz 的非零中心投影，所以有 Mz 的非零交换投影 $q \leqslant pz \leqslant p$. q 当然也是 Mz_1 的交换投影，因此，$M_1 = Mz_1$ 是 (I) 型的.

由于交换投影是有限的，因此，$z_1 z_3 = 0$.

令 $z_2 = 1 - z_1 - z_3$，自然 $M_2 = Mz_2$ 是半有限的. 如果 p 是 M_2 的非零交换投影，于是 $c(p) \leqslant z_2$. 我们说 $Mc(p)$是 (I) 型的. 事实上，设 z 是 $Mc(p)$ 的非零中心投影，依命题 1.5.8，$zp \neq 0$. 注意 $(pMp)z = zp(Mc(p))zp$，因此，z 包含非零交换投影 zp. 从而，$Mc(p)$是 (I) 型的. 今依 z_1 的定义，$c(p) \leqslant z_1$. 这与 $c(p) \leqslant z_2$ 相矛盾. 因此，M_2 不包含任何非零的交换投影，即 M_2 是 (II) 型的.

此外，由于 z_1，z_3 的极大性，仿定理 6.1.6 的证明，可见分解为 (I)，(II)，(III) 型的直和是唯一的。证毕。

定理 6.1.9 任何 vN 代数可唯一分解为

$$M = M_{11} \oplus M_{12} \oplus M_{21} \oplus M_{22} \oplus M_3,$$

其中 M_{11} 是有限 (I) 型的，M_{12} 是真无限 (I) 型（也必是半有限），M_{21} 是 (II_1) 型的，M_{22} 是 (II_∞) 型的(也必是半有限)，M_3 是 (III) 型的。特别地，因子只呈上面所说的五种形态。

注 本节见参考文献 [15]，[21]，[55]，[74]。

§2. vN 代数的遍历型定理

设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间，$h^* = h \in B(\mathscr{H})$，$p$ 是 $\mathscr{H}$ 中的投影，并且 $ph = hp$，命

$$M_p(h) = \sup\{\langle h\xi, \xi\rangle \mid \xi \in p\mathscr{H}, \|\xi\| = 1\},$$
$$m_p(h) = \inf\{\langle h\xi, \xi\rangle \mid \xi \in p\mathscr{H}, \|\xi\| = 1\},$$
$$\omega_p(h) = M_p(h) - m_p(h),$$

即 $M_p(h)$，$m_p(h)$ 分别是 h 限于 $p\mathscr{H}$ 时的最大，最小谱点。如果 $p = 1$，$M_1(h)$，$m_1(h)$，$\omega_1(h)$ 分别简记为 $M(h)$，$m(h)$，$\omega(h)$。如果 $\mathscr{F}$ 是一族与 h 相交换的投影，记

$$\omega_{\mathscr{F}}(h) = \sup\{\omega_p(h) \mid p \in \mathscr{F}\}.$$

引理 6.2.1 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，$Z = M \cap M'$，$h^* = h \in M$，则存在投影 $z \in Z$ 及自伴酉元 $u \in M$，使得

$$\max\left\{\omega_z\left(\frac{1}{2}(h + uhu^{-1})\right),\right.$$
$$\left.\omega_{1-z}\left(\frac{1}{2}(h + uhu^{-1})\right)\right\} \leqslant \frac{3}{4}\,\omega(h).$$

证. 记 $n(h) = \frac{1}{2}(M(h) + m(h))$，谱分解 $h = \int \lambda de_\lambda$。自然 $e = e_{n(h)}$，$f = 1 - e$ 都是 M 的投影，并且 $M_e(h) \leqslant n(h)$，$m_f(h) \geqslant n(h)$。对 e，f 使用定理 1.5.4，有 M 的中心投影 z，使得

$$ez \lesssim fz,\ fz' \lesssim ez',$$

这里 $z' = 1 - z$。因此有 M 的部分等距元 v, w, 使得

$$v^*v = ez,\ vv^* = f_1 \leqslant fz,\ w^*w = fz',$$
$$ww^* = e_1 \leqslant ez'.$$

令 $u = v + v^* + w + w^* + (1 - ez - f_1 - fz' - e_1)$, 由于

$$\mathscr{H} = (ez\mathscr{H} \oplus f_1\mathscr{H}) \oplus (fz - f_1)\mathscr{H}$$
$$\oplus (fz'\mathscr{H} \oplus e_1\mathscr{H}) \oplus (ez' - e_1)\mathscr{H},$$

可见 u 是 M 的自伴酉元。今证明 u, z 满足要求。

由于

$$hz \geqslant m(h)ez + n(h)fz$$
$$= m(h)ez + n(h)f_1 + n(h)(fz - f_1),$$

依 u 的定义,

$$(uhu^{-1})z \geqslant m(h)f_1 + n(h)ez + n(h)(fz - f_1)$$

因此,

$$\frac{1}{2}(h + uhu^{-1})z \geqslant \frac{1}{2}(m(h) + n(h))(f_1 + ez)$$
$$+ n(h)(fz - f_1) \geqslant \frac{1}{2}(m(h) + n(h))z.$$

注意

$$M(h) - \frac{3}{4}\omega(h) = \frac{1}{4}M(h) + \frac{3}{4}m(h)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{m(h) + \frac{1}{2}(M(h) + m(h))\right\}$$
$$= \frac{1}{2}(m(h) + n(h)).$$

从而

$$M(h)z \geqslant \frac{1}{2}(h + uhu^{-1})z$$
$$\geqslant \left(M(h) - \frac{3}{4}\omega(h)\right)z,$$

即有

$$\omega_z\left(\frac{1}{2}(h+uhu^{-1})\right)\leqslant\frac{3}{4}\omega(h).$$

同样

$$hz'\leqslant n(h)ez'+M(h)fz'$$
$$=n(h)e_1+M(h)fz'+n(h)(ez'-e_1),$$
$$(uhu^{-1})z'\leqslant n(h)fz'+M(h)e_1+n(h)(ez'-e_1).$$

所以,

$$m(h)z'\leqslant\frac{1}{2}(h+uhu^{-1})z'$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(n(h)+M(h))(fz'+e_1)$$
$$+n(h)(ez'-e_1)\leqslant\frac{1}{2}(n(h)$$
$$+M(h))z'=\left(m(h)+\frac{3}{4}\omega(h)\right)z'.$$

从而,

$$\omega_{1-z}\left(\frac{1}{2}(h+uhu^{-1})\right)\leqslant\frac{3}{4}\omega(h).$$

证毕.

引理 6.2.2 设 h 是 vN 代数 M 的自伴元, $\mathscr{F}$ 是 $Z=M\cap M'$ 的相互直交、和为 1 的投影有限族, 则有 Z 的另一个相互直交、和为 1 的投影有限族 $\mathscr{F}'$ 及 M 的自伴酉元 u, 使得

$$\omega_{\mathscr{F}'}\left(\frac{1}{2}(h+uhu^{-1})\right)\leqslant\frac{3}{4}\omega_{\mathscr{F}}(h).$$

证. 设 $\mathscr{F}=\{z_1,\cdots,z_n\}(\subset Z)$, $z_iz_j=0$, $\forall i\neq j$,

$$\sum_{i=1}^{n}z_i=1.$$

对每个 i, 在 $M_i=Mz_i$ 中,对 $h_i=hz_i$ 使用引理 6.2.1, 于是有 M_i 的中心投影 c_{i1}, $c_{i2}=z_i-c_{i1}$, 及 M_i 的自伴酉元 u_i, 使得

$$\omega_{c_{ij}}\left(\frac{1}{2}(h_i+u_ih_iu_i^*)\right)\leqslant\frac{3}{4}\omega_{z_i}(h),\ j=1,2.$$

令 $u=\sum_{i=1}^{n}u_i$，它是 M 的自伴酉元，并且

$$\omega_{c_{ij}}\left(\frac{1}{2}(h+uhu^{-1})\right)\leqslant\frac{3}{4}\omega_{z_i}(h)$$

$$\leqslant\frac{3}{4}\omega_{\mathscr{F}}(h),\ \forall i,j$$

再命 $\mathscr{F}'=\{c_{ij}|1\leqslant i\leqslant n,\ j=1,2\}$，即有

$$\omega_{\mathscr{F}'}\left(\frac{1}{2}(h+uhu^{-1})\right)\leqslant\frac{3}{4}\omega_{\mathscr{F}}(h).$$

证毕.

定义 6.2.3 设 M 是 vN 代数，G 是 M 的酉元全体，记 $\mathfrak{C}$ 为 G 上这样的非负函数 f 的全体，除去有限个点外，f 恒取值 0，并且 $\sum_{u\in G}f(u)=1$.

对 $f\in\mathfrak{C}$ 及 $a\in M$，记 $f\cdot a=\sum_{u\in G}f(u)uau^{-1}$.

对 $f,g\in\mathfrak{C}$，定义 $(f*g)(\cdot)=\sum_{u\in G}f(u)g(u^{-1}\cdot)$，易见 $f*g$ 仍然 $\in\mathfrak{C}$，并且对任何的 $a\in M$，$(f*g)\cdot a=f\cdot(g\cdot a)$.

引理 6.2.4 设 $h^*=h\in M$，$\varepsilon>0$，则有

$$f\in\mathfrak{C},\ 及\ z\in Z=M\cap M',$$

使得 $\|f\cdot h-z\|<\varepsilon$.

证．依引理 6.2.1，有 M 的中心投影 z，及 $f_1\in\mathfrak{C}$，使得

$$\omega_{\mathscr{F}_1}(f_1\cdot h)\leqslant\frac{3}{4}\omega(h),$$

这里 $\mathscr{F}_1=\{z,1-z\}$. 今归纳假设：对 j，有 Z 的相互直交、和为 1 的投影有限族 $\mathscr{F}_j$，及 $f_j\in\mathfrak{C}$，使得

$$\omega_{\mathscr{F}_j}(f_j\cdot h)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^j\omega(h).$$

对 $f_j\cdot h$ 及 $\mathscr{F}_j$ 使用引理 6.2.2，则又有 Z 的相互直交、和为 1 的投影有限族 $\mathscr{F}_{j+1}$，及 $g\in\mathfrak{C}$，使得

$$\omega_{\mathscr{F}_{j+1}}(g\cdot(f_j\cdot h))\leqslant\frac{3}{4}\omega_{\mathscr{F}_j}(f_j\cdot h)$$

$$\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{j+1}\omega(h),$$

因此，对于任何正整数 k，都有 Z 的相互直交、和为 1 的投影有限族 $\mathscr{F}_k$ 及 $f_k\in\mathfrak{C}$，使得

$$\omega_{\mathscr{F}_k}(f_k\cdot h)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^k\omega(h).$$

今取 k 充分大，使得 $\left(\frac{3}{4}\right)^k\omega(h)<\varepsilon$. 对任意的 $c\in\mathscr{F}_k$，令 $\lambda_c=\|(f_k\cdot h)|c\mathscr{H}\|$，则 $\|(f_k\cdot h)c-\lambda_c c\|\leqslant\omega_c(f_k\cdot h)$。于是，取 $f=f_k$，$z=\sum\limits_{c\in\mathscr{F}_k}\lambda_c c$，则

$$\|f\cdot h-z\|=\max_{c\in\mathscr{F}_k}\|(f\cdot h)c-\lambda_c c\|$$

$$\leqslant\omega_{\mathscr{F}_k}(f_k\cdot h)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^k\omega(h)<\varepsilon.$$

证毕。

引理 6.2.5 设 $\{a_1,\cdots,a_n\}\subset M$，$\varepsilon>0$，则有

$$f\in\mathfrak{C},\ 及\ \{z_1,\cdots,z_n\}\subset Z,$$

使得 $\|f\cdot a_k-z_k\|<\varepsilon$，$1\leqslant k\leqslant n$。

证。无妨设诸 a_k 是自伴的，当 $n=1$ 时，即为引理 6.2.4. 归纳设对 n 已成立。

今对于 $a_1,\cdots,a_{n+1}\in M$，先取 $z_1,\cdots,z_n\in Z$，及 $f\in\mathfrak{C}$，使得 $\|f\cdot a_k-z_k\|<\varepsilon$，$1\leqslant k\leqslant n$。对元 $f\cdot a_{n+1}$，依引理 6.2.4，又有 $g\in\mathfrak{C}$，及 $z_{n+1}\in Z$，使得 $\|g\cdot(f\cdot a_{n+1})-z_{n+1}\|<\varepsilon$. 但当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，由于 $z_k\in Z$，

$$\|g\cdot(f\cdot a_k)-z_k\|=\|g\cdot(f\cdot a_k-z_k)\|$$

$$\leqslant\|f\cdot a_k-z_k\|<\varepsilon.$$

所以，$\|(g*f)\cdot a_k-z_k\|<\varepsilon$，$1\leqslant k\leqslant n+1$. 证毕。

引理 6.2.6 设 $\{a_k\}\subset M$，则有 $\{z_k\}\subset Z$，及 $\{f_n\}\subset\mathfrak{C}$，使得 $\|f_n\cdot a_k-z_k\|\to 0$，$\forall k$。

证. 依引理 6.2.5, 对 a_1, 可取 $g_1 \in \mathfrak{C}$ 及 $z_{11} \in Z$, 使得

$$\|g_1 \cdot a_1 - z_{11}\| < \frac{1}{2}.$$

对 $g_1 \cdot a_1$, $g_1 \cdot a_2$, 又可取 $g_2 \in \mathfrak{C}$, 及 z_{12}, $z_{22} \in Z$, 使得

$$\|(g_2 * g_1) \cdot a_k - z_{k2}\| < \frac{1}{2^2}, \quad k = 1, 2, \quad \cdots,$$

一般有 $g_1, \cdots, g_n \in \mathfrak{C}$, $z_{kn} \in Z$, 使得

$$\|(g_n * \cdots * g_1) \cdot a_k - z_{kn}\| < \frac{1}{2^n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

令 $f_n = g_n * \cdots * g_1$, 由于 $z_{kn} \in Z$, 因此对 $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{aligned}\|f_{n+1} \cdot a_k - z_{kn}\| &= \|g_{n+1} \cdot (f_n \cdot a_k - z_{kn})\| \\ &\leqslant \|f_n \cdot a_k - z_{kn}\| < \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

从而, $\|f_{n+1} \cdot a_k - f_n \cdot a_k\| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. 这表明对每个 k, $\{f_n \cdot a_k\}$ 是 Cauchy 列,进而 $\{z_{kn}\}$ 也是 Cauchy 列. 设 $z_{kn} \to z_k (\in Z)$, 则 $\|f_n \cdot a_k - z_k\| \to 0$, $\forall k$. 证毕.

定理 6.2.7 设 M 是 vN 代数, $Z = M \cap M'$, $a \in M$, 记

$$K(a) = \overline{\{f \cdot a \mid f \in \mathfrak{C}\}} \cap Z,$$

这里 $\overline{\{\cdots\}}$ 表示 $\{\cdots\}$ 依范数的闭包,则 $K(a) \neq \varnothing$.

证. 依引理 6.2.6, 对 a, 有 $z \in Z$ 及 $\{f_n\} \subset \mathfrak{C}$, 使得

$$\|f_n \cdot a - z\| \to 0.$$

因此, $K(a) \neq \varnothing$. 证毕.

命题 6.2.8 沿用定理 6.2.7 的记号,则:

1) $K(a_1 + a_2) \subset \overline{K(a_1) + K(a_2)}$, $\forall a_1, a_2 \in M$;

2) $K(za) \subset \overline{zK(a)}$, $\forall a \in M$, $z \in Z$.

证. 1) 设 $z \in K(a_1 + a_2)$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $f \in \mathfrak{C}$, 使得 $\|f \cdot (a_1 + a_2) - z\| < \varepsilon$. 对 $\{f \cdot a_1, f \cdot a_2\}$ 使用引理 6.2.6, 则有 $g \in \mathfrak{C}$, 及 $z_i \in K(f \cdot a_i) \subset K(a_i)$, 使得

$$\|g \cdot (f \cdot a_i) - z_i\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2,$$

但 $\|g \cdot (f \cdot (a_1 + a_2)) - z\| \leqslant \|f \cdot (a_1 + a_2) - z\| < \varepsilon$, 因此,

$\|z-(z_1+z_2)\|<3\varepsilon$. 即说明 $K(a_1+a_2)\subset\overline{K(a_1)+K(a_2)}$.

2) 设 $c\in K(za)$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 有 $f\in\mathfrak{C}$, 使得

$$\|f\cdot(za)-c\|<\varepsilon.$$

对 $f\cdot a$, 依定理 6.2.7, 有 $g\in\mathfrak{C}$, 及 $c_1\in K(f\cdot a)\subset K(a)$, 使得 $\|g\cdot(f\cdot a)-c_1\|<\varepsilon$. 于是,

$$\begin{aligned}\|zc_1-c\|&\leqslant\|z((g*f)\cdot a)-c_1\|\\&\quad+\|z((g*f)\cdot a)-zc_1\|\\&\leqslant\|g\cdot(f\cdot(za)-c)\|+\|z\|\\&\quad\cdot\|g\cdot(f\cdot a)-c_1\|<\varepsilon(1+\|z\|).\end{aligned}$$

即说明 $K(za)\subset\overline{zK(a)}$. 证毕.

注 本节见参考文献 [12],[21].

§3. 有限的 vN 代数

命题 6.3.1 1) vN 代数 M 是有限的,当且仅当,如果 $v\in M$, 并且 $v^*v=1$, 则 $vv^*=1$; 2) 设 M 是有限的 vN 代数, p, p' 分别是 M, M' 的投影,则 M_p, $M_{p'}$ 都是有限的; 3) 如果 $M=\sum\limits_l\oplus M_l$, 则 M 是有限的,当且仅当, M_l 是有限的, $\forall l$.

证. 1) 由 vv^* 也是投影立见.

2) 依命题 6.1.3, p 是有限投影, 因此, M_p 是有限的. 今设 $c(p')$ 是 p' 在 M' 中的中心覆盖,于是 $M_{p'}$ 与 $Mc(p')*$ 同构. 当然 $Mc(p')$ 是有限的,因此 $M_{p'}$ 也是有限的.

3) 必要性由 2) 立见. 反之设 M_l 是有限的,及 $M_l=Mz_l$, $\forall l$. 如果 p 是 M 的投影,且 $p\sim1$, 于是 $pz_l\sim z_l$, $\forall l$. 但 z_l 是有限的, 因此, $pz_l=z_l$, $\forall l$, 所以, $p=1$, 即 M 是有限的. 证毕.

命题 6.3.2 设 M 是有限的 vN 代数, M 的投影 $p_i\sim q_i$, $i=1,2$, 并且 $p_1\leqslant p_2$, $q_1\leqslant q_2$, 则

$$(p_2-p_1)\sim(q_2-q_1).$$

证. 依定理 1.5.4, 有 M 的中心投影 z, 使得

$$(p_2 - p_1)z \lesssim (q_2 - q_1)z,$$
$$(q_2 - q_1)(1 - z) \lesssim (p_2 - p_1)(1 - z),$$
如果 $(p_2 - p_1)z \sim q \lneq (q_2 - q_1)z$，则
$$p_2 z = (p_1 z + (p_2 - p_1)z) \sim (q_1 z + q) \lneq q_2 z,$$
但 $p_2 z \sim q_2 z$，因此，$q_2 z \sim (q_1 z + q) \lneq q_2 z$，这与 $q_2 z$ 是有限投影相矛盾．所以，$(p_2 - p_1)z \sim (q_2 - q_1)z$．同证
$$(p_2 - p_1)(1 - z) \sim (q_2 - q_1)(1 - z),$$
因此，$(p_2 - p_1) \sim (q_2 - q_1)$．证毕．

下面，对有限的 vN 代数 M 及其任意元 a，我们来证明 $K(a)$（其定义见定理 6.2.7）只包含一个元．为此，需要作一些准备工作．

定义 6.3.3 vN 代数 M 上的正泛函 φ 称为迹的，指
$$\varphi(a^*a) = \varphi(aa^*),\ \forall a \in M.$$

这时对任意的 $a \in M_+$ 及 M 的酉元 u，
$$\varphi(a) = \varphi((ua^{\frac{1}{2}})^* \cdot (ua^{\frac{1}{2}})) = \varphi(uau^*).$$
因此，$\varphi(ab) = \varphi(ba)$，$\forall a, b \in M$．

引理 6.3.4 设 φ 是 M 上的正泛函，且有正常数 K，使得对 M 的任意等价的投影 p，q，有 $\varphi(p) \leqslant K\varphi(q)$，则
$$\varphi(a^*a) \leqslant K\varphi(aa^*),\ \forall a \in M.$$

证．设 $a \in M$，且 $\|a\| \leqslant 1$，谱分解
$$a^*a = \int_0^1 \lambda de_\lambda = \lim_n \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} p_i^{(n)},$$
这里 $p_i^{(n)} = e_{\frac{i}{n}} - e_{\frac{i-1}{n}}$，$1 \leqslant i \leqslant n$．如果 $a = uh$ 是 a 的极分解，则 $p_i^{(n)} \leqslant u^*u$，$\forall n, i$．由于
$$aa^* = ua^*au^* = \lim_n \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} up_i^{(n)}u^*$$
以及 $(up_i^{(n)})^*(up_i^{(n)}) = p_i^{(n)}$，$(up_i^{(n)})(up_i^{(n)})^* = up_i^{(n)}u^*$，于是
$$\varphi(a^*a) = \lim_n \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \varphi(p_i^{(n)})$$

$$\leqslant K \lim_{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \varphi(u p_i^{(n)} u^*)$$

$$= K\varphi(aa^*).$$

证毕。

系 6.3.5 设 φ 是 M 上的正泛函，则 φ 是迹的，当且仅当，对 M 的任意等价的投影 p, q，有 $\varphi(p) = \varphi(q)$。

引理 6.3.6 设 M 是有限的 vN 代数，p 是 M 的非零投影，n 是正整数，则存在 M 的非零投影 p_0，及 $M_0 = M_{p_0}$ 上忠实的正规态 φ_0，使得

$$p_0 \leqslant p, \quad \varphi_0(a^*a) \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\varphi_0(aa^*), \quad \forall a \in M_0.$$

证. 任意取 M_p 上的正规态 ϕ，命 $\varphi(x) = \phi(pxp)$，$\forall x \in M$，则 φ 是 M 上的正规态，并且其支持 $s(\varphi) \leqslant p$. 用 $s(\varphi)$ 代替 p 考虑问题，可以认为 $s(\varphi) = p$，即 M_p 上有忠实的正规态 φ。

如果对于 M_p 的任意等价投影 q_1, q_2，有 $\varphi(q_1) = \varphi(q_2)$，依系 6.3.5，取 $\varphi_0 = \varphi$，$p_0 = p$，即满足要求. 若否，依 Zorn 辅理，在 M_p 中存在相互直交的投影极大族 $\{e_l\}$，$\{f_l\}$，使得

$$e_l \sim f_l, \quad \varphi(e_l) > \varphi(f_l), \quad \forall l.$$

记 $e_1 = \sum_l e_l$，$f_1 = \sum_l f_l$，则 $\varphi(e_1) > \varphi(f_1)$，特别地，$f_1 \lneqq p$. 由于 $e_1 \sim f_1$，依命题 6.3.2，$(p - e_1) \sim (p - f_1)$，因此，$e_1 \lneqq p$. 由于族 $\{e_l\}$，$\{f_l\}$ 的极大性，对任意的等价投影 e, f，如果

$$e \leqslant p - e_1, \quad f \leqslant p - f_1,$$

则 $\varphi(e) \leqslant \varphi(f)$. 命

$$\mu_0 = \inf\left\{\mu \,\middle|\, \begin{array}{l} \mu > 0, \text{对任意等价的投影 } e, f, \text{并且} \\ e \leqslant p - e_1, \ f \leqslant p - f_1, \ \text{有 } \varphi(e) \leqslant \mu\varphi(f) \end{array}\right\},$$

显然 $\mu_0 \leqslant 1$. 我们说 $0 < \varphi(p - e_1) \leqslant \mu_0$. 事实上，如果 $\varphi(p - e_1) > \mu_0$，则有 μ，$\mu_0 \leqslant \mu < \varphi(p - e_1)$，使得对于任何等价的投影 e, f，并且 $e \leqslant p - e_1$，$f \leqslant p - f_1$，有 $\varphi(e) \leqslant \mu\varphi(f)$. 特别，$\varphi(p - e_1) \leqslant \mu\varphi(p - f_1) < \varphi(p - e_1)\varphi(p - f_1)$. 但显然 $\varphi(p -$

$f_1) < 1$，矛盾．因此，$0 < \varphi(p - e_1) \leqslant \mu_0$．

现在取 $\varepsilon > 0$，使得 $0 < (\mu_0 - \varepsilon)^{-1}\mu_0 \leqslant 1 + \frac{1}{n}$．依照 μ_0 的定义，必存在等价的投影 e_2，f_2，并且 $e_2 \leqslant p - e_1$，$f_2 \leqslant p - f_1$，使得 $\varphi(e_2) > (\mu_0 - \varepsilon)\varphi(f_2)$．自然 e_2，f_2 均非零．今我们指出，存在等价的非零投影 e_3，f_3，$e_3 \leqslant e_2$，$f_3 \leqslant f_2$，使得对任何等价的投影 e，f，并且 $e \leqslant e_3$，$f \leqslant f_3$，有 $\varphi(e) \geqslant (\mu_0 - \varepsilon)\varphi(f)$．事实上，如果这样的 e_3，f_3 不存在，特别 e_2，f_2 不能是这样的 e_3，f_3，因此有等价的投影 e，f，$e \leqslant e_2$，$f \leqslant f_2$，而 $\varphi(e) < (\mu_0 - \varepsilon)\varphi(f)$．继而 $e_2 - e$，$f_2 - f$ 也不能是这样的 e_3，f_3，又有…，依 Zorn 辅理，可写 $e_2 = \sum_l \oplus e_l$，$f_2 = \sum_l \oplus f_l$，$e_l \sim f_l$，并且

$$\varphi(e_l) < (\mu_0 - \varepsilon)\varphi(f_l),\ \forall l.$$

由于 φ 是正规的，因此，$\varphi(e_2) < (\mu_0 - \varepsilon)\varphi(f_2)$，这与 e_2，f_2 的性质相矛盾．所以，所要求的 e_3，f_3 必存在．

设 $v \in M_p$，$v^*v = e_3$，$vv^* = f_3$，并命

$$\phi(x) = \varphi(v^*xv),\ \forall x \in f_3Mf_3,$$

由于 φ 在 M_p 上是忠实的，因此，$\phi(f_3) = \varphi(e_3) > 0$．如果 r，q 是 f_3Mf_3 的等价投影，由于 $(v^*q)^*(v^*q) = q$，因此在 M_p 中，$r \sim q \sim v^*qv$，并且 $v^*qv \leqslant e_3$．依 e_3，f_3 的性质及 μ_0 的定义，

$$(\mu_0 - \varepsilon)\varphi(r) \leqslant \varphi(v^*qv) \leqslant \mu_0\varphi(r).$$

特别地，$(\mu_0 - \varepsilon)\varphi(r) \leqslant \varphi(v^*rv) \leqslant \mu_0\varphi(r)$．从而，

$$\phi(q) \leqslant \mu_0\varphi(r) \leqslant \frac{\mu_0}{\mu_0 - \varepsilon}\phi(r)$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\phi(r).$$

命 $p_0 = f_3(\leqslant p)$，及

$$\varphi_0(x) = \phi(f_3)^{-1}\phi(x),\ \forall x \in M_0 = M_{p_0},$$

显然 φ_0 是 M_0 上的正规态，如果 $x \in M_0$，使得 $\varphi_0(x^*x) = 0$，由于 φ 在 M_p 上是忠实的，因此，$xv = 0$．从而，$x = xf_3 = xvv^* = 0$，即 φ_0 在 M_0 上是忠实的．前面也已指出，对 M_0 的任何等价投影

r，q，有

$$\varphi_0(q) \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\varphi_0(r),$$

于是依引理 6.3.4，$\varphi_0(a^*a) \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\varphi_0(aa^*)$，$\forall a \in M_0$。证毕。

引理 6.3.7 设 M 是有限的 vN 代数，则对任何的正整数 n，有 M 上的正规态 ψ_n，使得

$$\psi_n(x^*x) \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\psi_n(xx^*),\ \forall x \in M.$$

证．依引理 6.3.6，有 M 的非零投影 p_0，及 M_{p_0} 上忠实的正规态 φ_0，使得

$$\varphi_0(a^*a) \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)\varphi_0(aa^*),\ \forall a \in M_{p_0}.$$

设 $\{p_1, \cdots, p_m\}$ 是 M 的相互直交的投影极大族，使得 $p_i \sim p_0$，$1 \leqslant i \leqslant m$（注意 M 是有限的，因此，m 必有限）。依定理 1.5.4，有 M 的中心投影 z，使得

$$\left(1 - \sum_i p_i\right)z \precsim p_0 z,$$

$$p_0(1 - z) \precsim \left(1 - \sum_i p_i\right)(1 - z)$$

由于 $\{p_i\}$ 的极大性，$p_0 z \neq 0$。

设 $v_i^* v_i = p_0 z$，$v_i v_i^* = p_i z$，$1 \leqslant i \leqslant m$，$v_{m+1}^* v_{m+1} \leqslant p_0 z$，而

$$v_{m+1} v_{m+1}^* = \left(1 - \sum_i p_i\right)z,$$

并命

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \varphi_0(v_i^* x v_i),\ \forall x \in M,$$

于是对任意的 $x \in M$，

$$\varphi_n(x^*x) = \sum_{i=1}^{m+1} \varphi_0(v_i^* x^* x v_i) = \sum_{i,j=1}^{m+1} \varphi_0(v_i^* x^* v_j v_j^* x v_i)$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{l,i}\varphi_0(v_j^* x v_i v_i^* x^* v_j)$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{j}\varphi_0(v_j^* x x^* v_j)$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi_n(xx^*).$$

此外，$\varphi_n(1)\geqslant m\varphi_0(p_0 z)$，但 φ_0 在 M_{p_0} 上是忠实的，因此，$\varphi_n(1)>0$。命 $\psi_n(\cdot)=\varphi_n(1)^{-1}\varphi_n(\cdot)$ 即满足要求。证毕。

定理 6.3.8 设 M 是有限的 vN 代数，则对任意的 $a\in M$，$K(a)$ 包含且仅包含一个元，这里 $K(a)$ 的定义见定理 6.2.7。

证。依命题 6.2.8，

$$K(a_1+a_2)\subset\overline{K(a_1)+K(a_2)},\ \forall a_1,\ a_2\in M.$$

因此，无妨设 $a\geqslant 0$，及 $\|a\|\leqslant\frac{1}{2}$。

设若 $c_1,c_2\in K(a)$，且 $c_1\neq c_2$。自然 c_1，$c_2\geqslant 0$，及 $\|c_1-c_2\|\leqslant 1$。谱分解 $c_1-c_2=\int_{-1}^{1}\mu dz_\mu$，这里 z_μ 是 M 的中心投影，$\forall\mu$。由于 $c_1\neq c_2$，必存在 $\lambda>0$，使得 $z_{-\lambda}\neq 0$ 或者 $(1-z_\lambda)\neq 0$，相应命 $z=z_{-\lambda}$ 或者 $(1-z_\lambda)$，则

$$c_2 z\geqslant c_1 z+\lambda z\ \text{或者}\ c_1 z\geqslant c_2 z+\lambda z.$$

无妨就 $c_1 z\geqslant c_2 z+\lambda z$ 来考虑。限于 Mz，$c_1 z\neq c_2 z$，并且 $c_1 z$，$c_2 z\in K(az)$，因此可设 $z=1$。

取引理 6.3.7 的 ψ_n，对于 M 的任意酉元 u，

$$\psi_n(u^* a u)=\psi_n((a^{\frac{1}{2}}u)^*(a^{\frac{1}{2}}u))\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\psi_n(a),$$

$$\psi_n(a)=\psi_n((a^{\frac{1}{2}}u)(a^{\frac{1}{2}}u)^*)\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\psi_n(u^* a u),$$

因此对于任意的 $f,g\in\mathfrak{C}$（见定义 6.2.3），

$$\psi_n(f\cdot a)\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\psi_n(a)\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\psi_n(g\cdot a),$$

取 $f_k,g_k\in\mathfrak{C}$，使得 $f_k\cdot a\to c_1$，$g_k\cdot a\to c_2$，则

$$\psi_n(c_1) \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \psi_n(c_2).$$

另一方面，$c_1 \geqslant c_2 + \lambda$，因此

$$\psi_n(c_2) + \lambda \leqslant \psi_n(c_1) \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \psi_n(c_2).$$

当 n 充分大时，与 $\lambda > 0$ 相矛盾. 因此，$K(a)$ 包含且仅包一个元.证毕.

注. 在 §4 末,我们将证明：如果对于 vN 代数 M 的任意元 a，$K(a)$ 仅包含一个元,则M 必是有限的.

下面用正规迹态来描述有限 vN 代数的特征.

引理 6.3.9 设M是有限的 vN 代数，则在 M 上至少有一个正规迹态.

证. 设T是 M 到 Z 的映象,使得 $K(a)=\{T(a)\}$，$\forall a\in M$. 又取ψ 为引理 6.3.7 的 ψ_1，并命

$$\varphi(a) = \psi(T(a)),\ \forall a \in M.$$

依命题 6.2.8，T是线性的. 依 $K(\cdot)$ 的定义，

$$T(1) = 1,\ T(M_+) \subset Z_+,$$

因此，φ 是 M 上的态. 对 M 的任意酉元 u，显然

$$K(u^*xu) = K(x),$$

由此，$T(x) = T(u^*xu)$. 进而 $T(xy) = T(yx)$，$\forall x, y \in M$，所以，φ 也是迹的.

今只须证明φ 是正规的. 设 $\{b_l\}$ 是 M_+ 的有界递增网，$b = \sup\limits_l b_l$，令 $a_l = b - b_l \in M_+$，则 $a_l \xrightarrow{\sigma(M, M_*)} 0$. 我们需要证明 $\varphi(a_l) \to 0$. 对任意的 $\varepsilon > 0$，由于ψ 是正规的，因此有 l_0，使得

$$0 \leqslant \psi(a_l) < \varepsilon,\ \forall l \geqslant l_0.$$

今取 $f_l \in \mathfrak{C}$，使得 $\|f_l \cdot a_l - T(a_l)\| < \varepsilon$，由于$\psi$ 是引理 6.3.7 的 ψ_1，可见对任意的 $l \geqslant l_0$，

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \varphi(a_l) &= \psi(T(a_l)) \leqslant \psi(f_l \cdot a_l) + \varepsilon \\ &= \sum_u f_l(u)\psi(u^*a_lu) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\leqslant 2 \sum_{n} f_l(u)\phi(a_l) + \varepsilon < 3\varepsilon,$$

因此，$\varphi(a_l) \to 0$。证毕。

定理 6.3.10 vN 代数 M 是有限的，必须且只须，在 M 上存在正规迹态的完全集，即对 M 的任意非零正元 a，有 M 上的正规迹态 φ，使得 $\varphi(a) > 0$。

证. 设 M 是有限的，取引理 6.3.9 的 φ，其支持 $s(\varphi) = z$ 是 M 的非零中心投影，限于 Mz，φ 是忠实的. $M(1-z)$ 也是有限的，又可施用引理 6.3.9，…，依 Zorn 辅理，有 M 上的正规迹态族 $\{\varphi_l\}$，使得 $\{s(\varphi_l)\}$ 是相互直交，和为 1 的中心投影族. 易见 $\{\varphi_l\}$ 是完全的.

反之，设 $\mathscr{F}$ 是 M 上正规迹态的完全集. 如果 $w \in M$，使得 $w^*w = 1$，$ww^* = p$。于是对任意的 $\varphi \in \mathscr{F}$，

$$\varphi(1-p) = \varphi(w^*w) - \varphi(ww^*) = 0,$$

因此，$p = 1$，即 M 是有限的. 证毕.

下面叙述有限 vN 代数的另一个特征.

引理 6.3.11 设 p 是 vN 代数 M 的投影，$v \in M$，使得

$$v^*v = p,\ vv^* \lneqq p,$$

令

$$q_n = v^n v^{*n},\ n = 1, 2, \cdots,\ q_0 = p,$$

$$e_n = q_n - q_{n+1},\ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

则 $\{e_n\}$ 是 M 的相互直交且等价的非零投影列，并且 $e_n \xrightarrow{\text{强算子}} 0$。

证. 由于 $q_1 < p$，因此，$pv = v$，从而，$v^{*n}v^n = p$ $\forall n \geqslant 1$，因而 q_n 均是投影. 由于 $q_n q_{n+1} = q_n$，所以，

$$p = q_0 > q_1 \geqslant q_2 \geqslant \cdots,$$

由此，$e_n \perp e_m$，$\forall n \neq m$，及 $e_n \xrightarrow{\text{强算子}} 0$。

命 $u_n = vq_n$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，则

$$(u_n - u_{n+1})^*(u_n - u_{n+1}) = e_n,$$

$$(u_n - u_{n+1})(u_n - u_{n+1})^* = e_{n+1},$$

因此，$e_n \sim e_{n+1}$ $\forall n \geqslant 0$。此外，$e_0 = p - vv^* \neq 0$。证毕.

定理 6.3.12 vN 代数 M 是有限的，必须且只须，$*$ 运算在 M 的有界球中是强算子连续的。

证．设 M 是有限的，依定理 6.3.10，M 上有正规迹态的完全集 $\mathscr{F}$．设网 $\{x_l\}\subset M$，$\|x_l\|\leqslant 1$，$\forall l$，及 $x_l\xrightarrow{强算子}0$，于是对任意的 $a\in M$ 及 $\varphi\in\mathscr{F}$，

$$|L_a\varphi(x_lx_l^*)| = |\varphi(x_l^*ax_l)| \leqslant \|a\|\varphi(x_l^*x_l)\to 0,$$

只须证明 $[L_a\varphi|a\in M,\ \varphi\in\mathscr{F}]$ 在 M_* 中是稠的，再由 $\|x_l\|\leqslant 1\ (\forall l)$，可见 $x_lx_l^*\xrightarrow{弱算子}0$，即 $x_l^*\xrightarrow{强算子}0$．设若 $b\in M$，使得 $L_a\varphi(b)=0$，$\forall a\in M$，$\varphi\in\mathscr{F}$．特别，$\varphi(bb^*)=0$，$\forall\varphi\in\mathscr{F}$．依 $\mathscr{F}$ 的完全性，$b=0$．

反之，设 $*$ 运算在 M 的有界球中是强算子连续的．若 M 不是有限的，则有 $v\in M$，$v^*v=1$，而 $vv^*\neq 1$．依引理 6.3.11，有 M 的相互直交且等价的非零投影列 $\{e_n\}$，及 $e_n\xrightarrow{强算子}0$．设 $w_n\in M$，使得 $w_n^*w_n=e_n$，$w_nw_n^*=e_1$．自然 $w_n\xrightarrow{强算子}0$，$\|w_n\|\leqslant 1$．依假定 $w_n^*\xrightarrow{强算子}0$，因此 $e_1=w_nw_n^*\xrightarrow{弱算子}0$．这与 $e_1\neq 0$ 相矛盾．所以 M 是有限的．证毕．

在引理 6.3.9 的证明中，我们曾经定义有限 vN 代数到其中心上的映象 T．今进一步研究 T 的性质．

定义 6.3.13 设 M 是有限的 vN 代数，M 到 $Z=M\cap M'$ 上的映象 T，使得 $\{T(a)\}=K(a)$，$\forall a\in M$，称为（M 上）中心值的迹．

命题 6.3.14 设 M 是有限的 vN 代数，$T:M\to Z=M\cap M'$ 是中心值的迹，则

1）T 是 M 到 Z 上范数为 1 且 σ-σ 连续的投影映象，特别 $T(a)\geqslant 0$，$\forall a\in M_+$；$T(za)=zT(a)$，$\forall a\in M$，$z\in Z$；$T(a)^*\cdot T(a)\leqslant T(a^*a)$，$\forall a\in M$；

2）$T(ab)=T(ba)$，$\forall a,b\in M$；

3）$T(a^*a)=0$，当且仅当，$a=0$；

4) $\{\varphi(T(\cdot))|\varphi$ 是 M 上的正规态$\}$ 是 M 上正规迹态的完全集；

5) 如果 p, q 是 M 的投影，则 $p \precsim q$，当且仅当，$T(p) \leqslant T(q)$。

证. 1)(除去 σ-σ 连续性)与 2) 均显然.

今设 φ 是 M 上的正规态，我们来证明 $\varphi(T(\cdot))$ 也是正规的(从而必是正规迹态)，由此立见 T 是 σ-σ 连续的. 设 $\{a_l\}$ 是 M_+ 的有界递增网，$a = \sup_l a_l$，需要证明 $\varphi(T(a)) = \sup_l \varphi(T(a_l))$. 但 $\{T(a_l)\}$ 是 Z_+ 的有界递增网，依 φ 的正规性，归结为要证

$$T(a) = \sup_l T(a_l).$$

自然 $T(a) \geqslant \sup_l T(a_l)$. 如不相等，则将有 M 的非零中心投影 z 及正数 λ，使得

$$zT(a) \geqslant z \sup_l T(a_l) + \lambda z.$$

设 $\mathscr{F}$ 是 M 上正规迹态的完全集. 对任意的 $\varepsilon > 0$ 及 l，可取 $f_l \in \mathfrak{C}$，使得 $\|f_l \cdot (a - a_l)z - T((a - a_l)z)\| < \varepsilon$. 于是对任意的 $\phi \in \mathscr{F}$，

$$\begin{aligned}|\phi(T((a - a_l)z))| &\leqslant |\phi(f_l \cdot (a - a_l)z)| + \varepsilon \\ &\leqslant \sum_u f_l(u)|\phi(u(a - a_l)zu^*)| + \varepsilon \\ &= |\phi((a - a_l)z)| + \varepsilon,\end{aligned}$$

但 ϕ 是正规的，因此，

$$\phi(T(a - a_l)z) \to 0, \ \forall \phi \in \mathscr{F},$$

即 $\phi(T(a)z) = \lim_l \phi(T(a_l)z) = \phi(z \sup_l T(a_l))$, $\forall \phi \in \mathscr{F}$. 另一方面，$\phi(T(a)z) \geqslant \phi(z \sup_l T(a_l)) + \lambda\phi(z)$, $\forall \phi \in \mathscr{F}$. 所以，$\phi(z) = 0$, $\forall \phi \in \mathscr{F}$，这与 $z \neq 0$ 相矛盾. 因此，

$$T(a) = \sup_l T(a_l)$$

3) 设 $\mathscr{I} = \{a \in M \mid T(a^*a) = 0\}$，易见 $\mathscr{I}$ 是 M 的 $*$ 双侧理想. 由于 T 是 σ-σ 连续的，因此，$\mathscr{I}$ 是 $s(M, M_*)$ 闭的. 依命题

1.7.1，有 M 的中心投影 z，使得 $\vartheta = Mz$. 特别，

$$z = T(z) = T(z^*z) = 0,$$

所以，$\vartheta = \{0\}$.

4) 如果 $a \in M_+$，使得对 M 上任意的正规态 φ，有

$$\varphi(T(a)) = 0.$$

于是 $T(a) = 0$，依 3)，$a = 0$.

5) 如果 $p \sim q_1 \leqslant q$，依 2) $T(p) = T(q_1) \leqslant T(q)$. 反之设 $T(p) \leqslant T(q)$. 依定理 1.5.4，有 M 的中心投影 z，使得

$$pz \lesssim qz, \quad q(1-z) \lesssim p(1-z)$$

由此易见 $(1-z)T(p) = (1-z)T(q)$. 如果

$$q(1-z) \sim p_1 \leqslant p(1-z),$$

则 $T(p(1-z) - p_1) = 0$. 依 3)，$p(1-z) = p_1$，即

$$q(1-z) \sim p(1-z).$$

因此，$p \lesssim q$. 证毕.

现在讨论 σ-有限的有限 vN 代数.

命题 6.3.15 设 M 是 vN 代数，则下列是等价的:

1) M 是 σ-有限的，并且是有限的;

2) M 是有限的，$Z = M \cap M'$ 是 σ-有限的;

3) M 上有忠实的正规迹态.

证. 由定理 6.3.10 及命题 1.14.2，3) 蕴含 1). 1) 蕴含 2) 是显然的. 今设 2) 成立，于是 Z 上有忠实的正规态 ψ，令

$$\varphi(a) = \psi(T(a)), \quad \forall a \in M.$$

由命题 6.3.14，φ 将是 M 上忠实的正规迹态. 证毕.

命题 6.3.16 设 M 是有限的 vN 代数，则 M 可以分解为 σ-有限的有限 vN 代数的直和. 特别地，有限的因子必是 σ-有限的.

证. 在定理 6.3.10 的证明中，已指出 M 上有正规迹态族 $\{\varphi_l\}$，使得 $\{s(\varphi_l)\}$ 为相互直交且和为 1 的中心投影族. 命

$$M = \sum_l \oplus M_l, \quad M_l = Mz_l,$$

依命题 6.3.15，M_l 是 σ-有限且有限的，$\forall l$。证毕。

注 本节见参考文献 [12]，[52]，[91]，[97]。

§4. 真无限的 vN 代数

命题 6.4.1 设 $M = \sum_l \oplus M_l$，则 M 是真无限的，当且仅当，每个 M_l 都是真无限的。

证. 必要性显然. 反之设每个 $M_l = Mz_l$ 都是真无限的，而 z 是 M 的有限中心投影，则 zz_l 是 M_l 的有限中心投影，因此，$zz_l = 0, \forall l$，即 $z = 0$. 证毕.

命题 6.4.2 vN 代数 M 是真无限的，当且仅当，M 上没有正规迹态.

证. 设 φ 是 M 上的正规迹态，则 $s(\varphi)$ 是 M 的非零中心投影，且依命题 6.3.15，$Ms(\varphi)$ 是有限的，即 M 不能是真无限的.

反之如果 M 不是真无限的，于是有非零中心投影 z，使得 Mz 是有限的. Mz 上至少有一个正规迹态 ϕ，令 $\varphi(\cdot) = \phi(\cdot z)$，则 φ 是 M 上的正规迹态. 证毕.

命题 6.4.3 如果 M 是真无限的 vN 代数，则在 M 的有界球中，$*$ 运算不能是强算子连续的.

依定理 6.3.12 立见.

定理 6.4.4 设 M 是 vN 代数，则下列是等价的：

1) M 是真无限的；

2) 存在 M 的相互直交的投影无穷列 $\{p_n\}$，使得

$$\sum_n p_n = 1, \ p_n \sim 1, \ \forall n;$$

3) 存在 M 的投影 p，使得 $p \sim (1 - p) \sim 1$.

证. 2) 推导 3)：取 $p = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n+1}$ 即可.

3) 推导 1)：设 z 是 M 的任意非零中心投影，则 $pz \sim (1 -$

$p)z \sim z$. 于是 z 不可能是有限的，即 M 是真无限的。

1) 推导 2)：投影 1 是无限的，因此有 $v \in M$，使得 $v^*v = 1$，$vv^* \lneqq 1$。令

$$q_n = v^n v^{*n},\quad e_n = q_n - q_{n+1},\quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

依引理 6.3.11，$\{e_n\}$ 相互直交，等价且非零。由 Zorn 辅理，可以构造相互直交且等价的投影极大族 $\{e_l | l \in \Lambda\}$，使得它包含 $\{e_n\}$。记 $p = 1 - \sum_{l \in \Lambda} e_l$，依定理 1.5.4，有 M 的中心投影 z，使得

$$pz \lesssim e_0 z,\quad e_0(1 - z) \lesssim p(1 - z).$$

由于族 $\{e_l\}$ 的极大性，$z \neq 0$。$^\#\Lambda$ 是无穷的，于是可写

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i,$$

这里 $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \varnothing$，$^\#\Lambda_i = {}^\#\Lambda$，$\forall i \neq j$。命

$$r_1 = pz + \sum_{l \in \Lambda_1} e_l z,\quad r_j = \sum_{l \in \Lambda_j} e_l z,$$

易见 $r_i r_j = 0$，$\forall i \neq j$，$r_1 \sim r_2 \sim \cdots \sim z$，及 $z = \sum_{j=1}^{\infty} r_j$。由于 $M(1 - z)$ 仍然是真无限的，同样的手续又可施于 $M(1 - z)$，$\cdots$。依 Zorn 辅理，可见存在 M 的相互直交、和为 1 的非零中心投影族 $\{z_l\}$，使得对每个指标 l，有投影的无穷列 $\{r_{ln} | n = 1, 2, \cdots\}$，使得

$$r_{ln} r_{lm} = 0,\ \forall n \neq m,\quad \sum_{n=1}^{\infty} r_{ln} = z_l,$$

$$r_{l1} \sim r_{l2} \sim \cdots \sim z_l.$$

今命 $\left\{ p_n = \sum_l r_{ln} \,\middle|\, n = 1, 2, \cdots \right\}$ 即满足要求。证毕。

现在利用定理 6.4.4，证明关于有限投影的一个性质。

命题 6.4.5 设 p, q 是 vN 代数 M 的有限投影，则 $\sup\{p, q\}$ 也是有限投影。

证．无妨设 $\sup\{p, q\} = 1$。依命题 1.5.2，

$$(1 - p) \sim (q - \inf\{p, q\}) \leqslant q,$$

因此，$(1-p)$ 也是有限的．如果 M 并非有限，便有非零中心投影 z，使得 Mz 真无限．注意 pz，qz 是有限的，并且

$$\sup\{pz, qz\} = z,$$

因此又可设 M 是真无限的．

依定理 6.4.4.，可写 $1=r+(1-r)$，其中 $r\sim(1-r)\sim 1$．依命题 1.5.5，有中心投影 z，使得

$$rz \precsim pz,\ (1-r)(1-z)\precsim(1-p)(1-z),$$

由于 pz，$(1-p)(1-z)$ 都是有限的，从而 $z\sim rz$，及 $(1-z)\sim(1-r)(1-z)$ 是有限的．这与 M 真无限相矛盾．证毕．

作为本节的结束，我们来证明定理 6.3.8 下面的注，即

命题 6.4.6 若对 vN 代数 M 的任意元 a，$K(a)$ 仅包含一个元，则 M 是有限的．

证．如果有 M 的非零中心投影 z，使得 Mz 是真无限的，依定理 6.4.4，有 M 的投影 $p\leqslant z$，使得 $p\sim(z-p)\sim z$．于是有 $u, v\in Mz$，

$$u^*u = v^*v = z,\ uu^* = p,\ vv^* = z-p$$

可定义 Φ: $M\to Z=M\cap M'$，使得 $K(a)=\{\Phi(a)\}$．依 $K(\cdot)$ 的定义，有 $\Phi(ab)=\Phi(ba)$，$\forall a, b\in M$．于是

$$z=\Phi(z)=\Phi(p)=\Phi(z-p).$$

从而，$2z=2\Phi(z)=\Phi(p)+\Phi(z-p)=\Phi(z)=z$，即 $z=0$．矛盾．因此，M 是有限的．证毕．

注　本节见参考文献 [12]，[55]．

§5. 半有限的 vN 代数

定义 6.5.1 设 M 是 vN 代数，φ: $M_+\to[0,+\infty]$ 称为迹，指对任意的 $a, b\in M_+$，$x\in M$ 及数 $\lambda\geqslant 0$，有

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b),\ \varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a),$$
$$\varphi(x^*x)=\varphi(xx^*)$$

这里规定 $0\cdot+\infty=0$．

迹φ称为忠实的，指如果 $a\in M_+$，使得 $\varphi(a)=0$，则 $a=0$。

迹φ称为半有限的，指对任意的 $0\neq a\in M_+$，必有 $0\lneqq b\leqslant a$，使得 $\varphi(b)<\infty$。

迹φ称为正规的，指对 M_+ 的任意有界递增网 $\{a_l\}$，有
$$\varphi(\sup_l a_l)=\sup_l \varphi(a_l).$$

命题 6.5.2 设φ是 M_+ 上的迹，令
$$\mathfrak{N}=\{x\in M\,|\,\varphi(x^*x)<\infty\},$$
$$\mathfrak{M}=\mathfrak{N}^2=[xy\,|\,x,\ y\in\mathfrak{N}]^{1)}$$
则 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 都是 M 的 * 双侧理想，并且
$$\mathfrak{M}=[\mathfrak{M}_+]=\{xy\,|\,x,\ y\in\mathfrak{N}\},$$
$$\mathfrak{M}_+=\{a\in M_+\,|\,\varphi(a)<\infty\}$$
这里 $\mathfrak{M}_+=\mathfrak{M}\cap M_+$，$\varphi$ 还可以唯一扩张为 $\mathfrak{M}$ 上的线性泛函，仍记以 φ，则
$$\varphi(ab)=\varphi(ba),\ \forall a\in\mathfrak{M},\ b\in M,\ \text{或者}\ a,\ b\in\mathfrak{N}.$$
此外，迹的条件 $\varphi(x^*x)=\varphi(xx^*)(\forall x\in M)$ 等价于
$$\varphi(a)=\varphi(u^*au)$$
($\forall a\in M_+$ 及 u 是 M 的酉元)。

证. 显然 $\mathfrak{N}$ 是M的 * 双侧理想，从而 $\mathfrak{M}$ 亦然. 如果 $a\in M_+$，$\varphi(a)<\infty$，则 $a^{\frac{1}{2}}\in\mathfrak{N}$，$a\in\mathfrak{M}_+$。反之，设 $a=\sum_j x_j^*y_j\in\mathfrak{M}_+$，这里 x_j，$y_j\in\mathfrak{N}$，由极化公式
$$\begin{aligned}4x_j^*y_j=&(x_j+y_j)^*(x_j+y_j)-(x_j-y_j)^*(x_j-y_j)\\&-i(x_j+iy_j)^*(x_j+iy_j)\\&+i(x_j-iy_j)^*(x_j-iy_j),\end{aligned}$$
可见
$$a=\frac{1}{2}(a+a^*)\leqslant\frac{1}{4}\sum_j(x_j+y_j)^*(x_j+y_j),$$

---

1) 今后称 $\mathfrak{M}$ 为迹φ所定义的理想.

所以，$\varphi(a)<\infty$，即 $\mathfrak{M}_+=\{a\in M_+|\varphi(a)<\infty\}$。极化公式也表明 $\mathfrak{M}=[\mathfrak{M}_+]$。今设 $x\in\mathfrak{M}$，极分解 $x=uh$，则

$$h=u^*x\in\mathfrak{M}_+,$$

于是，$h^{\frac{1}{2}}\in\mathfrak{N}$。又 $x=uh^{\frac{1}{2}}\cdot h^{\frac{1}{2}}$，因此，$\mathfrak{M}=\{xy|x,y\in\mathfrak{N}\}$。

由于 $\mathfrak{M}=[\mathfrak{M}_+]$，$\varphi$ 可以唯一扩张为 $\mathfrak{M}$ 上的线性泛函。如果 $a\in\mathfrak{M}_+$，u 是 M 的酉元，则 $\varphi(uau^*)=\varphi((ua^{\frac{1}{2}})^*\cdot(ua^{\frac{1}{2}}))=\varphi(a)$。进而 $\varphi(a)=\varphi(uau^*)$，$\forall a\in\mathfrak{M}$。又 $\mathfrak{M}$ 是双侧理想，所以，$\varphi(ua)=\varphi(au)$，$\forall a\in\mathfrak{M}$。从而 $\varphi(ab)=\varphi(ba)$，$\forall a\in\mathfrak{M}, b\in M$。当 $a,b\in n$ 时，由 ab 的极化公式及 $\varphi(x^*x)=\varphi(xx^*)$ $(\forall x\in M)$，立见 $\varphi(ab)=\varphi(ba)$。

最后，如果 φ 是迹，自然有 $\varphi(a)=\varphi(u^*au)$，$\forall a\in M_+$，$u$ 是 M 的酉元。反之，设 φ: $M_+\to[0,+\infty]$ 满足加性及正齐性，及

$$\varphi(a)=\varphi(u^*au),\ \forall a\in M_+,$$

u 是 M 的酉元。同样定义 $\mathfrak{N}$，$\mathfrak{M}$，相仿地证明具有上述性质。设 $x\in M$，极分解 $x=wh$，如果 $x^*x\in\mathfrak{M}_+$，则

$$xx^*=w(x^*x)w^*\in\mathfrak{M}_+.$$

因此可见 $\varphi(x^*x)<\infty$，当且仅当 $\varphi(xx^*)<\infty$。限于两者均有限，则

$$\varphi(xx^*)=\varphi(w(x^*x)w^*)=\varphi(w^*w(x^*x))=\varphi(x^*x)$$

因此，φ 是迹。证毕。

命题 6.5.3 设 φ 是 M_+ 上的正规迹，$\mathfrak{M}$ 是 φ 定义的理想，则对任意的 $a\in\mathfrak{M}$，$\varphi(a\cdot)\in M_*$。

证．无妨设 $a\in\mathfrak{M}_+$，依命题 6.5.2，$\varphi(a\cdot)=\varphi(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}})$。又 φ 是正规的，因此，$\varphi(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}})\in M_*$。证毕。

命题 6.5.4 设 φ 是 M_+ 上的迹，则 φ 是半有限的，当且仅当，$\mathfrak{M}$ 在 M 中是 $\sigma(M,M_*)$ 稠的，这里 $\mathfrak{M}$ 是 φ 定义的理想。

此外，如果 φ 是半有限迹，p 是 M 的投影，则 $p=\sup\{q|q$ 是 M 的投影，$q\leqslant p$，且 $\varphi(q)<\infty\}$。

证．设 φ 是半有限的，$\overline{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的 $\sigma(M,M_*)$ 闭包，则 $\overline{\mathfrak{M}}$ 是 M 的 σ-闭 $*$ 双侧理想。于是有 M 的中心投影 z，使得 $\overline{\mathfrak{M}}=Mz$。如

果 $1-z\neq 0$，由于φ是半有限的，因此有 $0\neq a\leqslant 1-z$，使得 $\varphi(a)<\infty$。从而 $a\in\mathfrak{M}_+\subset Mz$，矛盾．因此 $z=1$，即$\mathfrak{M}$在 M 中是 $\sigma(M,M_*)$ 稠的．

反之，设 $\mathfrak{M}$ 在 M 中 $\sigma(M,M_*)$ 稠，依命题 1.7.2，对任意的 $0\lneqq a\in M$，有 $\mathfrak{M}_+$ 的递增网 $\{a_l\}$，使得 $a=\sup\limits_l a_l$。因此 l 充分大，$0\lneqq a_l\leqslant a$，且 $\varphi(a_l)<\infty$，即说明φ是半有限的．

今设φ是半有限的，p是 M 的投影．如果 $e=\sup\{q\mid q$ 是 M 的投影，$q\leqslant p$，$\varphi(q)<\infty\}\lneqq p$，依$\varphi$的半有限性，又将有 M 的非零投影 $q_1\leqslant p-e$，使得 $\varphi(q_1)<\infty$。这与 e 的定义相矛盾．证毕．

命题 6.5.5 设φ是M_+上正规迹，则 $z=\sup\{p\mid p$ 是 M 的投影，且 $\varphi(p)=0\}$ 是中心投影，并且 $\{x\in M\mid\varphi(x^*x)=0\}=Mz$，及 $\varphi|M_+(1-z)$ 是忠实的．

证．依命题1.5.2，$(\sup\{p,q\}-p)\sim(q-\inf\{p,q\})$，因此，$\varphi(\sup\{p,q\})+\varphi(\inf\{p,q\})=\varphi(p)+\varphi(q)$。由此，如果 $\varphi(p)=\varphi(q)=0$，则 $\varphi(\sup\{p,q\})=0$，即

$$\{p\mid p\text{ 是 }M\text{ 的投影，且 }\varphi(p)=0\}.$$

依投影的包含关系是递增网。由于φ是正规的，因此，$\varphi(z)=0$．此外，对 M 的任意酉元 u，易见 $u^*zu=z$，因此，z 是M的中心投影．

显然 $\varphi|M_+z=0$．又若 $0\neq a\in M_+(1-z)$，必有正数 λ 及非零投影 p，使得 $a\geqslant\lambda p$，因此，$\varphi(a)>0$，即在 $M_+(1-z)$ 上，φ是忠实的．由此，$Mz=\{x\in M\mid\varphi(x^*x)=0\}$．证毕．

定义 6.5.6 设φ是 vN 代数 M 正部分上的正规迹，称命题 6.5.5 中的 $(1-z)$ 为φ的支持，记作 $s(\varphi)$．

现在讨论半有限 vN 代数的特征与性质．

命题 6.5.7 vN 代数 M 是半有限的，当且仅当，在 M_+ 上有半有限正规迹的完全集．

证．设 M 是半有限的，于是 M 至少有一个非零的有限投影

p. 设 $\{p_l\}$ 是 M 的相互直交的投影极大族，使得 $p_l \sim p$, $\forall l$. 依定理 1.5.4，有 M 的中心投影 z，使得

$$p_0 z \precsim pz,\ p(1-z) \precsim p_0(1-z),$$

这里 $p_0 = 1 - \sum_l p_l$. 由于族 $\{p_l\}$ 是极大的，因此，$pz \neq 0$.

令 $v_l^* v_l = pz$, $v_l v_l^* = p_l z$, $\forall l$, 及 $v_0 v_0^* = p_0 z$, $v_0^* v_0 \leqslant pz$. 设 φ 是 M_{pz} 上的正规迹态，命

$$\phi(a) = \sum_l \varphi(v_l^* a v_l) + \varphi(v_0^* a v_0),\ \forall a \in (Mz)_+,$$

由于 $\sum_l v_l v_l^* + v_0 v_0^* = z$ 及 φ 是 M_{pz} 上的正规迹态，因此，ϕ 是 $(Mz)_+$ 上的正规迹. 设 $\mathfrak{M}$ 是 ϕ 定义的 Mz 的理想，显然 $p_l z$ 及 $p_0 z \in \mathfrak{M}_+$. 又 $\sum_l p_l z + p_0 z = z$，因此，$\mathfrak{M}$ 在 Mz 中是 σ-稠的，即 ϕ 是半有限的. 如果 $0 \neq a \in Mz$，则至少有一个指标 l，使得 $av_l \neq 0$，或者 $av_0 \neq 0$. M_{pz} 是有限的，依定理 6.3.10，有 M_{pz} 上的正规迹态 φ，使得 $\varphi(v_l^* a^* a v_l) \neq 0$，或者 $\varphi(v_0^* a^* a v_0) \neq 0$，因此，$\phi(a^* a) \neq 0$. 这说明 $(Mz)_+$ 上存在半有限正规迹的完全集.

$M(1-z)$ 也是半有限，又可施用同样的手续. 再依 Zorn 辅理，可见 M_+ 上存在半有限正规迹的完全集.

反之，设 M_+ 上有半有限正规迹的完全集. 如果 z 是 M 的非零纯无限的中心投影，于是有 M_+ 上的半有限正规迹 ϕ，使得 $\phi(z) > 0$. 依命题 6.5.4，有 M 的投影 $p \leqslant z$，而 $0 < \phi(p) < \infty$. 这说明 M_p 上有正规迹态，依命题 6.4.2，M_p 不是真无限的，这与 $p \leqslant z$ 及 z 纯无限相矛盾. 因此，M 是半有限的. 证毕.

定理 6.5.8 vN 代数 M 是半有限的，必须且只须，M_+ 上存在忠实的半有限正规迹.

证. 充分性由命题 6.5.7 立见. 今设 M 是半有限的，由 Zorn 辅理可构作 M_+ 上半有限正规迹族 $\{\varphi_l\}$，使得 $\{s(\varphi_l)\}$ 两两直交且和为 1. 再命 $\varphi = \sum_l \varphi_l$ 即满足要求. 证毕.

注. 设 φ 是 M_+ 上忠实的半有限正规迹,用 GNS 构造,可以产生 M 忠实的 w^*-表示. 事实上,设 $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ 如命题 6.5.2, 在 $\mathfrak{N}$ 上定义内积 $\langle x, y\rangle = \varphi(y^*x) = \varphi(xy^*)$,依此完备化得到 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_\varphi$. 记 $x \to x_\varphi$ 为 $\mathfrak{N}$ 到 $\mathscr{H}_\varphi$ 中的嵌入,对任意的 $a \in M$, 定义

$$\pi_\varphi(a)x_\varphi = (ax)_\varphi, \ \forall x \in \mathfrak{N},$$

易证 $\pi_\varphi(a)$ 可唯一扩张为 $\mathscr{H}_\varphi$ 中的有界算子,仍记以 $\pi_\varphi(a)$. 于是得到 M 的 * 表示 $\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi\}$. 如果 $a \in M$, 使得 $\pi_\varphi(a) = 0$, 则 $ax = 0$, $\forall x \in \mathfrak{N}$. 又 $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ 在 M 中是 σ-稠的,因此, $a = 0$, 即 π_φ 是忠实的. 此外, 如果网 $\{a_l\} \subset M$, $\|a_l\| \leqslant 1 (\forall l)$, 且 $a_l \xrightarrow{\sigma} 0$, 则对任意的 $x, y \in \mathfrak{N}$, 依命题 6.5.3,

$$\langle \pi_\varphi(a_l)x_\varphi, y_\varphi\rangle = \varphi(y^*a_lx) = \varphi(xy^*a_l) \to 0$$

因此 π_φ 也是 M 的 w^*-表示.

命题 6.5.9 1), 设 M 是半有限的, p, p' 分别是 M, M' 的投影,则 M_p, $M_{p'}$ 也是半有限的;

2), 设 $M = \sum_l \oplus M_l$, 则 M 是半有限的,当且仅当,每个 M_l 是半有限的.

证. 1), 设 φ 是 M_+ 上忠实的半有限正规迹,则 $\varphi|(M_p)_+$ 也是忠实的半有限正规迹,因此, M_p 是半有限的. 此外, $M_{p'}$ * 同构于 $M_{c(p')}$, 这里 $c(p')$ 是 p' 在 M' 中的中心覆盖,因此, $M_{p'}$ 也是半有限的. 2) 是显然的. 证毕.

定理 6.5.10 设 M 是 vN 代数,则下列是等价的:

1) M 是半有限的;

2) 存在 M 的相互直交的有限投影族 $\{p_l\}$, 使得 $\sum_l p_l = 1$;

3) 存在 M 的有限投影递增网 $\{q_l\}$, 而 $\sup_l q_l = 1$;

4) 存在 M 的有限投影 p, 使得 $c(p) = 1$.

证. 1) 推导 2): 依 Zorn 辅理, 可构造 M 的相互直交的有限投影极大族 $\{p_l\}$. 如果 $p = 1 - \sum_l p_l \neq 0$, 由于 M_p 仍然是

半有限的，因此必有非零的有限投影 $q \leqslant p$. 显然 $qp_l = 0, \forall l$，这与 $\{p_l\}$ 的极大性相矛盾。所以，$\sum_l p_l = 1$.

2）推导 3）：依命题 6.4.5 立见.

3）推导 1）：如果 z 是 M 的非零中心投影，则有指标 l，使得 $zq_l \neq 0$。于是 $zq_l(\leqslant z)$ 是有限投影，这说明 z 不能是纯无限的.

4）推导 1）：设 z 是 M 的非零中心投影，依命题 1.5.8，$zp \neq 0$. 因此 z 包含非零有限投影 zp，不能是纯无限的. 从而 M 是半有限的.

1）推导 4）：依 Zorn 辅理，构作有限投影的极大族 $\{p_l\}$，使得 $c(p_l) \cdot c(p_{l'}) = 0, \forall l \neq l'$. 令 $p = \sum_l p_l$，我们说 p 也是有限的. 事实上，设投影 $r \leqslant p$，$r \sim p$，则对任意指标 l，

$$rc(p_l) \sim pc(p_l) = p_l,\ rc(p_l) \leqslant pc(p_l) = p_l,$$

但 p_l 有限，因此 $rc(p_l) = p_l$. 从而，

$$p = \sum_l p_l = r \sum_l c(p_l)$$

$$= rp \sum_l c(p_l) = rp = r.$$

今只须证 $c(p) = 1$，若否，由于 $M(1 - c(p))$ 也是半有限的，则有非零有限投影 $q \leqslant 1 - c(p)$. 自然 $c(q) \cdot c(p_l) = 0, \forall l$，这与 $\{p_l\}$ 的极大性相矛盾. 证毕.

引理 6.5.11 设 N 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，ξ 是 $\mathscr{H}$ 的单位矢，并对 N 分离且循环，又设 $\varphi(\cdot) = \langle \cdot \xi, \xi \rangle$ 是 N 上的迹态，则存在 $\mathscr{H}$ 中的共轭线性的等距算子 j，$j^2 = 1$，使得 $a \to jaj$ 是 N 到 N' 上的共轭线性的 $*$ 代数同构.

证. 令 $ja\xi = a^*\xi, \forall a \in N$，由于 φ 是 N 上的迹态，j 可扩张为 $\mathscr{H}$ 中的共轭线性的等距算子，仍记以 j，显然 $j^2 = 1$. 对任意的 $a, b, c \in N$，

$$jajbc\xi = bca^*\xi = bjajc\xi,$$

$\{c\xi | c \in N\}$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠，因此，$jaj \cdot b = b \cdot jaj, \forall b \in N$，即 $jaj \in$

$N', \forall a \in N$. 注意

$$\langle (jaj)^* b\xi, c\xi \rangle = \varphi(ac^*b) = \varphi(c^*ba) = \langle ja^*jb\xi, c\xi \rangle$$

$\forall b, c \in N$, 因此，$(jaj)^* = ja^*j$, $\forall a \in N$. 显然，$jaj = 0$, 当且仅当 $a = 0$。

今只须证明 $jNj = N'$. 设 $a' \in N'$, 且 $0 \leqslant a' \leqslant 1$, 令

$$\psi(a) = \langle aa'\xi, \xi \rangle, \ \forall a \in N,$$

则 $\psi \leqslant \varphi$, 依定理 1.10.3, 有 $t_0 \in N$, $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$, 使得 $\psi(a) = \varphi(t_0 a t_0)$, $\forall a \in N$. 因此，$a'\xi = t_0^2\xi = jt_0^2j\xi$. 由于 ξ 对 N' 也是分离的,所以，$a' = jt_0^2j$. 证毕.

引理 6.5.12 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，$\xi \in \mathscr{H}$, p, p' 分别是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{M'\xi}$, $\overline{M\xi}$ 上的投影,则 p 是 M 的有限投影，当且仅当，p' 是 M' 的有限投影.

证. 设 p 是 M 的有限投影,考虑 $pp'\mathscr{H}$ 中的 vN 代数 $L = pp'Mp'p$, 于是 $\xi (\in pp'\mathscr{H})$ 对 L 分离且循环. 依命题 6.3.1, L 是有限的. 自然 L 也是 σ-有限的. 依命题 6.3.15, L 上有忠实的正规迹态 φ. 用 φ 产生 L 的 w^*-表示 $\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi\}$, 则 $N = \pi_\varphi(L)$ 将满足引理 6.5.11 的条件. 今 N 是有限的(因与 L $*$ 同构), 依引理 6.5.11, N' 也是有限的. 此外, L, N 都有循环且分离的矢,依定理 1.13.5, L 与 N 空间 $*$ 同构,因此, L' 也是有限的.

如果 $x' \in M'$, 使得 $pp'x'p'p = 0$, 则

$$0 = yp'x'p'p\xi = yp'x'p'\xi = p'x'p'y\xi, \ \forall y \in M,$$

但 $\overline{M\xi} = p'\mathscr{H}$, 因此 $p'x'p' = 0$. 这说明 $p'x'p' \to pp'x'p'p$ 是 $p'M'p'$ 到 L' 上的 $*$ 同构,从而, $p'M'p'$ 也是有限的,即 p' 是 M' 的有限投影. 证毕.

命题 6.5.13 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中半有限的 vN 代数,则 M' 也是半有限的.

证. 如不然，有非零中心投影 z, 使得 $M'z$ 纯无限. 这时，Mz 仍然半有限,因此可以设: M 半有限,而 M' 纯无限.

依定理 6.5.10, 有 M 的有限投影 p, 使得 $c(p) = 1$, 于是 M' 与 M'_p $*$ 同构. 因此又可以假定: M 有限,而 M' 纯无限.

任取 $\mathscr{H}$ 的非零矢 ξ，令 p，p' 分别是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{M'\xi}$，$\overline{M\xi}$ 上的投影．当然 p 是有限投影，依引理 6.5.12，p' 也是 M' 的非零有限投影，这与 M' 纯无限相矛盾．因此，M' 是半有限的．证毕．

命题 6.5.14 vN 代数 M 是半有限的，当且仅当，存在 vN 代数 N，使得 N 与 M * 同构，并且 N' 是有限的．

证．充分性．依命题 6.5.13，N 是半有限的，因此，M 也是半有限的．

今设 M 是半有限的，于是 M' 也半有限．依定理 6.5.10，有 M' 的有限投影 p'，而 $c(p')=1$．由于 M * 同构于 $M_{p'}$，取 $N=M_{p'}$ 即可．证毕．

命题 6.5.15 设 M 是半有限的 vN 代数，p 是 M 的投影，则 p 是有限的，当且仅当，在 M_+ 上存在半有限正规迹的完全集 $\mathscr{F}$，使得 $\varphi(p)<\infty$，$\forall\varphi\in\mathscr{F}$．

证．充分性．设投影 $q\leqslant p$，且 $q\sim p$，于是，

$$\varphi(p)=\varphi(q)<\infty,\ \varphi(p-q)=0,\ \forall\varphi\in\mathscr{F}.$$

但 $\mathscr{F}$ 是完全集的，因此，$p=q$．

今设 p 是有限的．依命题 6.5.7 的证明，存在非零中心投影 z，及 $(Mz)_+$ 上的半有限正规迹的完全集 $\mathscr{F}_z$，使得 $\varphi(pz)<\infty$，$\forall\varphi\in\mathscr{F}_z$．依 Zorn 辅理，可见有相互直交的中心投影族 $\{z_l\}$，及 $(Mz_l)_+$ 上的半有限正规迹的完全集 $\mathscr{F}_l$，使得

$$\sum_l z_l=1,\ \varphi_l(pz_l)<\infty,\ \forall\varphi_l\in\mathscr{F}_l,\ l$$

自然地将每个 $\varphi_l(\in\mathscr{F}_l)$ 扩张到 M_+ 上，令 $\mathscr{F}=\bigcup\limits_l\mathscr{F}_l$ 即满足要求．证毕．

命题 6.5.16 设 p 是 vN 代数 M 的有限投影，则 * 运算在 Mp 的有界球中是强算子连续的．

证．如代以考虑 $Mc(p)$，可以设 M 是半有限的．依命题 6.5.15，有 M_+ 上的半有限正规迹的完全集 $\mathscr{F}$，使得 $\varphi(p)<\infty$，$\forall\varphi\in\mathscr{F}$．

今设网 $x_l \xrightarrow{\text{强算子}} 0$，$\|x_l\| \leqslant 1$，$x_l p = x_l$，$\forall l$。对任意的 $\varphi \in \mathscr{F}$，$0 \leqslant a \in \mathfrak{M}_\varphi$，这里 $\mathfrak{M}_\varphi$ 是 φ 定义的理想，依命题 6.5.2，6.5.3，

$$\begin{aligned}|L_a\varphi(x_l x_l^*)| &= |\varphi(a x_l x_l^*)| = \varphi(x_l^* a x_l) \leqslant \|a\| \varphi(x_l^* x_l) \\ &= \|a\| L_p \varphi(x_l^* x_l) \to 0,\end{aligned}$$

因此只须证明 $[L_a\varphi \mid \varphi \in \mathscr{F},\ a \in (\mathfrak{M}_\varphi)_+]$ 在 M_* 中是稠的。若不然，则有M的非零元 x，使得

$$\varphi(ax) = 0,\ \forall \varphi \in \mathscr{F},\ a \in \mathfrak{M}_\varphi,$$

于是 $\varphi(x^* a x) = 0$，$\forall \varphi \in \mathscr{F}$，$a \in \mathfrak{M}_\varphi$。既然 $\varphi(\in \mathscr{F})$ 是半有限正规的，依命题 6.5.4 及 1.7.2，$\varphi(x^* x) = 0$，$\forall \varphi \in \mathscr{F}$。$\mathscr{F}$ 是完全的，因此，$x = 0$，矛盾。证毕。

为下节的需要，我们讨论一下，可分 Hilbert 空间中的半有限且真无限的 vN 代数。

引理 6.5.17 设 $\mathscr{H}$ 是可分 Hilbert 空间，M 是 $\mathscr{H}$ 中半有限且真无限的 vN 代数，则存在M的相互直交、等价且有限的投影无穷列 $\{p_n\}$，使得 $\sum_n p_n = 1$。

证．设 q 是M的任意非零有限投影，$\{q_l\}_{l \in \Lambda}$ 是M的相互直交的投影极大族，使得 $q_l \sim q$，$\forall l$。设 $p = c(q) - \sum_{l \in \Lambda} q_l$，依定理 1.5.4，有中心投影 z，使得

$$pz \precsim qz,\ q(1-z) \precsim p(1-z),$$

由于 $\{q_l\}$ 的极大性，$qz \neq 0$，因此，$z_1 = c(q) z \neq 0$，并且

$$z_1 = \sum_{l \in \Lambda} q_l z_1 + p z_1,\ p z_1 \precsim q z_1.$$

如果 Λ 是有限的，依命题 6.4.5 z_1 是非零有限的中心投影，这与M真无限相矛盾。因此 Λ 是无穷的。由于 $\mathscr{H}$ 可分，Λ 是可数无穷的。由此，$z_1 \sim \sum_{l \in \Lambda} q_l z_1$，即有 $v \in M$，使得 $v^* v = \sum_{l \in \Lambda} q_l z_1$，$v v^* = z_1$。对每个 $l \in \Lambda$，令 $p_l = v q_l z_1 v^*$，则 $p_l p_{l'} = 0$，$\forall l \neq l'$，

$$p_l \sim (v q_l z_1)^* \cdot (v q_l z_1) = q_l z_1,\ \forall l$$

及 $\sum_{i\in A} p_i = z_1$. 因此，z_1 是可数无穷多个相互直交、等价的有限投影之和. 再依 Zorn 辅理，即可得证.

命题 6.5.18 设 M, N 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的vN代数，并且 M', N' 都是半有限且真无限，则每个M到N上的*同构Φ必是空间*同构.

证. 依命题 1.12.5，可以设有 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数 L，p', q' 是 L' 的投影，$c(p') = c(q') = 1$，使得 $M = L_{p'}$，$N = L_{q'}$ 以及 $\Phi(ap') = aq'$，$\forall a \in L$.

依引理 6.5.17，有 L' 的相互直交，等价的有限投影无穷列 $\{p'_i\}, \{q'_i\}$，使得 $\sum_i p'_i = p'$，$\sum_i q'_i = q'$. 写 $\{1,2,\cdots\} = \bigcup_n \Lambda_n$，使得 $\Lambda_n \cap \Lambda_m = \phi$，$\forall n \neq m$，
且每个 Λ_n 都是无穷的. 任意固定 n，有中心投影 z，使得

$$zq'_n \precsim z \sum_{i\in\Lambda_n} p'_i,\ (1-z)\sum_{i\in\Lambda_n} p'_i \precsim (1-z)q'_n.$$

对任意固定的 $s \in \Lambda_n$，令 $\Lambda'_n = \Lambda_n \backslash \{s\}$. 由于 Λ_n 是无穷的，因此，$\sum_{j\in\Lambda_n} p'_j \sim \sum_{j\in\Lambda'_n} p'_j$. 于是

$$\begin{aligned}(1-z)\sum_{j\in\Lambda_n} p'_j &\sim (1-z)\sum_{j\in\Lambda'_n} p'_j \\ &\leqslant (1-z)\sum_{j\in\Lambda_n} p'_j \precsim (1-z)q'_n.\end{aligned}$$

但 q'_n 是有限的，因此，$(1-z)\sum_{j\in\Lambda_n} p'_j = (1-z)\sum_{j\in\Lambda'_n} p'_j$，即

$$(1-z)p'_s = 0.$$

但易见 $c(p'_s) = c(p') = 1$，因此，$1-z = 0$. 从而

$$\sum_{j\in\Lambda_n} p'_j \succsim q'_n,\ \forall n;$$

所以，$p' \succsim q'$. 同样证明 $p' \precsim q'$，即 $p' \sim q'$. 这就说明Φ是空间*同构. 证毕.

注　本节见参考文献 [21], [91], [97],.

§6. 纯无限的 vN 代数

命题 6.6.1　1) 如果 $M=\sum_l \oplus M_l$, 则M是纯无限的，当且仅当，每个 M_l 是纯无限的；

2) 如果M纯无限，则 M' 也纯无限；

3) 设M是纯无限的，p, p' 分别是M, M' 的投影，则 M_p, $M_{p'}$ 也是纯无限的。

证. 1) 必要性显然. 反之若每个 $M_l=Mz_l$ 是纯无限的，p 是M的有限投影，则 $pz_l=0$, $\forall l$, 因此 $p=0$. 2) 由命题 6.5.13 立见. 3) 依 2), 只须证 $M_{p'}$ 是纯无限的. 但 $M_{p'}$ *同构于 $Mc(p')$, 后者自然纯无限，因此 $M_{p'}$ 纯无限. 证毕.

命题 6.6.2　vN 代数M是纯无限的，当且仅当，M_+ 上无非零的半有限正规迹.

证. 设 φ 是 M_+ 上非零的半有限正规迹，其支持 $s(\varphi)$ 是非零的中心投影. 依定理 6.5.8, $Ms(\varphi)$ 是半有限的，即M不能是纯无限的. 反之，如果有非零中心投影 z, 使得Mz半有限. $(Mz)_+$ 上自然有非零半有限正规迹，因此，M_+ 上也有非零的半有限正规迹. 证毕.

命题 6.6.3　vN 代数M是纯无限的，当且仅当，对M的每个非零投影 p, * 运算在Mp的有界球中不是强算子连续的.

证. 设M纯无限及 p 是M的非零投影. 由于 p 是无限的，有 $v\in M$, 使得 $v^*v=p, vv^*\lneq p$. 依引理 6.3.11, 有相互直交、等价的非零投影列 $\{e_n\}$, $e_n\leqslant p$, $\forall n$, 及 $e_n\xrightarrow{\text{强算子}}0$. 令 $w_n^*w_n=e_n$, $w_nw_n^*=e_1$, $\forall n$. 显然 $w_n\xrightarrow{\text{强算子}}0$, $\|w_n\|\leqslant 1$, $w_np=w_n$, $\forall n$, 但 $\{w_n^*\}$ 并不依强算子拓扑收敛于 0, 因此，* 运算在 Mp 的有界球中不是连续的. 反之，如果M不是纯无限的，至少包含一个非零有限投影 p. 依命题 6.5.16, * 运算在 Mp 的有界球中是强算子连续

的. 证毕.

命题 6.6.4 设M是σ-有限并且纯无限的 vN 代数，p, q 是M的投影，使得 $c(p)=c(q)$，则 $p\sim q$.

证. 依 Zorn 辅理，可以取相互直交的中心投影极大族 $\{z_l\}_{l\in\Lambda}$，使得 $qz_l\precsim pz_l$，$\forall l\in\Lambda$. 令 $z=\sum_{l\in\Lambda}z_l$，$p'=p(1-z)$，$q'=q(1-z)$，在 $M(1-z)$ 中对 p', q' 使用定理 1.5.4，并依 $\{z_l\}_{l\in\Lambda}$ 的极大性，可见 $p'\precsim q'$.

如果 $p'\neq 0$，可取相互直交的投影极大族 $\{q'_s\}_{s\in\mathrm{I}}$，使得 $q'_s\sim p'$，$q'_s\leqslant q'$，$\forall s\in\mathrm{I}$. 依定理 1.5.4，有M的中心投影 $z'\leqslant 1-z$，使得

$$\left(q'-\sum_{s\in\mathrm{I}}q'_s\right)z'\precsim p'z',$$

$$p'(1-z')\precsim\left(q'-\sum_{s\in\mathrm{I}}q'_s\right)(1-z')$$

依 $\{q'_s\}$ 的极大性，$p'z'\neq 0$. M_p 也是纯无限的，依定理 6.4.4，有M_p 的相互直交的投影无穷列 $\{e_n\}$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}e_n=p,\ e_n\sim p,\ \forall n.$$

于是

$$e_nz'\sim pz'=p'z'\sim q'_sz'\quad\forall n, s$$

M是σ-有限的，I 必是可数指标集，因此，

$$\sum_{n=2}^{\infty}e_nz'\succsim\sum_{s\in\mathrm{I}}q'_sz'.$$

当然 $e_1z'\sim p'z'\succsim\left(q'-\sum_{s\in\mathrm{I}}q'_s\right)z'$，因此，$pz'\succsim q'z'=qz'$. 但 $z'\neq 0$，且 $z'\leqslant 1-z$，这便与 $\{z_l\}_{l\in\Lambda}$的极大性相矛盾. 所以，$p'=0$，$p\leqslant z$. 于是

$$z\geqslant c(p)=c(q)\geqslant q,$$

因此，$p=pz=\sum_{l\in\Lambda}pz_l\succsim\sum_{l\in\Lambda}qz_l=qz=q$. 相仿证明 $p\precsim q$，

因此，$p \sim q$. 证毕.

命题 6.6.5 设M是 σ-有限的并且纯无限的 vN 代数，a 是M的非零元，则 $K(a) \neq \{0\}$，这里 $K(a)$ 定义如定理 6.2.7.

证 依命题 6.2.8 及 $K(a^*) = K(a)^*$，可设 $a^* = a$. 当然也可设 $\|a\| \leqslant 1$ 及 $a_+ \neq 0$（否则代以 $-a$）. 于是有 a 的非零谱投影 p，及正整数 n，使得

$$a \geqslant \frac{1}{n} p - (1-p).$$

如果有非零中心投影 $z \leqslant p$，则 $a \geqslant \dfrac{n+1}{n} z - 1$. 因此，$K(a)$ 中任意元将 $\geqslant \dfrac{n+1}{n} z - 1$，即见 $K(a) \neq \{0\}$. 从而可设 p 不包含任何非零中心投影.

代以考虑 $Mc(p)$，又可设 $c(p) = 1$. 由于 $p \geqslant 1 - c(1-p)$，及 p 不包含任何非零中心投影，因此，$c(1-p) = c(p) = 1$. 依命题 6.6.4，

$$p \sim (1-p) \sim 1,$$

依定理 6.4.4，有相互直交的投影 $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$，使得

$$p = \sum_{i=1}^{n+1} e_i, \quad e_i \sim p, \ \forall i.$$

又命 $e_0 = 1 - p$，于是有 $v_i \in M$，使得 $v_i^* v_i = e_i$，$v_i v_i^* = e_{i+1}$，$0 \leqslant i \leqslant n$. 再命 $v_{n+1} = v_0^* \cdots v_n^*$，则 $u = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n+1}$ 是M的酉元，且

$$u e_i u^{-1} = e_{i+1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad u e_{n+1} u^{-1} = e_0.$$

令

$$b = (n+2)^{-1} \sum_{j=0}^{n+1} u^j a u^{-j},$$

注意

$$\sum_{j=0}^{n+1} u^j e_i u^{-j} = 1, \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1,$$

因此，

$$(n+2)b \geqslant \sum_{j=0}^{n+1} u^j \Big(\frac{1}{n}(e_1+\cdots$$

$$+e_{n+1})-e_0\Big)u^{-j}=\frac{1}{n}.$$

从而，如果 $c\in K(b)$，则 $c \geqslant \frac{1}{n(n+2)}$. 但显然 $K(b)\subset K(a)$，所以，$K(a)\neq\{0\}$. 证毕.

命题 6.6.6 设M是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的纯无限 vN 代数，则M在 $\mathscr{H}$ 中必有循环并且分离的矢.

证. 设ξ是 $\mathscr{H}$ 的非零矢，令p是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{M'\xi}$ 上的投影，$\{p_l\}$ 是M的相互直交的投影极大族，使得 $p_l\sim p$，$\forall l$. 依定理 1.5.4，有M的中心投影 z，使得

$$\Big(1-\sum_l p_l\Big)z \lesssim pz,$$

$$p(1-z)\lesssim\Big(1-\sum_l p_l\Big)(1-z).$$

由于族 $\{p_l\}$ 的极大性，$z\neq 0$. 由于 $p_l\sim p(\forall l)$ 及 $\{p_l\}$ 相互直交，因此，$zc(p)=c(pz)\geqslant\sum_l p_l z$. 另一方面，

$$c(p)z=c(pz)\geqslant\Big(1-\sum_l p_l\Big)z,$$

因此，$c(p)z\geqslant z$，$c(pz)=z=c(z)$. 依命题 6.6.4，$pz\sim z$. 从而有 $\eta\in\mathscr{H}$，使得z是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{M'\eta}$ 上的投影.

依 Zorn 辅理及 $\mathscr{H}$ 的可分性，有M的相互直交的中心投影列 $\{z_n\}$，使得$\sum_n z_n=1$，并且对每个n，有 $\eta_n\in\mathscr{H}$，而 z_n 是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{M'\eta_n}$ 上的投影. 无妨设 $\eta=\sum_n \eta_n\in\mathscr{H}$，则$\eta$是$M'$的循环矢.

M' 也是 $\mathscr{H}$ 中纯无限的 vN 代数，因此，M在 $\mathscr{H}$ 中也有循环矢. 再依命题 1.13.4，M在 $\mathscr{H}$ 中有循环并且分离的矢. 证

毕.

命题 6.6.7 设 M, N 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数,并且 M', N' 是真无限的,则每个M到N上的 $*$ 同构 Φ 必是空间 $*$ 同构.

证. 设 z 是M的最大中心投影,使得 Mz 是纯无限的. 于是, $N\Phi(z)$ 也是纯无限的,以及 $M'(1-z)$, $N'(1-\Phi(z))$ 是半有限且真无限的.

依命题 6.6.6, Mz, $N\Phi(z)$ 都有循环并且分离的矢. 依定理 1.13.5, Φ: $Mz \to N\Phi(z)$是空间 $*$ 同构.

依命题 6.5.18, Φ: $M(1-z) \to N(1-\Phi(z))$ 也是空间 $*$ 同构. 所以, Φ: $M \to N$ 是空间 $*$ 同构. 证毕.

本命题显然是命题 6.5.18 的推广.

注 本节见参考文献 [12], [21], [91].

§7. 离散的 vN 代数

定理 6.7.1 设M是 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数,则下列等价:

1) M是离散的;

2) M' 是离散的;

3) M $*$ 同构于某个 vN 代数 N, 而 N' 是交换的;

4) 有M的交换投影 p, 使得 $c(p)=1$;

5) M的任意非零投影必包含非零交换投影.

证. 1) 推导 4): 取M的非零交换投影的极大族 $\{p_l\}$, 使得 $c(p_l)\cdot c(p_{l'})=0$, $\forall l \neq l'$, 并记 $p=\sum\limits_l p_l$. 如果 $1-c(p)\neq 0$, 由于M是离散的,则 $1-c(p)$ 又将包含非零交换投影,这与族 $\{p_l\}$ 的极大性相矛盾. 因此, $c(p)=1$. 此外,依命题 1.5.9,

$$p_l M p_{l'}=\{0\}, \ \forall l \neq l',$$

所以, p 也是交换投影.

4) 推导 2): 命 $L=M'_p$, 它是 $\mathscr{K}=p\mathscr{H}$ 中的 vN 代数,

且 $L' = M_p$ 是交换的. 由于 $c(p) = 1$, $\Phi(a') = a'p(\forall a' \in M')$ 是 M' 到 L 上的 * 同构. 今设 p' 是 M' 的任意非零投影,

$$0 \neq \xi \in \Phi(p')\mathscr{H},$$

q' 是 $\mathscr{H}$ 到 $\overline{L'\xi}$ 上的投影 ($\in L$). 由于 $\Phi(p')\mathscr{H} \supset \Phi(p')L'\xi = L'\Phi(p')\xi = L'\xi$, 因此, $q' \leqslant \Phi(p')$. 在 $q\mathscr{H}$ 中, vN 代数 $L'_{q'}$ 是交换的,且有循环矢 ξ, 依命题5.3.15, $(L'_{q'})' = L_{q'} = L'_{q'}$. 因此, $\Phi(p')$ 包含非零交换投影 q'. 进而, p' 包含 (M' 的) 非零交换投影. 所以, M' 是离散的.

2) 推导 3), 3) 推导 5) 实际都已寓于上面的推导之中. 5) 推导 1) 是显然的. 证毕.

注. 对任意的 vN 代数 M, 则由 $M \cup M'$ 生成的 vN 代数 N 是离散的. 事实上, $N' = M \cap M'$ 是交换的.

命题 6.7.2 1) 设 M 是离散的, p, p' 分别是 M, M' 的投影, 则 M_p, $M_{p'}$ 也是离散的;

2) 设 $M = \sum_l \oplus M_l$, 则 M 是离散的, 当且仅当, 每个 M_l 是离散的.

证. 1) 由 $M_{p'}$ * 同构于 $M_{c(p')}$, 可见 $M_{p'}$ 是离散的. 又 $(M_p)' = M'_p$, 因此, M_p 也是离散的.

2) 依离散 vN 代数的定义立见. 证毕.

命题 6.7.3 设 M 是离散的因子, 则 M * 同构于 $B(\mathscr{H})$, 这里 $\mathscr{H}$ 是某个 Hilbert 空间.

证. 依定理 **6.7.1**, M 可 * 同构于某 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数 N, 而 N' 交换. 当然 N 也是因子, 因此

$$N' = \mathbf{C}, \ N = B(\mathscr{H}).$$

证毕.

命题 6.7.4 有限维的 c^*-代数必为若干个矩阵代数的直和.

证. 设 M 是有限维的 c^*-代数, 作为 Banach 空间, M 是自反的, 因此, M 也是 w^*-代数. M 的中心是有限维的, 因此可以找到 M 的相互直交的极小中心投影 $z_1, \cdots, z_m$, 使得

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = 1.$$

令 $M_i = Mz_i$，则它是有限维的因子，显然 M_i 也是离散的，依命题 6.7.3，M_i* 同构于 $B(\mathscr{H}_i)$，这里 $\mathscr{H}_i$ 是有限维的 Hilbert 空间，$1 \leqslant i \leqslant m$. 所以，$M*$ 同构于若干个矩阵代数的直和. 证毕.

引理 6.7.5 设 p, q 是 vN 代数M的投影，且 p 是交换的，及 $c(q) \geqslant p$，则 $p \precsim q$

证. 依定理 1.5.4，有中心投影 z，使得

$$qz \precsim pz,\ p(1-z) \precsim q(1-z).$$

设 $qz \sim p_1 \leqslant pz$，依命题 1.5.8，p_1 在 M_{pz} 中的中心复盖是 $c(p_1)pz$，但 M_{pz} 是交换的，因此，

$$p_1 = c(p_1)pz = c(qz)pz = c(q)pz = pz,$$

即 $qz \sim pz$. 从而 $p \precsim q$. 证毕.

引理 6.7.6 设M是$\mathscr{H}$中的 vN 代数，$\{p_l | l \in \Lambda\}$，$\{q_r | r \in \mathrm{I}\}$是$M$的相互直交，等价的交换投影族，并且 $\sum_{l \in \Lambda} p_l = \sum_{r \in \mathrm{I}} q_r = 1$，则 $^{\#}\Lambda = {}^{\#}\mathrm{I}$.

证. 显然 $c(p_l) = c(q_r) = 1$，依引理 6.7.5，$p_l \sim q_r$，$\forall l \in \Lambda$，$r \in \mathrm{I}$.

如果 $^{\#}\Lambda < \infty$，依命题 6.4.5，M是有限的 vN 代数，从而 $^{\#}\mathrm{I} < \infty$. 所以，$^{\#}\Lambda$ 与 $^{\#}\mathrm{I}$ 同时有限或无限.

首先考虑 $^{\#}\Lambda$，$^{\#}\mathrm{I}$ 有限的情况. 无妨设 $^{\#}\Lambda \leqslant {}^{\#}\mathrm{I}$，于是，

$$1 = \sum_{l \in \Lambda} p_l \sim \sum_{r \in \Lambda} q_r \leqslant \sum_{r \in \mathrm{I}} q_r = 1.$$

但M是有限的，因此，$^{\#}\Lambda = {}^{\#}\mathrm{I}$.

今设 Λ，I 为无限的指标集. 任意固定 $p \in \{p_l\}$，交换 vN 代数 M_p 是有限的，依命题 6.3.16 及 1.3.8，存在M的非零中心投影 z，使得 M_{pz} 是 σ-有限的. 代以考虑 Mz，$\{p_l z\}$，$\{q_r z\}$，可以设 $z = 1$. 今对于任意的 $l \in \Lambda$，M_{p_l} 是 $p_l\mathscr{H}$ 中 σ-有限的 vN 代数，依命题 1.14.2，有 $p_l\mathscr{H}$ 的可数子集 $\mathfrak{M}_l$，使得$[M'\mathfrak{M}_l]$在 $p_l\mathscr{H}$ 中

稠. 令 $I_l=\{r\in I|q_r\mathfrak{M}_l\neq 0\}$，由于 $\{q_r\}_{r\in I}$ 是相互直交的，易见 I_l 是 I 的可数子集，$\forall l\in\Lambda$. 现在指出 $I=\bigcup\limits_{l\in\Lambda}I_l$. 事实上，若有 $r\in I\setminus\bigcup\limits_{l\in\Lambda}I_l$，则 $q_r\mathfrak{M}_l=\{0\}$，$\forall l\in\Lambda$. 于是，$q_rM'\mathfrak{M}_l=\{0\}$，即 $q_rp_l=0$，$\forall l\in\Lambda$. 但 $\sum\limits_{l\in\Lambda}p_l=1$，因此，$q_r=0$，这不可能. 今由 $I=\bigcup\limits_{l\in\Lambda}I_l$ 及 I_l 是可数的 $(\forall l)$，可见 $^\#I\leqslant {}^\#\Lambda$. 同证 $^\#\Lambda\leqslant {}^\#I$，所以，$^\#\Lambda={}^\#I$. 证毕.

定义 6.7.7 vN 代数 M 称为 (I_n) 型的或者 n-齐次的，这里 n 可以是有限或无限的势，指存在 M 的相互直交、等价的交换投影族 $\{p_l|l\in\Lambda\}$，使得 $\sum\limits_{l\in\Lambda}p_l=1$，$^\#\Lambda=n$.

依引理 6.7.6，(I_n) 型的定义与 $\{p_l\}$ 的选取无关.

命题 6.7.8 1) (I_n) 型的 vN 代数必是 (I) 型的；

2) vN 代数 M 是 (I_n) 型的，当且仅当，M 空间 * 同构于 $N\bar{\otimes}B(\mathscr{H}_n)$，这里 N 是交换的 vN 代数，$\mathscr{H}_n$ 是 n 维的 Hilbert 空间. 特别，(I_n) 型的因子 * 同构于 $B(\mathscr{H}_n)$.

证. 1) 对定义 6.7.7 中的任意交换投影 p_l，必有 $c(p_l)=1$. 再依定理 6.7.1，(I_n) 型 vN 代数必是 (I) 型的.

2) 必要性由定义 6.7.7 及定理 1.5.6 立见. 反之设 $\{e_l|l\in\Lambda\}$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的直交规范基，这里 $^\#\Lambda=n$，令 p_l 是 $\mathscr{H}_n$ 到 $[e_l]$ 上的投影，则 $\{p_l|l\in\Lambda\}$ 是 $B(\mathscr{H}_n)$ 的相互直交、等价的交换投影族，且 $\sum\limits_{l\in\Lambda}p_l=1$. 由此，如果 N 是交换的 vN 代数，则 $N\bar{\otimes}B(\mathscr{H}_n)$ 是 (I) 型的. 证毕.

引理 6.7.9 设 $\{z_l\}$ 是 vN 代数 M 的相互直交的 n-齐次中心投影族，则 $z=\sum\limits_l z_l$ 也是 n-齐次的.

证. 设 $\{p_\beta^{(l)}|\beta\in I\}$ 是 Mz_l 的相互直交、等价的交换投影族，使得 $\sum\limits_{\beta\in I}p_\beta^{(l)}=z_l$，$^\#I=n$，$\forall l$. 令 $p_\beta=\sum\limits_l p_\beta^{(l)}$，则 $\{p_\beta|\beta\in I\}$

将是M的相互直交、等价的交换投影族，且 $\sum_{\beta\in I} p_\beta = z$，因此，$Mz$ 是 (I_n) 型的. 证毕.

引理 6.7.10 设 z_i 是 vN 代数M的 n_i-齐次的中心投影，$i=1, 2$，并且 $n_1 \neq n_2$，则 $z_1z_2 = 0$.

证. 设 $\{p_l^{(i)} | l \in A_i\}$ 是相互直交、等价的交换投影族，使得

$$\sum_{l\in A_i} p_l^{(i)} = z_i,\ {}^{\#}A_i = n_i,\ i = 1, 2.$$

于是 $\{p_l^{(1)}z_2 | l \in A_1\}$，$\{p_l^{(2)}z_1 | l \in A_2\}$ 也是相互直交、等价的交换投影族，且和都为 z_1z_2. 如果 $z_1z_2 \neq 0$，依引理 6.7.6 ${}^{\#}A_1 = {}^{\#}A_2$，这与 $n_1 \neq n_2$ 相矛盾. 因此，$z_1z_2 = 0$. 证毕.

定理 6.7.11 设M是 (I) 型的 vN 代数，则可以唯一分解为 $M = \sum_{n\in E}\oplus M_n$，这里 E 是某个不同势的集合，M_n 是 (I_n) 型的，$\forall n \in E$.

证. M 至少包含一个非零交换投影 p，取相互直交的投影极大族 $\{p_l\}$，使得 $p_l \sim p$，$\forall l$. 依定理 1.5.4，有中心投影 z，使得

$$(1-q)z \precsim pz,\ p(1-z) \precsim (1-q)(1-z)$$

这里 $q = \sum_l p_l$. 由 $\{p_l\}$ 的极大性，$z \neq 0$. 如果 $(1-q)z = 0$，则 $z = \sum_l p_l z$，可见 z 是齐次的中心投影. 如果 $(1-q)z \neq 0$，令 $z_1 = zc(1-q)$ 也是非零的中心投影. 设

$$(1-q)z \sim q_1 \leqslant pz,$$

依命题 1.5.8 及 pz 是交换投影，$q_1 = c(q_1)pz = pz_1$. 显然 $(1-q)z_1 = (1-q)z$，因此，

$$(1-q)z_1 \sim q_1 = pz_1 \sim p_l z_1,\ \forall l,$$

又 $z_1 = \sum_l p_l z_1 + (1-q)z_1$，因此，$z_1$ 是齐次的中心投影.

总之，M必有非零的齐次中心投影. 由 Zorn 辅理，可写 $1 = \sum_r z_r$，这里 $\{z_r\}$ 是相互直交的中心投影族，且每个 z_r 都是齐次

的. 再依引理 6.7.9，就可得到所要求的分解. 分解的唯一性由引理 6.7.10 立见. 证毕.

注 本节见参考文献 [55]，[57]，[59].

§8. 连续的与 (II) 型的 vN 代数

命题 6.8.1 vN 代数M是连续的，当且仅当，不存在非零中心投影 z，使得 Mz 是离散的. 特别，纯无限的 vN 代数是连续的.

证. 若M不是连续的，则M至少包含一个非零交换投影 p，令 $z = c(p)$，依定理 6.7.1，Mz 是离散的. 反之，如有非零中心投影 z，使得 Mz 是离散的，则 Mz 包含非零交换投影 p，p 自然也是M的交换投影，因此，M不是连续的. 证毕.

命题 6.8.2 1) 设 $M = \sum\limits_{l} \oplus M_l$，则$M$是连续或 (II) 型的，当且仅当，每个 M_l 是连续或 (II) 型的；

2) 设M是连续或 (II) 型的，则 M' 亦然；

3) 设M是连续或 (II) 型的，p，p' 分别是M，M' 的投影，则 M_p，$M_{p'}$ 也是连续或 (II) 型的.

证 1) 显然.

2) 设M是连续的，若 M' 有非零中心投影 z，使得 $M'z$ 离散. 依定理 6.7.1，$(M'z)' = Mz$ 也离散，这与命题 6.8.1 相矛盾. 因此，M' 也是连续的. 此外，依命题 6.5.13，如果M是 (II) 型的，则 M' 也是 (II) 型的.

3) 由 $(M_p)' = M'_p$ 及 2)，只须对 $M_{p'}$ 来证明. 但 $M_{p'}$ 与 $M_{c(p')}$* 同构，因此显然. 证毕.

定理 6.8.3 vN 代数M是连续的，必须且只须，M的每个投影可写成M的两个相互直交且等价的投影之和。

证. 充分性. 如果 p 是M的交换投影，依所设，可写 $p = p_1 + p_2$，这里 $p_1p_2 = 0$，且 $p_1 \sim p_2$. 于是 $c(p_1) = c(p)$. 又 $p_1 \leqslant p$ 及 p 是交换的，依命题 1.5.8，$p_1 = c(p_1)p = p$. 因此，$p = 0$，即M

是连续的。

今设M是连续的，p是M的任意非零投影。于是M_p不是交换的，从而M_p有非零投影q，使得$q \bar{\in} M_p \cap M_p'$。依定理1.5.4，有$M$的中心投影$z$，使得$qz \lesssim (p-q)z$，$(p-q)(1-z) \lesssim q(1-z)$。如果$qz = (p-q)(1-z) = 0$，于是，$q = p - pz \in M_p \cap M_p'$，矛盾。因此有$qz \neq 0$，或者$(p-q)(1-z) \neq 0$。如果$qz \neq 0$，设$qz = r_1 \sim r_2 \leqslant (p-q)z$，自然$r_1 r_2 = 0$，及$r_1 + r_2 \leqslant p$。如果$(p-q)(1-z) \neq 0$，设$(p-q)(1-z) = r_1 \sim r_2 \leqslant q(1-z)$，自然$r_1 r_2 = 0$，及$r_1 + r_2 \leqslant p$。总之有非零投影$r_1$，$r_2$，使得$r_1 r_2 = 0$，$r_1 \sim r_2$，$r_1 + r_2 \leqslant p$。再对$(p - (r_1 + r_2))$施用同样手续，依Zorn辅理，可见$p$可写成$M$的两个相互直交且等价的投影之和。证毕。

定理 6.8.4 vN代数M是(II)型的，必须且只须，存在M的投影递减列$\{p_n\}$，使得p_1是有限的，$c(p_1) = 1$，并且$(p_n - p_{n+1}) \sim p_{n+1}$，$\forall n$。

证。设M是(II)型的，依定理6.5.10，存在有限投影p_1，使得$c(p_1) = 1$。又依定理6.8.3，可写

$$p_1 = p_2 + q_2, \quad p_2 q_2 = 0, \quad p_2 \sim q_2$$
$$\cdots$$
$$p_n = p_{n+1} + q_{n+1}, \quad p_{n+1} q_{n+1} = 0, \quad p_{n+1} \sim q_{n+1}$$
$$\cdots$$

所得之$\{p_n\}$即满足要求。

反之设满足条件的$\{p_n\}$存在。依定理6.5.10，M首先是半有限的。如果能够证明M_{p_1}是连续的，则$(M_{p_1})' = M'_{p_1}$也是连续的。但M'_{p_1} *同构于M'，因此，M'，从而M，也是连续的。所以可设$p_1 = 1$，及M是有限的。依命题6.3.16及6.8.2，还可以设M是σ-有限的，于是M上有忠实的正规迹态φ。如果p是M的交换投影，对每个n，依定理1.5.4，有中心投影z_n，使得

$$p_n z_n \lesssim p z_n, \quad p(1 - z_n) \lesssim p_n(1 - z_n).$$

设 $p_n z_n \sim q_n \leqslant p z_n$，由于 p 是交换的，因此，$q_n = c(q_n) p z_n = c(p_n) p z_n$。注意 $p_n \sim (p_{n-1} - p_n)$，因此，$c(p_n) \geqslant p_{n-1}$。递推可见 $c(p_n) = 1$。从而 $q_n = p z_n$，即 $p_n z_n \sim p z_n$，$p \precsim p_n$，$\forall n$。另一方面，由

$$p_n = p_{n+1} + (p_n - p_{n+1}),\quad p_{n+1} \sim (p_n - p_{n+1}),$$

因此，$\varphi(p_n) = 2\varphi(p_{n+1})$。但 $\varphi(p_1) = 1$，因此，$\varphi(p_n) = 2^{-n}$，$\forall n$。今 $\varphi(p) \leqslant \varphi(p_n) = 2^{-n}$，$\forall n$，所以，$\varphi(p) = 0$，$p = 0$，即 M 不包含任何非零的交换投影。证毕。

注 本节见参考文献 [12]，[55]。

§9. vN 代数张量积的类型

设 M_i 是 $\mathscr{H}_i$ 中的 vN 代数，$i = 1, 2$，$M_1 \bar{\otimes} M_2$ 是 $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ 中的 vN 代数。本节考察 M_1，M_2 的类型与 $M_1 \bar{\otimes} M_2$ 的类型之间的关系。

命题 6.9.1 $M_1 \bar{\otimes} M_2$ 是有限的，当且仅当，M_1，M_2 都是有限的。

证．设 $M_1 \bar{\otimes} M_2$ 是有限的，M_1 * 同构于 $M_1 \otimes 1_2$，因此，M_1 是有限的。同样 M_2 也是有限的。

今设 M_1，M_2 是有限的，依命题 6.3.16.，又可设 M_1，M_2 还是 σ-有限的．从而 M_1，M_2 上有忠实的正规迹态 φ_1，φ_2．于是有 $\{\xi_n^{(i)}\} \subset \mathscr{H}_i$，$\sum_n \|\xi_n^{(i)}\|^2 < \infty$，使得

$$\varphi_i(\cdot) = \sum_n \langle \cdot \xi_n^{(i)}, \xi_n^{(i)} \rangle,\quad i = 1, 2.$$

今考虑

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2(\cdot) = \sum_{n,m} \langle \cdot \xi_n^{(1)} \otimes \xi_m^{(2)}, \xi_n^{(1)} \otimes \xi_m^{(2)} \rangle,$$

它显然是 $M_1 \bar{\otimes} M_2$ 上的正规迹态．由于 φ_i 是忠实的，因此，$\{\xi_n^{(i)}\}$ 是 M_i' 的循环矢列 $i = 1, 2$。由此，$\{\xi_n^{(1)} \otimes \xi_m^{(2)}\}$ 将是 $M_1' \bar{\otimes} M_2'$ 一

$(M_1\bar{\otimes}M_2)'$ 的循环矢列. 所以, $\varphi_1\otimes\varphi_2$ 在 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 上也是忠实的及 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是有限的. 证毕.

命题 6.9.2 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是真无限的, 当且仅当, M_1 或者 M_2 是真无限的.

证. 必要性由命题 6.9.1 立见. 今设 M_1 是真无限的, 如果 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 并非真无限, 于是 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 上有正规迹态 φ, $\varphi|(M_1\otimes 1_2)$ 将产生 M_1 上一个正规迹态, 这与 M_1 真无限相矛盾. 证毕.

命题 6.9.3 设 M_1, M_2 都是半有限的, 则 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 也是半有限的.

证. 依命题 6.5.14, 可设 M_i' 是有限的, $i=1, 2$. 于是, $(M_1\bar{\otimes}M_2)'=M_1'\bar{\otimes}M_2'$ 是有限的. 因而 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是半有限的. 证毕.

引理 6.9.4 设 φ 是 vN 代数 N 的正部分 N_+ 上半有限的正规迹, $s(\varphi)$ 是 φ 的支持, $b\in Ns(\varphi)$ 使得 $\varphi(b^*b)<\infty$, 则 $a\to ba^*$ 在 N 的有界球中是强算子连续的.

证. 设网 $\{a_l\}\subset N$, $\|a_l\|\leqslant 1(\forall l)$, 且 $a_l\xrightarrow{\text{强算子}}0$, 要证明 $a_lb^*ba_l^*\xrightarrow{\text{弱算子}}0$.

由于 $a_lb^*ba_l^*\in Ns(\varphi)$ $(\forall l)$, 因此无妨设 $s(\varphi)=1$, 即 φ 是忠实的. 今依定理 6.5.8 下面的注, φ 将产生 N 忠实的 w^*-表示 $\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi\}$. 由于 $\|a_l\|\leqslant 1(\forall l)$, 只须对任意的 $x\in\mathfrak{N}$ (如命题 6.5.2 所定义), 证明 $\langle\pi_\varphi(a_lb^*ba_l^*)x_\varphi, x_\varphi\rangle=\varphi(x^*a_lb^*ba_l^*x)\to 0$. 由于 φ 是迹, $b\in\mathfrak{N}$, 依命题 6.5.2 及 6.5.3,

$$\begin{aligned}\varphi(x^*a_lb^*ba_l^*x)&=\varphi(ba_l^*xx^*a_lb^*)\leqslant\|x\|^2\varphi(ba_l^*a_lb^*)\\&=\|x\|^2\varphi(b^*ba_l^*a_l)\to 0.\end{aligned}$$

证毕.

命题 6.9.5 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是纯无限的, 当且仅当, M_1 或者 M_2 是纯无限的.

证. 如果 M_1, M_2 均非纯无限, 依命题 6.9.3, $M_1\bar{\otimes}M_2$ 也不能是纯无限的。

今设 M_1 是纯无限的. 如果 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 不是纯无限的, 于是

$(M_1\bar{\otimes}M_2)_+$ 上有非零的半有限正规迹 φ. 取 $0\lneqq b\in(M_1\bar{\otimes}M_2)$ $s(\varphi)$，使得 $\varphi(b^2)<\infty$.

如果写 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2=\sum_{l\in\Lambda}\oplus\mathscr{H}_l$，这里 $\mathscr{H}_l=\mathscr{H}_1$，$\forall l$，及 $^{\#}\Lambda=\dim\mathscr{H}_2$，相应 $b=(b_{ll'})_{l,l'\in\Lambda}$，其中 $b_{ll'}\in B(\mathscr{H}_1)$，$\forall l,l'$. 由于 $b\gneqq0$，必有指标 $l_0\in\Lambda$，使得 $b_1=b_{l_0l_0}\gneqq0$.

今考虑映象

$$M_1\xrightarrow{\alpha}M_1\bar{\otimes}M_2\xrightarrow{\beta}M_1\bar{\otimes}M_2\xrightarrow{\gamma}M_1,$$

其中 $\alpha(a_1)=a_1\otimes1_2$，$\forall a_1\in M_1$，$\beta(a)=ba^*$，$\forall a\in M_1\bar{\otimes}M_2$，$\gamma(a)=a_{l_0l_0}$，$\forall a\in M_1\bar{\otimes}M_2$. 依引理 6.9.4，

$$(\gamma\circ\beta\circ\alpha)(a_1)=b_1a_1^*,\ \forall a_1\in M_1,$$

在M_1的有界球中是强算子连续的. 由于 $b_1\gneqq0$，存在正数 λ 及 M_1 的非零投影 p_1，使得 $b_1^2\geqslant\lambda p_1$. 从而，$a_1\to p_1a_1^*$ 在M_1的有界球中是强算子连续的. 特别，$a_1\to a_1^*$ 在 M_1p_1 的有界球中是强算子连续的. 但M_1是纯无限的，$p_1\neq0$，这便与命题 6.6.3 相矛盾. 因此，$M_1\bar{\otimes}M_2$ 是纯无限的. 证毕.

系 6.9.6 如果 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是半有限的，则 M_1，M_2 都是半有限的.

命题 6.9.7 设 M_i 是 (I_{n_i}) 型的，$i=1,2$，则 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是 $(\mathrm{I}_{n_1n_2})$ 型的. 特别，M_1，M_2 是离散的，则 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 亦然.

证. 可设 $M_i=N_i\bar{\otimes}B(\mathscr{H}_i)$，这里 N_i 是交换的 vN 代数，$\mathscr{H}_i$ 是 n_i 维的 Hilbert 空间，$i=1,2$，于是，

$$M_1\bar{\otimes}M_2=(N_1\bar{\otimes}N_2)\bar{\otimes}B(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2),$$

依命题 6.7.8，$M_1\bar{\otimes}M_2$ 是 $(\mathrm{I}_{n_1n_2})$ 型的. 证毕.

命题 6.9.8 设M是 (I_n) 型的 vN 代数，则M是有限的，当且仅当，$n<\infty$.

证. 设 $M=N\bar{\otimes}B(\mathscr{H}_n)$，其中$N$是交换 vN 代数(必是有限的)，$\mathscr{H}_n$ 是 n 维 Hilbert 空间. 依命题 6.9.1，M 是有限的，当且仅当，$B(\mathscr{H}_n)$ 是有限的，这等价于 $n<\infty$. 证毕.

命题 6.9.9 设 M_1, M_2 都半有限，且 M_1 是连续的，则 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是 (II) 型的。

证. 依定理 6.8.4，存在 M_1 的有限投影递减列 $\{p_n\}$，使得 $c(p_1)=1_1$, $p_{n+1}\sim(p_n-p_{n+1})$, $\forall n$. 又 M_2 是半有限的，因此存在 M_2 的有限投影 q，使得 $c(q)=1_2$. 今命 $e_n=p_n\otimes q$，依命题 6.9.1，$\{e_n\}$ 将是 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 的有限投影递减列. 依定义 1.5.7，易见 e_1 在 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 中的中心覆盖是 1. 自然也有 $e_{n+1}\sim(e_n-e_{n+1})$, $\forall n$，依定理 6.8.4，$M_1\bar{\otimes}M_2$ 是 (II) 型的. 证毕.

命题 6.9.10 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是连续的，当且仅当，M_1 或者 M_2 是连续的.

证. 由于纯无限的代数必是连续的，依命题 6.9.5，可设 M_1, M_2 都是半有限的. 因此充分性由命题 6.9.9 立见.

今设 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是连续的，并且 M_1, M_2 是半有限的，如果 M_1, M_2 都不是 (II) 型的，依命题 6.9.7，$M_1\bar{\otimes}M_2$ 也不能是连续的，因此，必有 M_1 或者 M_2 是连续的. 证毕.

系 6.9.11 1) 如果 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是离散的，则 M_1, M_2 都是离散的; 2) 如果 $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是 (II) 型的，则 M_1, M_2 都是半有限的，并且 M_1 或者 M_2 是连续的.

综上所述，我们有:

定理 6.9.12 1) $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是有限的、半有限的、离散的，当且仅当，M_1 与 M_2 都是有限的、半有限的、离散的;

2) $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是真无限的、纯无限的、连续的，当且仅当，M_1 或者 M_2 是真无限的、纯无限的、连续的;

3) $M_1\bar{\otimes}M_2$ 是 (II) 型的，当且仅当，M_1 与 M_2 都是半有限的，并且 M_1 或者 M_2 是 (II) 型的.

注 本节见参考文献 [21], [72], [91].

第七章 因子的理论

本章是因子理论的初步，也是第六章的继续. §1 的维数函数系 F. J. Murray 与 J. von Neumann 在卅年代所定义，他们用维数函数值域的不同 (7.1.3)，把因子分成五类，这正是第六章的结果. 同时 §1 也指出维数函数与迹的关系 (7.1.6). §2 证明超有限的 (II_1) 型 (在 * 同构下) 是唯一的 (7.2.15). Murray 与 von Neumann 也曾指出非超有限 (II_1) 型因子的存在性，这说明把因子分成五类是不完全的. 正是由于这一点，因子理论在近代获得了重要的发展. 既然把因子分成了五类，自然要问它们是否实际地存在? 对于 (I_n), (I_∞) 型，是不待言的，而 (II) 型与 (III) 型因子的存在性并非显然，但它们的存在正是使得算子代数能够与其它代数尖锐地区别开来. §3 我们叙述构造 (II) 型与 (III) 型因子的标准办法——群测度空间的构造方法.

§1. 维数函数

依第六章的分类，因子只有五种类型:

1) (I_n) 型因子，即离散且有限的因子，它必 * 同构于 $B(\mathscr{H}_n)$，这里 $\dim\mathscr{H}_n = n < \infty$;

2) (I_∞) 型因子，即离散且无限的因子，它必 * 同构于 $B(\mathscr{H})$，这里 $\dim\mathscr{H} = \infty$;

3) (II_1) 型因子，即连续且有限的因子;

4) (II_∞) 型因子，即连续且无限的因子;

5) (III) 型因子，即纯无限的因子.

定义 7.1.1 设 M 是因子，M_+ 上的迹 φ 称为满足条件 (R) 的，指如果 M 包含非零的有限投影，则存在 M 的非零有限投影 p_0,

使得 $\varphi(p_0)<\infty$.

命题 7.1.2 设M是因子，φ是 M_+ 上满足条件（R）的忠实的正规迹.

1）设 p 是M的投影，则 p 是有限的或者无限的，当且仅当，$\varphi(p)<\infty$ 或者 $\varphi(p)=+\infty$；

2）设 p, q 是M的有限投影，则 $p\lesssim q$，当且仅当，$\varphi(p)\leqslant\varphi(q)$；

3）如果M包含非零的有限投影，则φ是半有限的；

4）除去正常数的倍数外，φ是唯一决定的.

证. 1）如果 p 是无限的，它也是真无限的，依定理 6.4.4，可写 $p=p_1+p_2$，这里 $p_1p_2=0$，且 $p\sim p_1\sim p_2$. 于是，$\varphi(p)=2\varphi(p)$. 由于φ是忠实的，因此，$\varphi(p)=+\infty$.

如果 p 是有限的，设 p_0 如定义 7.1.1，因子的任意两个投影都是可以比较的，如果 $p\lesssim p_0$，自然 $\varphi(p)<\infty$；如果 $p_0\lesssim p$，设 $\{p_l\}_{l\in\Lambda}$ 是相互直交的投影族，使得

$$p_l\sim p_0,\ p_l\leqslant p,\ \forall l\in\Lambda,\ \left(p-\sum_l p_l\right)\lesssim p_0,$$

由于 p 是有限的，$^{\#}\Lambda<\infty$，由此可见 $\varphi(p)<\infty$. 所以，p 有限或无限，当且仅当，$\varphi(p)<\infty$ 或 $\varphi(p)=+\infty$.

2）如果 $p\lesssim q$，自然 $\varphi(p)\leqslant\varphi(q)$. 反之，设 $\varphi(p)\leqslant\varphi(q)$，而 $q\sim p_1\lneqq p$，由于 p 是有限的及φ是忠实的，则 $\varphi(q)=\varphi(p_1)<\varphi(p)$，矛盾. 因此，$p\lesssim q$.

3）设$0\neq a\in M_+$，必有正数 λ 及投影 $p\in M$，使得 $a\geqslant\lambda p$. 由于M包含非零有限投影，M是半有限的，因此必有非零有限投影 $q\leqslant p$. 于是 $a\geqslant\lambda q\neq 0$，且 $0<\varphi(\lambda q)<\infty$，即$\varphi$是半有限的.

4）如果M是纯无限的，则M的任意非零投影是无限的，因此，M_+ 上忠实的正规迹只能是：$\varphi(0)=0$，$\varphi(a)=+\infty$，$\forall a\in M_+\{0\}$，即φ是唯一决定的.

如果M是半有限的，依 3) 及定理 6.5.8，φ即是 M_+ 上所存在的忠实的半有限正规迹。今设 φ_1，φ_2 是 M_+ 上两个忠实的半有限正规迹，需要证明 φ_1 与 φ_2 仅相差一个正常数的倍数.

首先如果M是有限的，由 1) 及命题 6.5.2，φ_1，φ_2 可扩张为M上忠实的正规迹. 令 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$，依定理 1.10.3 及 φ 也是迹，有 $t\in M$，$0\leqslant t\leqslant 1$，使得

$$\varphi_1(a) = \varphi(ta),\ \forall a\in M.$$

对任意的 $a, b\in M$，

$$\varphi(tab) = \varphi_1(ab) = \varphi_1(ba) = \varphi(tba) = \varphi(atb),$$

即 $\varphi((ta - at)b) = 0$. φ 也是忠实的，因此，$t\in M\cap M' = \mathbf{C}$. 进而可见，$\varphi_1$ 与 φ_2 仅相差一个正常数的倍数.

今若M是半有限且真无限的. 依定理 6.5.10，将存在有限投影的递增网 $\{q_l\}$，使得 $\sup\limits_l q_l = 1$. 依前段所证，对每个指标 l，有正常数 λ_l，使得

$$\varphi_1(a) = \lambda_l\varphi_2(a),\ \forall a\in (M_{q_l})_+,$$

但 $\{q_l\}$ 是递增的，因此 λ_l 将不依赖于指标 l，设 $\lambda_l = \lambda, \forall l$，则 $\varphi_1(q_laq_l) = \lambda\varphi_2(q_laq_l)$，$\forall a\in M_+$，$\forall l$. 另一方面，依命题 6.5.2，$\varphi_i(q_laq_l) = \varphi_i(a^{\frac{1}{2}}q_la^{\frac{1}{2}})$，又 φ_i 是正规的，因此，$\varphi_1(a) = \lambda\varphi_2(a)$，$\forall a\in M_+$. 证毕.

注. 依本命题及其证明可见：对于 (I) 型因子 $B(\mathscr{H})$，$B(\mathscr{H})_+$ 上唯一的(除去常数倍数外)忠实的半有限正规迹是

$$\mathrm{tr}(\cdot) = \sum_l \langle \cdot\xi_l, \xi_l\rangle,$$

这里 $\{\xi_l\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的直交规范基；对于有限型因子，其上有唯一的忠实的正规迹态；对于半有限因子，其正部份上有唯一的(除去常数倍数外)忠实的半有限正规迹；对于纯无限因子，情形是平凡的.

命题 7.1.3 设 M 是因子，P 表示 M 的投影全体，φ 如命题 7.1.2，$\mathscr{D} = \{\varphi(p)|p\in P\}$，则 φ 乘以适当正常数后，可以使得：

1) 当 $M(\mathrm{I}_n)$ 型 (n 可以是有限或无限的)时，

$$\mathscr{D} = \{0, 1, \cdots, n\}.$$

特别地，$M = B(\mathscr{H}_n)$，$\varphi(p) = \dim p\mathscr{H}_n$，$\forall p \in P$；

2）当 $M(\mathrm{II}_1)$ 型时，$\mathscr{D} = [0, 1]$；

3）当 $M(\mathrm{II}_\infty)$ 时，$\mathscr{D} = [0, +\infty]$；

4）当 $M(\mathrm{III})$ 型时，$\mathscr{D} = \{0, +\infty\}$。

证．1）已见于命题 7.1.2 下面的注．4）是显然的．

2）设 φ 为 M 上(唯一的)忠实的正规迹态．依定理 6.8.3，

$$\{2^{-n}k \mid 1 \leqslant k \leqslant 2^n, n = 0, 1, \cdots\} \subset \mathscr{D}.$$

对于任意的 $\lambda \in [0,1]$，可以取 $p_n \in P$，使得 $\varphi(p_n) = \lambda_n \uparrow \lambda$．依命题 7.1.2，$p_n \lesssim p_{n+1}$，$\forall n$．

取 $q_1 = p_1$．设 $q_1 \sim q \leqslant p_2$，依命题 6.3.2，$(1 - q_1) \sim (1 - q)$．因此，$(p_2 - q) \lesssim (1 - q_1)$．设 $(p_2 - q) \sim r \leqslant (1 - q_1)$，于是，$p_2 \sim q_1 + r$． 令 $q_2 = q_1 + r$，则 $q_2 \geqslant q_1$，$q_i \sim p_i$，$i = 1, 2$． 继续下去，可以得到 $\{q_n\}$，使得 $q_n \leqslant q_{n+1}$，$q_n \sim p_n$，$\forall n$．命 $q = \sup\limits_n q_n$，则 $\varphi(q) = \sup\limits_n \varphi(p_n) = \lambda$．所以，$\mathscr{D} = [0, 1]$．

3）设 $\{p_l\}$ 是 M 的有限投影递增网，且 $\sup\limits_l p_l = 1$．自然有 $\varphi(p_l) \nearrow +\infty = \varphi(1)$．又依2)，对每个 l，$[0, \varphi(p_l)] \subset \mathscr{D}$，因此，$\mathscr{D} = [0, +\infty]$．证毕．

引理 7.1.4 设 M 是有限的因子，P 是 M 的投影全体，D: $P \to [0, +\infty)$，并且满足：1）如果 $p_1 p_2 = 0$，则

$$D(p_1 + p_2) = D(p_1) + D(p_2);$$

2）对于 M 的任意酉元 u 及 $p \in P$，$D(upu^*) = D(p)$；3）$D(1) > 0$，则 $D = \varphi|P$，这里 φ 如命题 7.1.2．

证．如果 $M = B(\mathscr{H}_n)$，这里 $\dim \mathscr{H}_n = n < \infty$．依 2)，$D$ 将对 M 的所有极小投影取同一个值 λ． 依 1)，$D(1) = n\lambda$，因此，$\lambda > 0$．无妨设 $\lambda = 1$．由于 M 的任意投影必为若干个极小投影的和，因此，$D(P) = \{0, 1, \cdots, n\}$． 依命题 7.1.3，$D = \varphi|P$．

今设 M 是 (II_1) 型的． 无妨设 $D(1) = 1$，并设 φ 是 M 上忠

实的正规迹态. 如果 $p \sim q$, 依命题 6.3.2, $(1-p) \sim (1-q)$, 因此有酉元 u, 使得 $p = uqu^*$. 由此, 如果 $p \gtrsim q$, 则 $D(p) \geqslant D(q)$. 此外,依定理 6.8.3, 有 $p_{n,k} \in P$, 使得 $\varphi(p_{n,k}) = D(p_{n,k}) = 2^{-n}k$, $0 \leqslant k \leqslant 2^n$, $n = 0, 1, \cdots$. 今对任意的 $p \in P$, 可以取 $\{p_m\}$, 使得 $D(p_m) = \varphi(p_m) \nearrow \varphi(p)$. 依命题 7.1.2, $p \gtrsim p_m$, 因此, $D(p) \geqslant D(p_m) = \varphi(p_m) \to \varphi(p)$. 同样证明, $D(1-p) \geqslant \varphi(1-p)$, 所以, $D(p) = \varphi(p)$, $\forall p \in P$. 证毕.

定义 7.1.5 设 M 是因子, P 是 M 的投影全体, D: $P \to [0, +\infty]$ 称为维数函数,指 1) $D(p) = 0$, 当且仅当, $p = 0$; 2) 对任意的酉元 $u(\in M)$, 及 $p \in P$, $D(upu^*) = D(p)$; 3) 如果 $pq = 0$, 则 $D(p+q) = D(p) + D(q)$; 4) 如果 M 包含非零有限投影, 则有 $0 \neq p_0 \in P$, 使得 $D(p_0) < \infty$.

定理 7.1.6 设 M 是因子, P 是 M 的投影全体, $D(\cdot)$ 是维数函数,则 $D = \varphi | P$, 这里 φ 如命题 7.1.2.

证. 首先指出,如果 p 是无限的,则 $D(p) = +\infty$. 事实上, p 也是真无限的,依定理 6.4.4, 可写 $p = \sum_n p_n$, 这里

$$p_n p_m = \delta_{nm} p_n, \quad p_n \sim p, \quad \forall n, m.$$

显然存在酉元 u_{nm}, 使得 $u_{nm} p_n u_{nm}^* = p_m$, 因此, $D(p_n) = D(p_m)$, $\forall n, m$. 又 $D(p_n) > 0$, $\forall n$, 所以, $D(p) = +\infty$.

于是,如果 M 是无限的,则 $D = \varphi | P$.

如果 M 是半有限的, p_0 如定义 7.1.5, 依上面所证, p_0 必是有限投影. 因此可取 φ 如命题 7.1.2, 使得 $\varphi(p_0) = D(p_0)$. 我们来证明 $D = \varphi | P$, 仅须对有限投影 p 证明 $D(p) = \varphi(p)$. 令 $q = \sup\{p, p_0\}$, 依命题 6.4.5, q 也是有限投影. 依引理 7.1.4,

$$D | P \cap M_q = \varphi | P \cap M_q,$$

特别, $D(p) = \varphi(p)$. 证毕.

系 7.1.7 维数函数除去常数倍数外是唯一的.

注 本节见参考文献 [21], [74].

§2. 超有限的 (II_1) 型因子

设M是 (II_1) 型因子，于是M上有唯一忠实的正规迹态 φ，令

$$\|x\|_2 = \varphi(x^*x)^{1/2}, \ \forall x \in M,$$

易见 $\|\cdot\|_2$ 将是M上的范数，并且

$$\|x\|_2 = \|x^*\|_2 \leqslant \|x\|, \ \|xy\|_2 \leqslant \min\{\|x\|\|y\|_2, \|y\|\|x\|_2\}$$

$\forall x, y \in M$。依引理 1.11.2，在M的单位球 $(M)_1$ 中，$\|\cdot\|_2$ 产生的拓扑与强算子拓扑等价。

引理 7.2.1 设 p 是M的投影，$a^* = a \in (M)_1$，则存在 a 的谱投影 q，使得 $\|q - p\|_2 \leqslant 9\|a - p\|_2^{1/2}$。此外，如果 $a \geqslant 0$，则

$$\|a^{1/2} - p\|_2 \leqslant 13\|a - p\|_2^{1/4}.$$

证. 设 $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$，$a = \int_{-1}^{1} \lambda de_\lambda$，以及

$$q = 1 - e_{1-\varepsilon}, \ q_1 = e_\varepsilon - e_{-\varepsilon}, \ q_2 = 1 - q - q_1,$$

当 $\lambda \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \cup (1-\varepsilon, 1]$时，$|\lambda^2 - \lambda| \geqslant \varepsilon - \varepsilon^2 \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$，因此，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varepsilon\|q_2\|_2 &\leqslant \|(a^2 - a)q_2\|_2 \leqslant \|a^2 - a\|_2 \\ &\leqslant \|(a-p)a\|_2 + \|p(a-p)\|_2 \\ &\quad + \|p - a\|_2 \leqslant 3\|p - a\|_2,\end{aligned}$$

即$\|q_2\|_2 \leqslant \dfrac{6}{\varepsilon}\|p - a\|_2$。另一方面，$\|aq_1\| \leqslant \varepsilon$，$\|aq - q\| \leqslant \varepsilon$，从而，

$$\begin{aligned}\|a - q\|_2 &\leqslant \|aq - q\|_2 + \|aq_1\|_2 \\ &\quad + \|aq_2\|_2 \leqslant 2\varepsilon + \frac{6}{\varepsilon}\|a - p\|_2.\end{aligned}$$

如果 $\|a - p\|_2^{1/2} < \dfrac{1}{2}$，取 $\varepsilon = \|a - p\|_2^{1/2}$，则

$$\|a - q\|_2 \leqslant 8\|a - p\|_2^{1/2}.$$

从而，$\|q - p\|_2 \leqslant \|a - p\|_2 + \|a - q\|_2 \leqslant 9\|a - p\|_2^{1/2}$。如果$\|a -$

$p\|_2^{1/2} \geqslant \frac{1}{2}$，则直接有

$$\|q-p\|_2 \leqslant \|q\|_2 + \|a-p\|_2 + \|a\|_2 \leqslant 2 + (\|a\|_2 + \|p\|_2)^{1/2}\|a-p\|_2^{1/2} \leqslant \|a-p\|_2^{1/2}(4 + (\|a\|_2 + \|p\|_2)^{1/2}) \leqslant 9\|a-p\|_2^{1/2}.$$

今设 $a \geqslant 0$. 用前面的符号，有

$$\|a^{1/2}q - q\| \leqslant \varepsilon,\ \|a^{1/2}q_1\| \leqslant \varepsilon^{1/2},$$

于是由前面所证的$\|q_2\|_2 \leqslant \frac{6}{\varepsilon}\|a-p\|_2$.

$$\|a^{1/2} - q\|_2 \leqslant \|a^{1/2}q - q\|_2 + \|a^{1/2}q_1\|_2 + \|a^{1/2}q_2\|_2 \leqslant \varepsilon + \varepsilon^{1/2} + \|q_2\|_2 \leqslant \varepsilon + \varepsilon^{1/2} + \frac{6}{\varepsilon}\|a-p\|_2.$$

如果 $\|a-p\|_2^{1/2} < \frac{1}{2}$，取 $\varepsilon = \|a-p\|_2^{1/2}$，则

$$\|a^{1/2} - q\|_2 \leqslant 7\|a-p\|_2^{1/2} + \|a-p\|_2^{1/4} \leqslant 6\|a-p\|_2^{1/4}.$$

前面已证，这时$\|q-p\|_2 \leqslant 9\|a-p\|_2^{1/2}$，因此，

$$\begin{aligned}\|a^{1/2} - p\|_2 &\leqslant \|q-p\|_2 + \|a^{1/2} - q\|_2 \\ &\leqslant 9\|a-p\|_2^{1/2} + 6\|a-p\|_2^{1/4} \\ &\leqslant \left(6 + \frac{9}{\sqrt{2}}\right)\|a-p\|_2^{1/4} \\ &\leqslant 13\|a-p\|_2^{1/4}.\end{aligned}$$

如果 $\|a-p\|_2^{1/2} \geqslant \frac{1}{2}$，则直接有

$$\|a^{1/2} - p\|_2 \leqslant \|a^{1/2}\|_2 + \|p\|_2 \leqslant 2 \leqslant 13\|a-p\|_2^{1/2}.$$ 证毕.

引理 7.2.2 设 p, q 是M的投影，则有M的部分等距元 w，使得

$$w^*w \leqslant p,\ ww^* \leqslant q,\ \|w-p\|_2 \leqslant 14\|p-q\|_2^{1/4}.$$

证. 极分解 $qp = wb$，则 $0 \leqslant b \leqslant 1$， $w^*w \leqslant p$，$ww^* \leqslant q$. 注意 $\|b^2 - p\|_2 = \|p(q-p)p\|_2 \leqslant \|q-p\|_2$，依引理 7.2.1，$\|b-p\|_2 \leqslant 13\|b^2-p\|_2^{1/4} \leqslant 13\|q-p\|_2^{1/4}$. 于是，由 $wp = w$，

$$\|w-p\|_2 \leqslant \|w-qp\|_2 + \|qp-p\|_2$$
$$= \|w(p-b)\|_2 + \|(q-p)p\|_2 \leqslant \|p-b\|_2$$
$$+ \|q-p\|_2 \leqslant 13\|q-p\|_2^{1/4} + \|q-p\|_2,$$

当$\|q-p\|_2 \leqslant 1$时，即见$\|w-p\|_2 \leqslant 14\|q-p\|_2^{1/4}$；当$\|q-p\|_2 > 1$，则直接有$\|w-p\|_2 \leqslant 2 < 14\|q-p\|_2^{1/4}$. 证毕.

引理 7.2.3 设u是M的酉元，w是M的部分等距元，并且$uw^*w = w$，则$\|u-w\|_2^2 \leqslant 2\|w-1\|_2$.

证. 由于$(u-w)(u-w)^* = 1-ww^*$，于是

$$\|u-w\|_2^2 = \varphi(1-ww^*) \leqslant |\varphi(1-w)|$$
$$+ |\varphi(w(1-w^*))| \leqslant \|1-w\|_2$$
$$+ \|1-w^*\|_2 = 2\|w-1\|_2.$$

证毕.

引理 7.2.4 设p, q是M的等价的投影，则有M的酉元u，使得

$$q = upu^*, \quad \|u-1\|_2 \leqslant 36\|p-q\|_2^{1/8}.$$

证. 依引理 7.2.2，有M的部分等距元w，使得

$$w^*w \leqslant p, \quad ww^* \leqslant q, \quad \|w-p\|_2 \leqslant 14\|p-q\|_2^{1/4},$$

由于M是有限的，依命题 6.3.2，有$v \in M$，使得$v^*v = p-w^*w$，$vv^* = q-ww^*$.

又依引理 7.2.2，有部分等距元$w_1 \in M$，使得

$$w_1^*w_1 \leqslant 1-p, \quad w_1w_1^* \leqslant 1-q,$$
$$\|w_1-(1-p)\|_2 \leqslant 14\|p-q\|_2^{1/4},$$

依命题 6.3.2，$1-p \sim 1-q$，因此又有$v_1 \in M$，使得$v_1^*v_1 = 1-p-w_1^*w_1$，$v_1v_1^* = 1-q-w_1w_1^*$.

今命$u = w+v+w_1+v_1$，则u是M的酉元，并且$q = upu^*$. 注意$\|w+w_1-1\|_2 \leqslant \|w-p\|_2 + \|w_1-(1-p)\|_2 \leqslant 28\|p-q\|_2^{1/4}$，又$u(w+w_1)^*(w+w_1) = w+w_1$，依引理 7.2.3，$\|w+w_1-u\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|w+w_1-1\|_2^{1/2} \leqslant 8\|p-q\|_2^{1/8}$. 由此，

$$\|u-1\|_2 \leqslant \|w+w_1-u\|_2 + \|w+w_1-1\|_2$$
$$\leqslant 8\|p-q\|_2^{1/8} + 28\|p-q\|_2^{1/4},$$

当$\|p-q\|_2 \leqslant 1$时，即有$\|u-1\|_2 \leqslant 36\|p-q\|_2^{1/8}$. 如果$\|p-

$q\|_2 > 1$，则直接有$\|u-1\|_2 \leqslant 2 < 36\|p-q\|_2^{1/8}$. 证毕.

定义 7.2.5 M 称为满足有限逼近条件的，指对于M的任意有限个元 $a_1, \cdots, a_m$ 及 $\varepsilon > 0$，存在M的有限维 * 子代数N及N的元 $b_1, \cdots, b_m$，使得

$$\|a_i - b_i\|_2 \leqslant \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

在下面的引理 7.2.6—7.2.9 中，均设M满足有限逼近条件，并且所说M的子因子均包含M的单位元.

引理 7.2.6 对M的任意元 $a_1, \cdots, a_m$ 及 $\varepsilon > 0$，存在M的 (I_{2^n}) 型子因子 N (n 充分大)及N的元 $b_1, \cdots, b_m$，使得

$$\|a_i - b_i\|_2 \leqslant \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

证. 首先对 $\frac{\varepsilon}{2}$，有M的有限维 * 子代数A，及A的元$c_1, \cdots, c_m$，使得 $\|a_i - c_i\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，$1 \leqslant i \leqslant m$. 无妨设 $1 \in A$，依命题 6.7.4，有A的相互直交的中心投影 $\{z_i\}$，使得 $\sum_i z_i = 1$，且每个 $A_i = Az_i$ 是有限维的因子. 于是对每个 i，又有 A_i 的相互直交的极小投影 $\{p_j^{(i)}\}$，使得 $\sum_j p_j^{(i)} = z_i$. 在 A_i 中，$p_j^{(i)} \sim p_k^{(i)}$，于是有 $w_j^{(i)} \in A_i$，使得

$$w_1^{(i)} = p_1^{(i)}, \quad w_j^{(i)*} w_j^{(i)} = p_1^{(i)}, \quad w_j^{(i)} w_j^{(i)*} = p_j^{(i)}, \quad \forall j.$$

由此，$\{w_j^{(i)} w_k^{(i)*}\}_{j,k}$ 是 A_i 的矩阵单位，进而 $\{e_{jk}^{(i)} = w_j^{(i)} w_k^{(i)*}\}_{i,j,k}$ 是A的基. 因此，我们只须对充分小的 $\delta > 0$ (δ 依赖于 $\varepsilon, c_1, \cdots, c_m$)，寻找$M$的 (I_{2^n}) 型子因子 N，及N的元 $\{v_j^{(i)}\}$，使得

$$\|w_j^{(i)} - v_j^{(i)}\|_2 \leqslant \delta, \quad \forall i, j.$$

取充分大的 n，使得 $2^{-n} < \delta^2$. 由于M是 (II_1) 型因子，依命题 7.1.3，对每个 i，可找到相互直交的投影 $\{q_k^{(i)}\}$，使得

$$q_k^{(i)} \leqslant p_1^{(i)}, \quad \varphi(q_k^{(i)}) = 2^{-n}, \quad \forall k,$$

$$\varphi\left(p_1^{(i)} - \sum_k q_k^{(i)}\right) < 2^{-n}.$$

现在可取M的 (I_{2^n}) 型子因子 N，使得 $\{w_j^{(i)} q_k^{(i)}\}_{i,j,k} \subset N$. 如果

令 $v_i^{(i)} = w_i^{(i)} \sum_k q_k^{(i)}$，则

$$(w_i^{(i)} - v_i^{(i)})^*(w_i^{(i)} - v_i^{(i)}) = p_1^{(i)} - \sum_k q_k^{(i)}.$$

因此，$\|w_i^{(i)} - v_i^{(i)}\|_2^2 = \varphi\left(p_1^{(i)} - \sum_k q_k^{(i)}\right) < 2^{-n} < \delta^2$，$\forall i, j$. 证毕。

引理 7.2.7 对M的任意元 $a_1, \cdots, a_m$ 及投影 p，$\varepsilon > 0$，如果 $\varphi(p) = 2^{-n}$，则存在M的 (I_{2^r}) 型子因子 N，这里 $r \geqslant n$，及 N的元 $b_1, \cdots, b_m$，N的投影 q，使得

$$\|a_i - b_i\|_2 \leqslant \varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ \|p - q\|_2 \leqslant \varepsilon,$$
$$\varphi(q) = 2^{-n}.$$

证．依引理 7.2.6，可取M的 (I_{2^r}) 型子因子 N，这里 $r \geqslant n$ 及 N的元 $b_1, \cdots, b_{m+1}$，使得

$$\|a_i - b_i\|_2 \leqslant \delta,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ \|p - b_{m+1}\|_2 \leqslant \delta,$$

这里 $\delta > 0$ 待定，并无妨设 $b_{m+1}^* = b_{m+1}$. 记

$$b = 2b_{m+1}(1 + b_{m+1}^2)^{-1}.$$

显然 $b \in N$，$\|b\| \leqslant 1$. 注意 $p = 2p(1 + p)^{-1}$，因此，

$$\frac{1}{2}(b - p) = (1 + b_{m+1}^2)^{-1}(b_{m+1} - p)(1 + p)^{-1}$$
$$+ \frac{b}{4}(p - b_{m+1})p.$$

从而，$\|b - p\|_2 \leqslant \frac{5}{2}\delta$. 依引理 7.2.1，有 b 的谱投影 q_1，使得 $\|q_1 - p\|_2 \leqslant 9\|b - p\|_2^{1/2} \leqslant 15\delta^{1/2}$. 于是，

$$|\varphi(q_1) - 2^{-n}| = |\varphi(p - q_1)| \leqslant \|p - q_1\|_2 \leqslant 15\delta^{1/2}.$$

今取N的投影 q，使得 $\varphi(q) = 2^{-n}$，并且 $q \geqslant q_1$ 或者 $q \leqslant q_1$，则 $\|q - q_1\|_2^2 = |\varphi(q_1) - 2^{-n}| \leqslant 15\delta^{1/2}$. 由此，

$$\|q - p\|_2 \leqslant \|q - q_1\|_2 + \|q_1 - p\|_2$$
$$\leqslant 15\delta^{1/2} + \sqrt{15}\delta^{1/4}.$$

今只须取 $\delta > 0$，使得 $\delta \leqslant \varepsilon$，且 $15\delta^{1/2} + \sqrt{15}\,\delta^{1/4} \leqslant \varepsilon$，即得证。

引理 7.2.8 对M的任意元 $a_1, \cdots, a_m$，投影 p，这里 p 并满足：$\varphi(p) = 2^{-n}$，$pa_i = a_ip = a_i$，$1 \leqslant i \leqslant m$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在M的 (I_{2^r}) 型子因子 N，使得 $r \geqslant n$，$p \in N$，并且有N的元 $b_1, \cdots, b_m$，满足

$$pb_i = b_ip = b_i, \ \|a_i - b_i\|_2 \leqslant \varepsilon, \ 1 \leqslant i \leqslant m.$$

此外，如果 $p \in L$，这里L是M的 (I_{2^n}) 型子因子，则还可以取上面的 $N \supset L$。

证. 依引理 7.2.7，有M的 (I_{2^r}) 型子因子 A，这里 $r \geqslant n$，及A的元 $c_1, \cdots, c_m$，A的投影 q，使得$\|a_i - c_i\|_2 \leqslant \delta$，$1 \leqslant i \leqslant m$，$\|p - q\|_2 \leqslant \delta$，$\varphi(q) = 2^{-n}$，这里 $\delta > 0$ 待定. 于是 $p \sim q$，依引理 7.2.4，有M的酉元 u，

$$p = u^*qu, \ \|u - 1\|_2 \leqslant 36\|p - q\|_2^{1/8} \leqslant 36\delta^{1/8},$$

命 $N = u^*Au$，也是M的 (I_{2^r}) 型子因子，且 $p \in N$. 对 $1 \leqslant i \leqslant m$，设 $b_i = pu^*c_iup$，则 $b_i \in N$，$pb_i = b_ip = b_i$，及

$$\begin{aligned}\|a_i - b_i\|_2 &\leqslant \|u^*c_iu - a_i\|_2 \leqslant \|c_i - ua_iu^*\|_2 \\ &\leqslant \|c_i - a_i\|_2 + \|a_iu - ua_i\|_2 \leqslant \|a_i - c_i\| \\ &\quad + 2\|a_i\|\|u - 1\|_2 \leqslant \delta + 72\|a_i\|\delta^{1/8}.\end{aligned}$$

今取 $\delta > 0$，使得 $\delta + 72\delta^{1/8} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \|a_i\| \leqslant \varepsilon$ 即可。

今设 $p \in L$，这里L是M的 (I_{2^n}) 型子因子. 取L的相互直交的极小投影 $p = p_1, p_2, \cdots, p_{2^n}$. 依定理 1.5.6，$M$空间$*$同构于 $M_p \bar{\otimes} B(\mathscr{K})$，这里 $\dim \mathscr{K} = 2^n$，这空间$*$同构同时把L变成 $L_p \bar{\otimes} B(\mathscr{K}) = \mathrm{C}1_{p\mathscr{H}} \bar{\otimes} B(\mathscr{K})$ ($\mathscr{H}$ 是M的作用空间). 依前段所证，有M的 (I_{2^r}) 型子因子 A，这里 $r \geqslant n$，使得 $p \in A$，并且有A的元 $b_1, \cdots, b_m$，而 $\|a_i - b_i\|_2 \leqslant \varepsilon$，$pb_i = b_ip = b_i$，$1 \leqslant i \leqslant m$. 显然，$p, b_1, \cdots, b_m \in A_p$. 由于 $\varphi(p) = 2^{-n}$，A_p 应当$*$同构于 2^{r-n} 阶的矩阵代数. 令N是 $A_p \bar{\otimes} B(\mathscr{K})$ 依前面空间$*$同构的逆象，则N是M的 (I_{2^r}) 型子因子，并且 $p, b_1, \cdots, b_m \in N$. 此外，$L_p = \mathrm{C}1_{p\mathscr{H}} \subset A_p$，因此，$L \subset N$. 证毕.

引理 7.2.9 对M的任意元 $a_1, \cdots, a_m$，及 $\varepsilon > 0$，又若L是

M的 (I_{2^n}) 型子因子，则存在 M 的 (I_{2^r}) 型子因子N及N的元 $b_1, \cdots, b_m$，使得

$$r \geqslant n,\ L \subset N,\ \|a_i - b_i\|_2 \leqslant \varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant m.$$

证. 设 $\{p_j | 1 \leqslant j \leqslant 2^n\}$ 是L的相互直交的极小投影族，$\{w_j\} \subset L$，使得 $w_1 = p_1$，$w_j^* w_j = p_1$，$w_j w_j^* = p_j$，$\forall j$. 记 $p_1 = p$，$a_{ijk} = w_i^* a_k w_j$，则 $p a_{ijk} = a_{ijk} p = a_{ijk}$，$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant 2^n$，$1 \leqslant k \leqslant m$. 于是依引理 7.2.8，有$M$的 (I_{2^r}) 型子因子 N，使得 $r \geqslant n$，$L \subset N$，并有N的元 b_{ijk}，而 $\|a_{ijk} - b_{ijk}\|_2 \leqslant \delta$，$\forall i, j, k$，这里 $\delta > 0$，且 $2^{2n}\delta \leqslant \varepsilon$. 令 $b_k = \sum_{i,j} w_i b_{ijk} w_j^*$，显然 $b_k \in N$，$1 \leqslant k \leqslant m$. 注意

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{i,j} p_i a_k p_j = \sum_{i,j} w_i w_i^* a_k w_j w_j^* \\ &= \sum_{i,j} w_i a_{ijk} w_j^*, \end{aligned}$$

于是，$\|a_k - b_k\|_2 \leqslant \sum_{i,j} \|a_{ijk} - b_{ijk}\|_2 \leqslant 2^{2n}\delta \leqslant \varepsilon$，$1 \leqslant k \leqslant m$ 证毕.

命题 7.2.10 如果M是满足有限逼近条件的 (II_1) 型因子，并且M还是可数生成的，则存在

$$1 \in M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots \subset M,$$

这里 M_n 是M的 (I_{2^n}) 型子因子，$\forall n$，且 $\bigcup_n M_n$ 在M中是 $\sigma(M, M_*)$ 稠的.

证. 设 $\{a_n\}$ 是 M 的可数生成集，依引理 7.2.9，可以构作 $1 \in M_{r_1} \subset \cdots \subset M_{r_k} \subset \cdots \subset M$，这里对于每个 k，M_{r_k} 是M的 $(\mathrm{I}_{2^{r_k}})$ 型子因子，并且有 $b_1^{(k)}, \cdots, b_k^{(k)} \in M_{r_k}$，使得

$$\|b_i^{(k)} - a_i\|_2 \leqslant \frac{1}{k},\ 1 \leqslant i \leqslant k.$$

因此，$\bigcup_k M_{r_k}$ 在M中是 $\sigma(M, M_*)$ 稠的. 再将 $\{M_{r_k}\}$ 插补起来，就可得到所要求的 $\{M_n\}$. 证毕.

定义 7.2.11 vN 代数M称为超有限的，指存在正整数列$\{p_n\}$及$1\in M_{p_1}\subset\cdots\subset M_{p_n}\subset\cdots\subset M$，这里 M_{p_n} 是M的 (I_{p_n}) 型子因子，$\forall n$，使得$\bigcup\limits_n M_{p_n}$ 在M中是 $\sigma(M,M_*)$ 稠的。

依命题 3.8.3，这时必有 $p_n|p_{n+1}$，$\forall n$。

定义 7.2.12 vN 代数M称为有限逼近的，指存在M的有限维$*$子代数的递增列 $\{M_n\}$，使得$\bigcup\limits_n M_n$ 在M中是 $\sigma(M,M_*)$ 稠的。

定理 7.2.13 设M是 (II_1) 型因子，则下列等价：

1) M是超有限的；

2) M是有限逼近的；

3) M是可数生成的，并满足有限逼近条件，即对于M的任意元 $a_1,\cdots,a_m$ 及 $\varepsilon>0$，存在M的有限维$*$子代数 N 及 N 的 $b_1,\cdots,b_m$，使得 $\|a_i-b_i\|_2\leqslant\varepsilon$，$1\leqslant i\leqslant m$；

4) M是可数生成的，并满足超有限条件，即对于M的任意元 $a_1,\cdots,a_m$ 及 $\varepsilon>0$，存在M的子因子 $N(1\in N)$，及 N 的元 $b_1,\cdots,b_m$，使得 $\|a_i-b_i\|_2\leqslant\varepsilon$，$1\leqslant i\leqslant m$。

证．由 1) 推导 2)，2) 推导 3)，4) 推导 3) 均是显然的．引理 7.2.6 指出 3) 蕴含 4)．此外，命题 7.2.10 指出 3) 蕴含1)．证毕．

引理 7.2.14 设A是 (UHF) 代数(见定义 3.8.2)，则在A上存在唯一的迹态φ，即φ是态，同时$\varphi(ab)=\varphi(ba)$，$\forall a,b\in A$。

证．依命题 3.8.3，A是 $\{B(\mathscr{H}_{m_n})\}_n$ 的无穷张量积．每个 $B(\mathscr{H}_{m_n})$ 上自然有迹态 φ_n，再依命题 3.8.7，$\bigotimes\limits_n\varphi_n$ 便是A上的迹态．此外，$A=\overline{\bigcup\limits_n A_n}$，这里$1\in A_1\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots\subset A$，并且$A_n *$同构于 $B(\mathscr{H}_{p_n})$，$\forall n$．显然 $B(\mathscr{H}_{p_n})$ 上的迹态是唯一的，因此，A上的迹态是唯一的．证毕．

定理 7.2.15 所有的超有限的 (II_1) 型因子都是相互$*$同构的。

证．设 M_i 是超有限的 (II_1) 型因子，φ_i 是 M_i 上唯一忠实的正规迹态，它产生 M_i 忠实的循环 w^*-表示 $\{\pi_i, \mathscr{H}_i, \xi_i\}$，自然 $\pi_i(M_i)$ 也是超有限的 (II_1) 型因子，$i=1, 2$.

设 A 是 $\{2^n\}$ 型的 (UHF) 代数，依命题 7.2.10 及定理 7.2.13，将有 A 到 $\pi_i(M_i)$ 中的 $*$ 同构 Φ_i，使得 $\Phi_i(A)$ 在 $\pi_i(M_i)$ 中是 σ-稠的，由此，$\langle\Phi_i(\cdot)\xi_i, \xi_i\rangle$ 是 A 上的迹态，$i=1, 2$. 依引理 7.2.14，

$$\langle\Phi_1(a)\xi_1, \xi_1\rangle = \langle\Phi_2(a)\xi_2, \xi_2\rangle, \ \forall a\in A.$$

如果命 $u\Phi_1(a)\xi_1 = \Phi_2(a)\xi_2$, $\forall a\in A$，则 u 可扩张为 $\mathscr{H}_1$ 到 $\mathscr{H}_2$ 上的酉算子，并且 $u\Phi_1(a)u^* = \Phi_2(a)$, $\forall a\in A$. 因此，

$$u\pi_1(M_1)u^* = \pi_2(M_2),$$

进而，M_1 与 M_2 是 $*$ 同构的．证毕．

命题 7.2.16 设 M 是有限的 vN 代数，并且 M 是超有限的，则 M 是因子．

证．设 $M\subset B(\mathscr{H})$，z 是 M 的中心投影，并且 $z\neq 0, 1$，于是有 $\mathscr{H}$ 的单位矢 ξ, η，使得

$$z\xi=\xi, \ z\eta=0,$$

M 是超有限的，于是有 (UHF) 代数 $A\subset M$，$1\in A$，并且 A 在 M 中 σ-稠. M 是有限的，于是有 M 到其中心上的映象 T——中心值的迹(见定义 6.3.13)，则 $\langle T(\cdot)\xi, \xi\rangle$, $\langle T(\cdot)\eta, \eta\rangle$ 都是 A 上的迹态．依引理 7.2.14，$\langle T(a)\xi, \xi\rangle = \langle T(a)\eta, \eta\rangle$, $\forall a\in A$. 进而此等式在 M 上成立．特别地，

$$\begin{aligned}1 &= \langle z\xi, \xi\rangle = \langle T(z)\xi, \xi\rangle = \langle T(z)\eta, \eta\rangle\\ &= \langle z\eta, \eta\rangle = 0\end{aligned}$$

矛盾．所以，M 是因子．证毕．

命题 7.2.17 设 M 是超有限的 (II_1) 型因子，$\{p_n\}$ 是任意的正整数列，满足 $p_n | p_{n+1}$, $\forall n$, $p_n\to\infty$，则存在 $1\in M_{p_1}\subset\cdots\subset M_{p_n}\subset\cdots\subset M$，这里 M_{p_n} 是 M 的 (I_{p_n}) 型子因子，$\forall n$，并且 $\bigcup_n M_{p_n}$ 在 M 中是 $\sigma(M, M_*)$ 稠的．

证. 由于M是 (II_1) 型因子，依命题 7.1.3，可取

$$1\in N_1\subset\cdots\subset N_n\subset\cdots\subset M,$$

使得 N_n 是M的 (I_{p_n}) 型子因子，$\forall n$. 设N是$\bigcup\limits_n N_n$ 的弱算子闭包，由于 $N\subset M$，N也是有限的. 依命题 7.2.16，及 $p_n\to\infty$，N也是超有限的 (II_1) 型因子. 依定理 7.2.15，有N到M上的 * 同构 Φ，令 $M_{p_n}=\Phi(N_n)$，$\forall n$，则 $\{M_{p_n}\}$ 满足要求. 证毕.

注 本节见参考文献 [36]，[73]，[76]，[133].

§3. 构造 (II) 型与 (III) 型的因子

定义 7.3.1 (M, G, α) 称为协变系统，指M是 vN 代数，G是离散群，α 是G到 $\mathrm{Aut}(M)$ 中的(群)同态，这里 $\mathrm{Aut}(M)$ 是M到M上 * 自同构全体所组成的群.

今设 (M, G, α) 是协变系统，并且M的作用空间是 $\mathscr{H}$. 考虑 Hilbert 空间 $\mathscr{H}\otimes l^2(G)$，并定义

$$(\pi(a)\xi)(g)=\alpha_{g^{-1}}(a)\xi(g),\quad (\lambda(h)\xi)(g)=\xi(h^{-1}g)$$

$\forall g$，$h\in G$，$a\in M$，$\xi(\cdot)\in\mathscr{H}\otimes l^2(G)$. 我们有

命题 7.3.2 π 是M在 $\mathscr{H}\otimes l^2(G)$ 中忠实的 w^*-表示，λ 是G在 $\mathscr{H}\otimes l^2(G)$ 中的酉表示，并且

$$\lambda(g)\pi(a)\lambda(g)^*=\pi(\alpha_g(a)),\quad \forall g\in G,\ a\in M.$$

证. π 显然是M忠实的 * 表示. 设网 $\{a_l\}\subset M$，$\|a_l\|\leqslant 1$，$\forall l$，且 $a_l\xrightarrow{\text{弱算子}}0$，对任意的 $\xi(\cdot)\in\mathscr{H}\otimes l^2(G)$，由于

$$\begin{aligned}|\langle\pi(a_l)\xi,\xi\rangle| &= \left|\sum_{g\in G}\langle\alpha_{g^{-1}}(a_l)\xi(g),\xi(g)\rangle\right|\\ &\leqslant \sum_{g\in F}|\langle\alpha_{g^{-1}}(a_l)\xi(g),\xi(g)\rangle|\\ &\quad+\sum_{g\notin F}\|\xi(g)\|^2,\end{aligned}$$

这里F是G的有限子集，因此，$\pi(a_l)\xrightarrow{\text{弱算子}}0$，即 π 也是 w^*-表

示．至于等式 $\lambda(g)\pi(a)\lambda(g)^* = \pi(\alpha_g(a))$ 可以直接验算．证毕．

定义 7.3.3 $\mathscr{H}\otimes l^2(G)$ 中由 $\{\pi(a),\ \lambda(g)\,|\,a\in M,\ g\in G\}$ 所生成的 vN 代数称为M通过G的作用α的交叉积，记以 $M\otimes_\alpha G$，即 $M\otimes_\alpha G = \{\pi(a),\ \lambda(g)\,|\,a\in M,\ g\in G\}''$．

今记 $\tilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H}\otimes l^2(G)$，并写

$$\tilde{\mathscr{H}} = \sum_{g\in G}\oplus\mathscr{H}_g,\quad \mathscr{H}_g = \mathscr{H},\ \forall g\in G.$$

命 p_g 为 $\tilde{\mathscr{H}}$ 到 $\mathscr{H}_g$ 上的投影，于是任意的 $x\in B(\tilde{\mathscr{H}})$ 有阵表示 $x = (x_{g,h})_{g,h\in G}$，这里 $x_{g,h} = p_g x p_h^* \in B(\mathscr{H})$，$\forall g,\ h\in G$．对任意的 $a\in M$，$k\in G$，易见有公式

$$p_g\pi(a)p_h^* = \delta_{g,h}\alpha_{g^{-1}}(a),\quad p_g\lambda(k)p_h^* = \delta_{h,k^{-1}g},$$
$$p_g\pi(a)\lambda(k)p_h^* = \delta_{h,k^{-1}g}\alpha_{g^{-1}}(a),$$

$\forall g,\ h\in G$．

下面设 α 有这样的形式：

$$\alpha_g(a) = u_g a u_g^*,\ \forall g\in G,\ a\in M,$$

这里 $g\to u_g$ 是G在 $\mathscr{H}$ 中的酉表示，并且 $u_g M u_g^* = M$，$\forall g\in G$．

引理 7.3.4 对任意的 $x\in M\otimes_\alpha G$，存在唯一的定义于G上而取值于M的函数 b．使得

$$p_g x p_h^* = u_g^* b_{gh^{-1}} u_g,\ \forall g,\ h\in G.$$

如果定义 $\Phi(x) = b_e$，这里 e 是G的单位元，则Φ是 $M\otimes_\alpha G$ 到M的 $\sigma-\sigma$ 连续的正线性映象．

证．对 $a\in M$，$k\in G$，由于 $p_g\pi(a)\lambda(k)p_h^* = \delta_{h,k^{-1}g}u_g^* a u_g$，令

$$b_g = \begin{cases} a, & \text{如果 } g = k; \\ 0, & \text{如果 } g \neq k, \end{cases}$$

则 $$p_g\pi(a)\lambda(k)p_h^* = u_g^* b_{gh^{-1}} u_g,\ \forall g,\ h\in G.$$

一般对于 $\sum_i \pi(a_i)\lambda(k_i)$，这里 $a_i\in M$，$k_i\in G$，且 $k_i\neq k_j$，$\forall i\neq j$，令

$$b_g = \begin{cases} a_i, & \text{如果 } g = k_i; \\ 0, & \text{如果 } g \neq \text{任何的 } k_i, \end{cases}$$

则 $p_g\sum_i\pi(a_i)\lambda(k_i)p_h^*=u_g^*b_{gh^{-1}}u_g$，$\forall g,h\in G$。依命题 7.3.2，形如 $\sum_i\pi(a_i)\lambda(k_i)$ 的元在 $M\otimes_\alpha G$ 中是 σ-稠的，因此，$M\otimes_\alpha G$ 的任意元有所说的矩阵表示。

由于 $\Phi(x)=p_exp_e^*$，因此，Φ 是 $\sigma-\sigma$ 连续的。又若 $x=(u_g^*b_{gh^{-1}}u_g)\in M\otimes_\alpha G$，易见 $\Phi(xx^*)=\sum_{g\in G}b_gb_g^*$，所以，$\Phi$ 是正的。证毕。

引理 7.3.5 设 φ 是 M_+ 上忠实的半有限正规迹，并且它对 G 不变，即 $\varphi(\alpha_g(a))=\varphi(a)$，$\forall g\in G$，$a\in M_+$，则 $\psi=\varphi\circ\Phi$ 是 $(M\otimes_\alpha G)_+$ 上忠实的半有限正规迹，并且 $\varphi=\psi\circ\pi$。此外，ψ 是有限的，当且仅当，φ 是有限的。

证。如果 $x=(u_g^*b_{gh^{-1}}u_g)\in M\otimes_\alpha G$，则

$$\Phi(xx^*)=\sum_{g\in G}b_gb_g^*,\quad \Phi(x^*x)=\sum_{g\in G}u_g^*b_g^*b_gu_g.$$

因此，$\psi=\varphi\circ\Phi$ 是 $(M\otimes_\alpha G)_+$ 上的迹。又 Φ 是 $\sigma-\sigma$ 连续的，所以，ψ 也是正规的。如果 $\psi(xx^*)=0$，φ 是忠实的及 Φ 是正的，因此，$\Phi(xx^*)=0$，即 $b_g=0$，$\forall g\in G$。由此，ψ 是忠实的。等式 $\varphi=\psi\circ\pi$ 是显然的。

由于 φ 是半有限的，依命题 6.5.4，有 M_+ 的递增网 $\{a_l\}$，使得 $\sup_l a_l=1$，且 $\varphi(a_l)<\infty$，$\forall l$。于是 $\{\pi(a_l)\}$ 也是 $(M\otimes_\alpha G)_+$ 的递增网，$\sup_l\pi(a_l)=1$，及 $\psi(\pi(a_l))=\varphi(a_l)<\infty$，$\forall l$。对任意的 $x\in(M\otimes_\alpha G)_+$，$x\neq 0$，则有 l_0，使得 $0\lneq x^{\frac12}\pi(a_{l_0})x^{\frac12}\leqslant x$。这时依命题 6.5.2，

$$\begin{aligned}\psi(x^{\frac12}\pi(a_{l_0})x^{\frac12})&=\psi(\pi(a_{l_0})^{\frac12}x\pi(a_{l_0})^{\frac12})\\&\leqslant\|x\|\psi(\pi(a_{l_0}))<\infty,\end{aligned}$$

因此，ψ 也是半有限的。

最后，由 $\psi=\varphi\circ\Phi$，$\varphi=\psi\circ\pi$，可见 ψ 是有限的，当且仅当，φ 是有限的。证毕。

引理 7.3.6 如果M是交换的，并且 $\pi(M)$ 在 $M\otimes_\alpha G$ 中是极大交换的，则 $M\otimes_\alpha G$ 是半有限的，当且仅且，M_+ 上存在对G不变的忠实的半有限正规迹.

证．充分性由引理 7.3.5 及定理 6.5.8 立见．今设 $M\otimes_\alpha G$ 是半有限的，于是，$(M\otimes_\alpha G)_+$ 上存在忠实的半有限正规迹 ϕ．令 $\varphi=\phi\circ\pi$，易见φ是 M_+ 上忠实的正规迹．依命题 7.3.2，及ϕ是迹，

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_g(a))&=\phi(\pi(\alpha_g(a)))=\phi(\lambda(g)\pi(a)\lambda(g)^*)\\&=\phi(\pi(a))=\varphi(a)\end{aligned}$$

$\forall a\in M_+$，$g\in G$，因此，φ是 G-不变的.

现在证明这样的事实：对任意的 $x\in M\otimes_\alpha G$，$\pi(\Phi(x))\in\overline{K}_x^w$，这里 $K_x=Co\{\pi(u)^*x\pi(u)|u$ 是M的酉元$\}$，$\overline{K}_x^w$ 是 K_x 的弱算子闭包.

设 $x=(u_g^*b_{gh^{-1}}u_g)$ 如引理 7.3.4，u 是M的酉元，于是

$$p_g\pi(u)^*x\pi(u)p_g^*=u_g^*\Phi(x)u_g,\ \forall g\in G.$$

进而

$$p_gyp_g^*=u_g^*\Phi(x)u_g,\ \forall g\in G,\ y\in\overline{K}_x^w.$$

由于 $\overline{K}_x^w$ 是 $(B(\mathscr{H})$，弱算子拓扑)的紧凸子集，及M是交换的，依 Kakutani-Markov 不动点定理[1]，有 $x_0\in\overline{K}_x^w$，使得对M的任意酉元 u，有 $x_0=\pi(u)^*x_0\pi(u)$．但 $\pi(M)$ 在 $M\otimes_\alpha G$ 中是极大交换的，因此，$x_0\in\pi(M)$，即存在 $a\in M$，使得 $x_0=\pi(a)$．已经指出

$$p_gx_0p_g^*=u_g^*\Phi(x)u_g=\alpha_{g^{-1}}(\Phi(x)),\ \forall g\in G,$$

所以，$a=\Phi(x)$，即 $\pi(\Phi(x))=x_0\in\overline{K}_x^w$.

有了上面的事实之后，我们来证明φ的半有限性．设 a 是M的非零正元，于是 $\pi(a)$ 也是 $M\otimes_\alpha G$ 的非零正元，因此有 $M\otimes_\alpha G$ 的非零正元 $x\leqslant\pi(a)$，使得 $\phi(x)<\infty$．由于M是交换的，因此

$$0\leqslant y\leqslant\pi(a),\ \forall y\in\overline{K}_x^w.$$

---

1) 例见 [22].

特别地，$0 \leqslant \pi(\Phi(x)) \leqslant \pi(a)$. 因此，$0 \leqslant \Phi(x) \leqslant a$. 引理 7.3.4 的证明实际指出 Φ 在 $(M \otimes_\alpha G)_+$ 上是忠实的，因此，$\Phi(x) \neq 0$. 今只须证明 $\varphi(\Phi(x)) < \infty$.

记 $\pi(\Phi(x)) = x_0$，于是有网 $\{x_l\} \subset K_x$，使得 $x_l \xrightarrow{\text{弱算子}} x_0$. ϕ 是半有限的，依命题 6.5.4，有 $(M \otimes_\alpha G)_+$ 的递增网 $\{y_t\}$，$\sup\limits_t y_t = 1$，且 $\phi(y_t) < \infty$，$\forall t$. 依命题 6.5.2，对任意的指标 l，t

$$\phi(y_t x_l) = \phi(x_l^{1/2} y_t x_l^{1/2}) \leqslant \phi(x_l) = \phi(x),$$

依命题 6.5.3，$\phi(y_t x_0) = \lim\limits_l \phi(y_t x_l) \leqslant \phi(x)$. 进而由于 ϕ 是正规的，并依命题 6.5.2，

$$\varphi(\Phi(x)) = \phi(x_0) = \lim_t \phi(x_0^{1/2} y_t x_0^{1/2})$$
$$= \lim_t \phi(y_t x_0) < \infty.$$

证毕.

引理 7.3.7 如果 M 是 $\mathscr{H}$ 中极大交换的 vN 代数，并且 $M \cap M u_g = \{0\}$，$\forall g \neq e$，则 $\pi(M)$ 在 $M \otimes_\alpha G$ 中是极大交换的.

证. 设 $x = (u_g^* b_{gh^{-1}} u_g) \in (M \otimes_\alpha G) \cap \pi(M)'$，由于 $x\pi(a) = \pi(a)x$，可见 $b_g u_g a = a b_g u_g$，$\forall a \in M$，$g \in G$. 但 M 在 $\mathscr{H}$ 中是极大交换的，因此，$b_g u_g \in M \cap M u_g$，$\forall g \in G$. 依假定，$b_g = 0$，$\forall g \neq e$. 因此，$x = \pi(\Phi(x)) \in \pi(M)$. 证毕.

引理 7.3.8 设 $\pi(M)$ 在 $M \otimes_\alpha G$ 中是极大交换的，并且

$$\{a \in M \mid \alpha_g(a) = a,\ \forall g \in G\} = \mathbb{C} 1_{\mathscr{H}},$$

则 $M \otimes_\alpha G$ 是因子.

证. 设 x 是 $M \otimes_\alpha G$ 的中心元，它特别与 $\pi(M)$ 交换，因此有 $a \in M$，使得 $x = \pi(a)$. 依引理 7.3.4，易证对任意的 $k \in G$，

$$u(k) = (\delta_{k, g^{-1}h} u_k) \in (M \otimes_\alpha G)'.$$

特别地，$u(k)\pi(a) = \pi(a)u(k)$，因此，

$$u_k a u_k^* = a,\ \forall k \in G.$$

依假定，$a = \lambda 1_{\mathscr{H}}$. 所以，$M \otimes_\alpha G$ 是因子. 证毕.

定义 7.3.9 (G, Ω, μ) 称为群测度空间，指 Ω 是具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，μ 是 Ω 上正则 Borel 测度，G 是由 Ω 到 Ω 上的同胚所组成的可数离散群，并且 μ 对于 G 是拟不变的，即对任意的 $g\in G$，$\mu_g \prec \mu$，这里 $d\mu_g(\cdot) = d\mu(\cdot g)$，而 $\cdot \longrightarrow \cdot g$ 表示 g 对于 Ω 的作用。

显然，$\mu_g \sim \mu$，于是存在 Ω 上的可测函数 $r_g(\cdot)$，使得 $0 < r_g(t) < \infty$，$p.p.\mu$，$r_g(\cdot)d\mu(\cdot) = d\mu_g(\cdot)$. 由于 G 是可数的，我们有

$$r_{gh}(t) = r_h(tg)r_g(t),\ p.p.\mu,\ \forall g, h\in G.$$

定义 7.3.10 设 (G, Ω, μ) 是群测度空间.

1) (G,Ω,μ) 称为自由的，指对任意的 $g\in G$，$g \neq e$，

$$\mu(\{t\in\Omega \mid tg = t\}) = 0;$$

2) (G, Ω, μ) 称为遍历的，指若有 Ω 的 Borel 子集 E，使得对任意的 $g\in G$，有

$$\mu((E\cup Eg)\backslash(E\cap Eg)) = 0,$$

则 $\mu(E) = 0$ 或者 $\mu(\Omega\backslash E) = 0$;

3) (G, Ω, μ) 称为可测的，指存在 Ω 的 Borel 子集全体上的 σ-有限测度 ν，使得 ν 对于 G 是不变的，即 $d\nu(\cdot g) = d\nu(\cdot)$，$\forall g\in G$，并且 $\nu \sim \mu$;

4) (G, Ω, μ) 称为不可测的，指它不是可测的.

今设 (G, Ω, μ) 是群测度空间，令

$$\mathscr{H} = L^2(\Omega, \mu),\ M = \{m_f \mid f\in L^\infty(\Omega, \nu)\},$$

这里 m_f 是 $L^2(\Omega, \mu)$ 中乘以 f 的算子，依定理 5.3.13，M 是 $\mathscr{H}$ 中极大交换的 vN 代数. 对任意的 $g\in G$，令

$$(u_g f)(\cdot) = r_g(\cdot)^{\frac{1}{2}} f(\cdot g),\ \forall f\in \mathscr{H},$$

易见 $g\to u_g$ 是 G 在 $\mathscr{H}$ 中的酉表示，并且

$$u_g^* m_f u_g = m_{f_g}\quad \forall f\in L^\infty(\Omega, \mu),\ g\in G,$$

这里 $f_g(\cdot) = f(\cdot g^{-1})$. 如果命 $\alpha_g(m_f) = u_g m_f u_g^*$，则 (M, G, α) 是协变系统，并且有 $\tilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H}\otimes l^2(G)$ 中的 vN 代数：$M\otimes_\alpha G$.

引理 7.3.11 如果 (G, Ω, μ) 是自由且遍历的，则 $\pi(M)$

在 $M\otimes_\alpha G$ 中极大交换，$\{a\in M\,|\,\alpha_g(a)=a,\ \forall g\in G\}=\mathbf{C}1_{\mathscr{H}}$，以及 $M\otimes_\alpha G$ 是因子.

证。要证 $\pi(M)$ 在 $M\otimes_\alpha G$ 中是极大交换的，依引理 7.3.7，只须证 $M\cap Mu_g=\{0\}$，$\forall g\neq e$.

设 $g\neq e$，令 $F_g=\{t\in\Omega\,|\,tg=t\}$，由于 (G,Ω,μ) 是自由的，因此，F 是 μ-零的闭子集．如代以考虑 $\Omega\backslash F_g$，可以设 $F_g=\varnothing$。今设 $m_{f_1}=m_{f_2}u_g\in M\cap Mu_g$，这里 $f_1, f_2\in L^\infty(\Omega,\mu)$，并记 $E=\{t\in\Omega\,|\,f_1(t)\neq 0\}$．对每个 $t\in\Omega$，由于 $t\neq tg$，g 是 Ω 的同胚，因此有 t 的开邻域 V_t，使得 $V_t\cap V_tg=\varnothing$．自然 $\{V_t\,|\,t\in\Omega\}$ 是 Ω 的开复盖，但 Ω 具可数基，因此 Ω 有可数开复盖 $\{V_n\}$，且 $V_n\cap V_ng=\varnothing$，$\forall n$．今若 $\mu(E)>0$，必有 $\mu(V\cap E)>0$，这里 $V=$ 某个 V_n．进而可取 Ω 的 Borel 子集 $F\subset V\cap E$，使得 $0<\mu(F)<\infty$．由 $m_{f_1}\chi_F=m_{f_2}u_g\chi_F$，

$$f_1(t)\chi_F(t)=f_2(t)r_g(t)^{\frac{1}{2}}\chi_F(tg)\quad p.p.\mu,$$

当 $t\in F$ 时，由于 $F\subset E$，$f_1(t)\chi_F(t)\neq 0$，另一方面，$F\cap Fg=\varnothing$，因此 $tg\notin F$．这便与 $\mu(F)>0$ 相矛盾．所以，$\mu(E)=0$，即 $f_1=0$，$M\cap Mu_g=\{0\}$.

现在设 $f\in L^\infty(\Omega,\mu)$，$u_g^*m_fu_g=m_f$，$\forall g\in G$，于是，$f(tg)=f(t)$，$p.p.\mu$，$\forall g\in G$．无妨设 $f=\bar{f}$，如果 f 不是常数，则有实数 $r_1<r_2$，使得 $\mu(E)>0$，$\mu(\Omega\backslash E)>0$，这里 $E=\{t\in\Omega\,|\,r_1\leqslant f(t)<r_2\}$．另一方面，$f(tg)=f(t)$ $p.p.\mu$，及 G 是可数的，因此，

$$\mu((E\cup Eg)\backslash(E\cap Eg))=0,\ \forall g\in G.$$

由于 (G,Ω,μ) 是遍历的，因此 $\mu(E)=0$ 或者 $\mu(\Omega\backslash E)=0$，矛盾．所以，$f$ 是常数，即

$$\{a\in M\,|\,\alpha_g(a)=a,\ \forall g\in G\}=\mathbf{C}1_{\mathscr{H}}$$

再依引理 7.3.8，$M\otimes_\alpha G$ 是因子．证毕.

引理 7.3.12 设 (G,Ω,μ) 是自由且遍历的，并且有 Ω 的 Borel 子集全体上的 σ-有限测度 ν，ν 对 G 是不变的，$\nu\sim\mu$，以及 $\nu(\{t\})=0$，$\forall t\in\Omega$.

1) 如果 $0<\nu(\Omega)<\infty$，则 $M\otimes_\alpha G$ 是 (II_1) 型因子；

2) 如果 $\nu(\Omega)=+\infty$，则 $M\otimes_\alpha G$ 是 (II_∞) 型因子。

证．在 M_+ 上定义 $\varphi(m_f)=\int_\Omega f(t)d\nu(t)$．由于 $\nu\sim\mu$，因此 φ 是忠实的．设 $\{m_{f_l}\}$ 是 M_+ 的有界递增网，$m_f=\sup_l m_{f_l}$，依定理 5.3.13，$L^\infty(\Omega,\mu)_+$ 的网 $\{f_l\}$ 依 $\sigma(L^\infty(\Omega,\mu), L^1(\Omega,\mu))$ 收敛于 f．由于 $\nu\sim\mu$，这个收敛中的测度 μ 换以 ν 也成立．ν 是 σ-有限的，于是可写 $\Omega=\bigcup_n E_n$，$\{E_n\}$ 是 Ω 的 Borel 子集递增列，并且 $\nu(E_n)<\infty$，$\forall n$．由此，$\chi_{E_n}\in L^1(\Omega,\nu)$，及

$$\int f_l\chi_{E_n}d\nu\to\int f\chi_{E_n}d\nu,\ \forall n.$$

进而

$$\sup_l\int f_l d\nu=\int\sup_l f_l d\nu,$$

即 φ 是正规的．φ 的半有限性由 ν σ-有限立见．此外，由于 ν 是 G-不变的，

$$\varphi(u_g^*m_fu_g)=\int f(tg^{-1})d\nu(t)=\int fd\nu=\varphi(m_f),$$

$\forall m_f\in M_+$，$g\in G$，即 φ 也是 G-不变的．今依引理 7.3.6, 7.3.11，可见 $M\otimes_\alpha G$ 是半有限的因子．如果 $\nu(\Omega)<\infty$，φ 还是有限的，依引理 7.3.5，$M\otimes_\alpha G$ 还是有限的因子．如果 $\nu(\Omega)=+\infty$，φ 便不能是有限的，依引理 7.3.5 及命题 7.1.2，$M\otimes_\alpha G$ 是无限的因子．

今只须证明 $M\otimes_\alpha G$ 是连续的．任意取 M 的非零投影 p，使得 $\varphi(p)<\infty$．依引理 7.3.5，$\phi=\varphi\circ\Phi$ 是 $(M\otimes_\alpha G)_+$ 上忠实的半有限正规迹，并且 $\varphi=\phi\circ\pi$．由此，$\phi(\pi(p))<\infty$．依命题 7.1.2，$\pi(p)$ 将是 $M\otimes_\alpha G$ 的非零有限投影．如果 $M\otimes_\alpha G$ 不是连续的，可以认为 $M\otimes_\alpha G=B(\mathscr{H})$，这里 $\mathscr{H}$ 是某个 Hilbert 空间，于是 $\dim\pi(p)\mathscr{H}<\infty$．由此可见 M 将包含（非零的）极小投影 $(\leqslant p)$，这与 $\nu(\{t\})=0$ $(\forall t\in\Omega)$ 相矛盾．因此，$M\otimes_\alpha G$ 是连续的．证毕．

引理 7.3.13 设 (G,Ω,μ) 是自由且遍历的，但不可测，则

$M\otimes_\alpha G$ 是 (III) 型因子.

证. 如果 $M\otimes_\alpha G$ 是半有限的，引理 7.3.11 已指出 $\pi(M)$ 在 $M\otimes_\alpha G$ 中是极大交换的，于是依引理 7.3.6，M_+ 上将存在对 G 不变的忠实的半有限正规迹 φ. 对 Ω 的任意 Borel 子集 E，定义

$$\nu(E)=\varphi(m_{\chi_E}),$$

则 ν 是测度. φ 是忠实的，因此 $\nu\sim\mu$. φ 对 G 是不变的，所以 ν 对 G 也是不变的. φ 是半有限的，依 Zorn 辅理，存在 M 的相互直交投影族 $\{p_l\}_{l\in\Lambda}$，使得 $\sum_{l\in\Lambda}p_l=1$，$\varphi(p_l)<\infty$，$\forall l$. 又 Ω 具可数基，$\mathscr{H}=L^2(\Omega,\mu)$ 是可分的，因此 Λ 是可数的. 命 $p_l=m_{\chi_{E_l}}$，$\forall l$，则 $\nu(E_l)=\varphi(p_l)<\infty$，及

$$\nu\left(\Omega\setminus\bigcup_{l\in\Lambda}E_l\right)=\varphi\left(1-\sum_{l\in\Lambda}p_l\right)=0,$$

因此，ν 是 σ-有限的. 这样便与 (G,Ω,μ) 不可测的假定相矛盾. 所以，$M\otimes_\alpha G$ 是 (III) 型因子. 证毕.

引理 7.3.14 设 (G,Ω,μ) 是群测度空间，令

$$G_0=\{g\in G\,|\,r_g(t)=1,\ p.p.\mu\},$$

则 G_0 是 G 的子群. 如果 (G_0,Ω,μ) 是遍历的，并且 $G_0\neq G$，则 (G,Ω,μ) 是不可测的.

证. 显然 G_0 是 G 的子群. 今设 (G_0,Ω,μ) 是遍历的，并且 $G_0\neq G$. 如果有 Ω 的 Borel 子集全体上的 σ-有限测度 ν，ν 对 G 不变，且 $\nu\sim\mu$，于是对任意的 $g\in G_0$，由于 $\mu_g=\mu\sim\nu=\nu_g$，

$$\frac{d\mu}{d\nu}(t)d\nu(t)=d\mu(t)=d\mu(tg)$$

$$=\frac{d\mu}{d\nu}(tg)d\nu(tg)=\frac{d\mu}{d\nu}(tg)d\nu(t).$$

因此，$\frac{d\mu}{d\nu}(t)=\frac{d\mu}{d\nu}(tg)$，$p.p.\mu$，$\forall g\in G_0$. 今 (G_0,Ω,μ) 是遍历的，仿引理 7.3.11 的证明，$\frac{d\mu}{d\nu}(t)=$ 常数，$p.p.\mu$. 因此，μ 对 G 也是不变的，即 $G_0=G$，矛盾. 所以 (G,Ω,μ) 是不可测的.

证毕。

总结以上，我们有

定理 7.3.15 设 (G, Ω, μ) 是自由且遍历的群测度空间，命

$$\mathscr{H} = L^2(\Omega, \mu), \quad M = \{m_f | f \in L^\infty(\Omega, \mu)\}$$
$$(u_g f)(t) = r_g(t)^{\frac{1}{2}} f(tg), \quad \forall f \in \mathscr{H}, \ g \in G$$
$$\alpha_g(m_f) = u_g m_f u_g^*, \quad \forall f \in L^\infty(\Omega, \mu), \ g \in G,$$

其中 $d\mu_g(t) = r_g(t) d\mu(t)$, $\forall g \in G$.

1) 如果还有 Ω 的 Borel 子集全体上 σ-有限测度 ν，ν 对 G 不变，$\nu \sim \mu$，$\nu(\{t\}) = 0$，$\forall t \in \Omega$，则当 $0 < \nu(\Omega) < \infty$ 时，$M \otimes_\alpha G$ 是 (II_1) 型因子；当 $\nu(\Omega) = +\infty$ 时，$M \otimes_\alpha G$ 是 (II_∞) 型因子；

2) 设 $G_0 = \{g \in G | r_g(t) = 1, \ p.p.\mu\}$，如果 (G_0, Ω, μ) 也是遍历的，并且 $G_0 \neq G$，则 $M \otimes_\alpha G$ 是 (III) 型因子.

例 1. 一维圆周群 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$，依复数乘法，$\Omega$ 是紧交换群. 设 μ 是 Ω 上的 Haar 测度，且 $\mu(\Omega) = 1$，G 是 Ω 的可数无穷子群，G 对 Ω 的作用 α 即为复数相乘. 如果 E 是 Ω 的 Bore 子集，使得

$$\mu((E \cup Eg) \backslash (E \cap Eg)) = 0, \quad \forall g \in G,$$

$\{z^n | n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(\Omega, \mu)$ 的直交规范基，于是可写

$$\chi_E(z) = \sum_n \lambda_n z^n,$$

由此，

$$\sum_n \lambda_n z^n = \chi_E(z) = \chi_E(zg)$$
$$= \sum_n \lambda_n g^n z^n, \quad p.p.\mu, \ \forall g \in G,$$

所以，$\lambda_n = 0$，$\forall n \neq 0$，即 $\mu(E) = 0$ 或者 $\mu(\Omega \backslash E)$. 这表明 (G, Ω, μ) 是遍历的. 显然，(G, Ω, μ) 也是自由的，μ 对 G 是不变的，$\mu(\{z\}) = 0$，$\forall z \in \Omega$，依定理 7.3.15，$M \otimes_\alpha G$ 是 (II_1) 型因子.

例 2. $\Omega = \mathbb{R}$，依实数加法是局部紧交换群，设 μ 是 Ω 上的 Haar 测度，$\mu(\Omega) = +\infty$，G 是 Ω 的可数无穷稠子群(比如有理数

的全体），G 对 Ω 的作用 α 为实数相加．当然 (G, Ω, μ) 是自由的，μ 对 G 是不变的，$\mu(\{\eta\}) = 0$，$\forall \eta \in \Omega$．今设 E 是 Ω 的 Borel 子集，使得

$$\mu([E \cup (E+\eta)] \backslash [E \cap (E+\eta)]) = 0, \ \forall \eta \in G,$$

即 $u_\eta^* m_{\chi_E} u_\eta = m_{\chi_E}$，$\forall \eta \in G$，这里 $\eta \to u_\eta$ 是 Ω 在 $L^2(\Omega, \mu)$ 中的正则表示．由于 G 在 Ω 中是稠的，因此对任意的 $\eta \in \Omega$，$m_{\chi_E} u_\eta = u_\eta m_{\chi_E}$．从而 $\mu(E) = 0$，或者 $\mu(\Omega \backslash E) = 0$，即 (G, Ω, μ) 是遍历的．依定理 7.3.15，$M \otimes_\alpha G$ 是 (II_∞) 型因子．

例 3．设 (Ω, μ) 如例 2，定义

$$\alpha(\rho, \sigma)\eta = \rho\eta + \sigma, \ \forall \eta \in \Omega,$$

这里 $G = \{(\rho, \sigma) | \rho > 0, \ \rho, \sigma$ 均为有理数$\}$，于是 (G, Ω, μ) 是自由的，显然 μ 对 G 也是拟不变的．令 $G_0 = \{(1, \sigma) | \sigma$ 有理数$\}$，依例 2 所证，(G_0, Ω, μ) 是遍历的． 又显然 $G_0 \triangleleft G$，依定理 7.3.15，$M \otimes_\alpha G$ 是 (III) 型因子．

定理 7.3.16 在可分的 Hilbert 空间中，存在着五类因子：(I_n)，(I_∞)，(II_1)，(II_∞)，(III) 型的因子．

关于 (II_∞) 型因子，它实际上可以从 (II_1) 型因子构造出来．

命题 7.3.17 因子 M 是 (II_∞) 型的，当且仅当，$M = N \otimes B(\mathscr{H}_\infty)$，这里 N 是 (II_1) 型因子，$\mathscr{H}_\infty$ 是无穷维的 Hilbert 空间．

证．设 M 是 (II_∞) 型因子，任意取定 M 的非零有限投影 p，并命 $\{p_l\}_{l \in \Lambda}$ 是 M 的相互直交的投影极大族，使得 $p_l \sim p$，$\forall l$．于是 $q = 1 - \sum_{l \in \Lambda} p_l \precsim p$．依命题 6.4.5，指标集 Λ 是无穷的，从而，

$$1 = \sum_{l \in \Lambda} p_l + q \sim \sum_{l \in \Lambda} p_l,$$

因此，存在 M 的相互直交的投影族 $\{q_l\}_{l \in \Lambda}$，使得

$$\sum_{l \in \Lambda} q_l = 1, \ q_l \sim p, \ \forall l.$$

由此，$M = M_p \otimes B(\mathscr{H}_\infty)$，这里 M_p 是 (II_1) 型因子，$\dim \mathscr{H}_\infty = \# \Lambda$．反之，依定理 6.9.12，$(\mathrm{II}_1)$ 型因子与 (I_∞) 型因子的张量积

是 (II_∞) 型因子. 证毕.

关于 (II_1) 型因子,还有一个直接的构造方法.

设G是离散群, $g\to l_g$, r_g 分别是G在 $l^2(G)$ 中的左、右正则表示,即

$$(l_g f)(\cdot)=f(g^{-1}\cdot),\ (r_g f)(\cdot)=f(\cdot g),\ \forall f\in l^2(G).$$

命 $R(G)=\{l_g|g\in G\}''$, 它是 $l^2(G)$ 中的 vN 代数.

引理7.3.18 $R(G)$ 是 σ-有限的有限 vN 代数.

证. 对每个 $g\in G$, 令 $\varepsilon_g(\cdot)=\delta_{\cdot,g}$, 它是 $l^2(G)$ 的单位矢. 在 $R(G)$ 上定义$\varphi(a)=\langle a\varepsilon_e,\varepsilon_e\rangle$ $(\forall a\in R(G))$, 这里 e 是G的单位元. 于是,φ是 $R(G)$ 上的正规态. 如果 $a\in R(G)$, 使得 $a\varepsilon_e=0$, 则

$$0=r_{g^{-1}}a\varepsilon_e=ar_{g^{-1}}\varepsilon_e=a\varepsilon_g,\ \forall g\in G,$$

但$[\varepsilon_g|g\in G]$在 $l^2(G)$ 中稠,因此, $a=0$, 即φ也是忠实的. 此外, 易见 $\varphi(l_g l_h)=\varphi(l_h l_g)$, $\forall g, h\in G$, 即φ也是迹. 依命题6.3.15, $R(G)$ 是 σ-有限的有限 vN 代数. 证毕.

定义 7.3.19 离散群G称为无限共轭的, 简记为 $I.C.C.$, 指对任意的 $g\in G$, $g\neq e$, g 的共轭类 $\{hgh^{-1}|h\in G\}$ 是G的无穷子集.

命题 7.3.20 如果G是 $I.C.C.$ 群,则 $R(G)$ 是 $l^2(G)$ 中的 (II_1) 型因子.

证. 设 $a\in R(G)\cap R(G)'$, 则对任意的 $g\in G$,

$$a\varepsilon_e=l_g a l_{g^{-1}}\varepsilon_e=l_g a r_g\varepsilon_e=r_g l_g a\varepsilon_e,$$

于是, $(a\varepsilon_e)(\cdot)=(a\varepsilon_e)(g^{-1}\cdot g)$, $\forall g\in G$. 但 $a\varepsilon_e\in l^2(G)$, 及G是 $I.C.C.$ 的,因此 $(a\varepsilon_e)(h)=0$, $\forall h\neq e$, 即 $a\varepsilon_e=\lambda\varepsilon_e$, 某 $\lambda\in\mathbb{C}$. 仿引理 7.3.18 所证, $a=\lambda$, 即 $R(G)$ 是因子. 此外,显然 $R(G)$ 是无穷维的,依引理 7.3.18, $R(G)$ 是 (II_1) 型因子.证毕.

例. $\{1, 2\cdots\}$ 的有限置换全体组成的群,两个或更多个生成元的自由群都是 $I.C.C.$ 群.

命题 7.3.21 设G是 $I.C.C.$ 群,并且有G的有限子群递增

列$\{G_n\}$，使得 $G=\bigcup\limits_n G_n$，则 $R(G)$ 是超有限的(II_1)型因子.

证. 显然对每个 n，$[l_g|g\in G_n]$ 是 $R(G)$ 的有限维 * 子代数，并且 $\bigcup\limits_n [l_g|g\in G_n]$ 生成 $R(G)$，所以，$R(G)$ 是超有限的(II_1)型因子. 证毕.

例. G是$\{1,2,\cdots\}$的有限置换的全体，G_n仅变动$\{1,\cdots,n\}$，则 $G=\bigcup\limits_n G_n$.

注 本节见参考文献 [76]，[83]，[87].

第八章 Tomita-Takesaki 理论

Tomita-Takesaki 理论是算子代数近代理论的重要组成部分。在第一章的引言中，曾经提到第一次完全证实张量积的交换子定理的是 M. Tomita。他当时引进了广义 Hilbert 代数与模 Hilbert 代数的概念。M. Tomita 理论的第一个说明与发展，属于 M. Takesaki。本章只是 Tomita-Takesaki 理论的初步介绍及其特殊情况的讨论，而不涉及到权与广义 Hilbert 代数等理论。

§1 从 Hilbert 空间非退化的实线性闭子空间出发，引进单参数酉算子群，并用 KMS（Kubo-Martin-Schwinger）条件来刻划它(8.1.13)。§2 是 Tomita-Takesaki 理论的本质部分。对于具有循环并且分离矢的 vN 代数，说明它与它的交换子之间关系，并引人模自同构群(8.2.7)，继而用 KMS 条件来刻划模自同构群(8.2.10)。这些结果的证明系利用了 §1 的讨论，也就是 M. A. Rieffel 与 A. van Dale 的途径。§3 指出半有限 w^*-代数的模自同构群必是内自同构群(8.3.6)，这结果属于 M. Takesaki，在第十章中，我们将需要它。此外，8.3.3 说明相应于不同忠实的正规态的模自同群之间的关系，这也是十分重要的结果，它属于 A. Connes。

§1. KMS 条 件

首先分析复 Hilbert 空间的非退化实线性闭子空间所产生的结果。

定义 8.1.1 设 $\mathscr{H}$ 是复 Hilbert 空间，$\langle , \rangle$ 是它的内积，于是 $\mathscr{H}_r = (\mathscr{H}, \langle , \rangle_r = Re\langle , \rangle)$ 是实 Hilbert 空间。设 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的实线性闭子空间，$\mathscr{K}$ 称为非退化的，指

$$\mathscr{K} \cap i\mathscr{K} = \{0\}, \ (\mathscr{K} \dotplus i\mathscr{K}) \text{ 在 } \mathscr{H} \text{ 中稠.}$$

引理 8.1.2 设 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的非退化实线性闭子空间，p，q 分别为 $\mathscr{H}_r$ 到 $\mathscr{K}$，$i\mathscr{K}$ 上的投影(在 $\mathscr{H}_r$ 中是自伴的)，令 $a = p + q$，$p - q = jb$ 是 $(p - q)$ 在 $\mathscr{H}_r$ 中的极分解，则

1) $pi = iq$，$ip = qi$；

2) a 是 $\mathscr{H}$ 中的正算子，$0 \leqslant a \leqslant 2$，并且 $\{0, 2\}$ 不是 a 的点谱；

3) b 是 $\mathscr{H}$ 中的正算子，$b = a^{\frac{1}{2}}(2 - a)^{\frac{1}{2}}$，0 不是 b 的点谱并且 b 分别与 p，q，a，i 是交换的；

4) j 是 $\mathscr{H}_r$ 中的自伴酉算子，在 $\mathscr{H}$ 中是共轭线性的，即 $ji = -ij$，对任意的 ξ，$\eta \in \mathscr{H}$，

$$\langle j\xi, \eta\rangle = \langle j\eta, \xi\rangle$$

以及 $jp = (1 - q)j$，$jq = (1 - p)j$，$ja = (2 - a)j$.

证. 1) 设 $\eta \in \mathscr{K}$，依照 $\mathscr{H}_r = \mathscr{K} \oplus \mathscr{K}^{\perp}$ 分解 $i\eta = \zeta + \zeta^{\perp}$，即 $p(i\eta) = \zeta$. 由于 $-\eta = i\zeta + i\zeta^{\perp}$ 正是 $-\eta$ 依照

$$\mathscr{H}_r = i\mathscr{K} \oplus (i\mathscr{K})^{\perp}$$

的分解，因此

$$ip(i\eta) = i\zeta = -q\eta.$$

令若 ξ，$\eta \in \mathscr{K}$，于是

$$\begin{aligned} ip(\xi + i\eta) &= ip\xi + ip(i\eta) = i\xi - q\eta \\ &= q(i\xi - \eta) = qi(\xi + i\eta), \end{aligned}$$

$(\mathscr{K} \dotplus i\mathscr{K})$ 在 $\mathscr{H}_r$ 中是稠的，因此，$ip = qi$. 进而，$pi = iq$.

2) 由 1) 可见 a 是 $\mathscr{H}$ 中的(复)线性算子. 由于 a 在 $\mathscr{H}_r$ 中是自伴的，以及

$$\langle a\xi, \eta\rangle = \langle a\xi, \eta\rangle_r - i\langle a(i\xi), \eta\rangle_r, \ \forall \xi, \eta \in \mathscr{H}.$$

因此，a 在 $\mathscr{H}$ 中也是自伴的. 对任意的 $\xi \in \mathscr{H}$，

$$\langle a\xi, \xi\rangle = \langle a\xi, \xi\rangle_r = \langle p\xi, \xi\rangle_r + \langle q\xi, \xi\rangle_r \geqslant 0.$$

因此，$0 \leqslant a \leqslant 2$. 在上式中，如果 $a\xi = 0$，则 $p\xi = q\xi = 0$，即 ξ 在 $\mathscr{H}_r$ 中直交于 $(\mathscr{K} \dotplus i\mathscr{K})$，从而 $\xi = 0$；即 0 不是 a 的点谱. 如果 $\mathscr{K}^{\perp}$ 是 $\mathscr{K}$ 在 $\mathscr{H}_r$ 中的直交余，则 $\mathscr{K}^{\perp}$ 也是 $\mathscr{H}$ 的非退化实线性闭子空间. 相应于此，0 不是 $(2 - a)$ 的点谱，即 2 不

是 a 的点谱.

3) 由 1) 可见 $(p-q)^2$ 是 $\mathscr{H}$ 中的(复)线性算子,仿 2) 证明,$(p-q)^2$ 在 $\mathscr{H}$ 中也是正的,因此,b 是 $\mathscr{H}$ 中的正算子. 又显然 $(p-q)^2$ 与 p, q 交换,因此,b 与 p, q, a 交换. 显然,$b=a^{\frac{1}{2}}(2-a)^{\frac{1}{2}}$,因此 b 是可逆的. 此外,$(p-q)$ 在 $\mathscr{H}_r$ 中是自伴的,$p-q=jb$ 是 $(p-q)$ 在 $\mathscr{H}_r$ 中的极分解,因此,b 与 j 交换.

4) 依 $p-q=jb$, $(p-q)$ 在 $\mathscr{H}_r$ 中自伴,及 b 可逆,可见 j 是 $\mathscr{H}_r$ 中的自伴酉算子. 注意 $bi=ib$, $(p-q)i=-i(p-q)$,从而 $ji=-ij$. 对任意的 $\xi, \eta\in\mathscr{H}$,

$$\begin{aligned}\langle j\xi, \eta\rangle &= \langle j\xi, \eta\rangle_r + i\langle j(i\xi), \eta\rangle_r \\ &= \langle \xi, j\eta\rangle_r + i\langle i\xi, j\eta\rangle_r = \langle j\eta, \xi\rangle,\end{aligned}$$

最后,由 $bjp=(p-q)p=(1-q)(p-q)=b(1-q)j$,及 b 是可逆的,因此,$jp=(1-q)j$. 在 $\mathscr{H}_r$ 中取伴随,又有 $jq=(1-p)j$. 由此,$ja=(2-a)j$. 证毕.

引理 8.1.3 设 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的非退化实线性闭子空间,沿用引理 8.1.2 的各种记号,则 $\Delta=(2-a)a^{-1}=a^{-1}(2-a)$ 是 $\mathscr{H}$ 中(无界)非负可逆的自伴算子,并且对 $[0,+\infty)$ 上任意处处有限的可测函数 f, $jf(\Delta)j=\bar{f}(\Delta^{-1})$.

证. 依引理 8.1.2, $ja=(2-a)j$,因此,$j\Delta j=\Delta^{-1}$. 从而如果 $\{e_\lambda\}$ 是 Δ 的谱族,则 $\{je_\lambda j\}$ 是 Δ^{-1} 的谱族. 再由 $ji=-ij$,即可见 $jf(\Delta)j=\bar{f}(\Delta^{-1})$. 证毕.

引理 8.1.4 设 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的非退化实线性闭子空间,保持引理 8.1.2, 8.1.3 的各种记号,并定义算子

$$\mathscr{D}(s)=\mathscr{K}\dotplus i\mathscr{K},\ s(\xi+i\eta)=\xi-i\eta,\ \forall \xi, \eta\in\mathscr{K}$$

$$\mathscr{D}(s^+)=i\mathscr{K}^\perp\dotplus\mathscr{K}^\perp,\ s^+(i\xi_1+\eta_1)=i\xi_1-\eta_1,$$
$$\forall \xi_1, \eta_1\in\mathscr{K}^\perp,$$

这里 $\mathscr{K}^\perp$ 是 $\mathscr{K}$ 在 $\mathscr{H}_r$ 中的直交余,它也是 $\mathscr{H}$ 的非退化实线性闭子空间. 则

1) s, s^+ 是 $\mathscr{H}$ 中共轭线性的闭稠定算子;

2) s, s^+ 在 $\mathscr{H}_r$ 中互为伴随，并且 $jsj = s^+$；

3) $s = j\Delta^{\frac{1}{2}}$, $s^+ = j\Delta^{-\frac{1}{2}}$，并且分别是 s, s^+ 在 $\mathscr{H}_r$ 中的极分解. 特别，$\mathscr{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) = \mathscr{K} + i\mathscr{K}$.

证. 1) 显然.

2) 易见 $s^+ \subset$(s 在 $\mathscr{H}_r$ 中的伴随). 如果 ζ, ζ' 满足

$$\langle \xi - i\eta, \zeta \rangle_r = \langle \xi + i\eta, \zeta' \rangle_r, \quad \forall \xi, \eta \in \mathscr{K},$$

令 $\eta = 0$，则 $(\zeta - \zeta') \in \mathscr{K}^\perp$；令 $\xi = 0$，则 $i(\zeta + \zeta') \in \mathscr{K}^\perp$. 因此，$\xi_1 = \frac{1}{2i}(\zeta + \zeta') \in \mathscr{K}^\perp$, $\eta_1 = \frac{1}{2}(\zeta - \zeta') \in \mathscr{K}$，及

$$\zeta = i\xi_1 + \eta_1, \quad \zeta' = i\xi_1 - \eta_1,$$

所以，s^+ 是 s 在 $\mathscr{H}_r$ 中的伴随. 又 s 是闭的，因此，s 也为 s^+ 在 $\mathscr{H}_r$ 中的伴随. 由引理 8.1.2，

$$i\mathscr{K} = ip\mathscr{H} = (1 - q)i\mathscr{H} = (i\mathscr{K})^\perp = i\mathscr{K}^\perp,$$

同样 $i(i\mathscr{K}) = \mathscr{K}^\perp$. 由此，$isj = s^+$.

3) 如果 $\xi_1, \eta_1 \in \mathscr{K}^\perp$，于是 $p\eta_1 = 0$, $qi\xi_1 = ip\xi_1 = 0$，从而，$as^+(i\xi_1 + \eta_1) = (p - q)(i\xi_1 + \eta_1)$. 这说明 $as^+ = p - q = jb$. 由于 j 与 b 是交换的，$jsj = s^+$，因此，$ajs \subset b$，即 $js \subset \Delta^{\frac{1}{2}}$. 但 js 与 $\Delta^{\frac{1}{2}}$ 都是 $\mathscr{H}_r$ 中的自伴算子，因此，$s = j\Delta^{\frac{1}{2}}$. 再依引理 8.1.3，$s^+ = j\Delta^{-\frac{1}{2}}$. 由此，$s^+s = \Delta$, $ss^+ = \Delta^{-1}$，所以，$s = j\Delta^{\frac{1}{2}}$, $s^+ = j\Delta^{-\frac{1}{2}}$ 也是极分解. 证毕.

引理 8.1.5 $\{\Delta^{it} | t \in \mathbf{R}\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中单参数强算子连续的酉算子群，并且满足

$$j\Delta^{it} = \Delta^{it} j, \quad \Delta^{it}\mathscr{K} = \mathscr{K}, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

证. 依引理 8.1.3，$j\Delta^{it}j = \Delta^{it}$, $\forall t \in \mathbf{R}$. 此外，a 与 b 交换，因此，Δ^{it} 与 b 交换. 进而，Δ^{it} 与 $jb = p - q$ 交换. 自然 Δ^{it} 与 $a = p + q$ 交换. 因此，Δ^{it} 与 p 交换，即 $\Delta^{it}\mathscr{K} = \mathscr{K}$, $\forall t \in \mathbf{R}$. 证毕.

定义 8.1.6 设 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的非退化实线性闭子空间，称前面的算子 j, Δ 为相应于 $\mathscr{K}$ 的酉对合与模算子. 它们将在本章的理论中起重要作用.

现在进行 KMS 条件的讨论。

设 $\mathscr{K}$ 是(复) Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的非退化实线性闭子空间，沿用前面的一切号。

定义 8.1.7 $\mathscr{H}$ 中单参数强算子连续的酉算子群 $\{u_t|t\in \mathbf{R}\}$ 称为关于 $\mathscr{K}$ 满足 KMS 条件的，指对于任意的 $\xi, \eta\in\mathscr{K}$，有复值函数 $f(z)$，它在 $0\leqslant \mathrm{Im}\, z\leqslant 1$ 中连续有界，在 $0<\mathrm{Im}\, z<1$ 中解析，并且

$$f(t)=\langle\eta, u_t\xi\rangle,\ f(t+i)=\langle u_t\xi, \eta\rangle=\overline{f(t)},\ \forall t\in\mathbf{R},$$

这个 f 称为相应于 ξ, η 的 KMS 函数，显然是唯一的。

命题 8.1.8 $\{u_t\}$ 关于 $\mathscr{K}$ 满足 KMS 条件，当且仅当，对任意的 $\xi, \eta\in\mathscr{K}$，有复值函数 f，它在 $0\leqslant\mathrm{Im}\, z\leqslant\frac{1}{2}$ 中连续有界，在 $0<\mathrm{Im}\, z<\frac{1}{2}$ 中解析，并且对任意的 $t\in\mathbf{R}$，$f(t)=\langle\eta, u_t\xi\rangle$，$f\left(t+\frac{i}{2}\right)=\overline{f\left(t+\frac{i}{2}\right)}$.

证．必要性．设 f 是相应于 ξ, η 的 KMS 函数，令 $g(z)=\overline{f(\bar{z}-i)}$，易见 g 也是相应于 ξ, η 的 KMS 函数，因此，$f=g$. 特别地，

$$f\left(t+\frac{i}{2}\right)=g\left(t+\frac{i}{2}\right)=\overline{f\left(t+\frac{i}{2}\right)},\ \forall t\in\mathbf{R}.$$

充分性由 Schwartz 反射原理[1]立见．证毕．

定义 8.1.9 设 $\{u_t|t\in\mathbf{R}\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中单参数强算子连续的酉算子群，$\xi\in\mathscr{H}$ 称为关于 $\{u_t\}$ 是解析的，指存在整个复平面 $\mathbf{C}$ 上并取值于 $\mathscr{H}$ 的解析函数 $\xi(z)$，使得 $\xi(t)=u_t\xi, \forall t\in\mathbf{R}$.

引理 8.1.10 设 h 是 $\mathscr{H}$ 中非负可逆的自伴算子，对任意的 $\delta>0$，令

$$A(\delta)=\left\{\xi(z)\,\middle|\,\begin{array}{l}\xi(z)\text{是}-\delta\leqslant\mathrm{Im}\, z\leqslant 0\text{ 到 }\mathscr{H}\text{ 中的连续}\\ \text{有界函数，并且在}-\delta<\mathrm{Im}\, z<0\text{ 中解析}\end{array}\right\}$$

---

1) 例见Titchmarsh, E. C., The theory of functions, Oxford, 1952.

如果$\xi\in\mathscr{H}$，则$\xi\in\mathscr{D}(h^\delta)$，当且仅当，存在 $\xi(z)\in A(\delta)$，使得$\xi(t)=h^{it}\xi$，$\forall t\in\mathbf{R}$。 此外，这时对任意的z，$-\delta\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 0$，$\xi(z)=h^{iz}\xi$。

证。必要性。设z满足 $-\delta\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant 0$，于是，

$$\mathscr{D}(h^{iz})=\mathscr{D}(h^{-\operatorname{Im} z})\supset\mathscr{D}(h^\delta),$$

因此，$\xi\in\mathscr{D}(h^{iz})$。如果$\{e_\lambda\}$是$h$的谱族，则对$-\delta\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant 0$一致地有

$$\begin{aligned}&\|h^{iz}(e_n-e_{\frac{1}{n}})\xi-h^{iz}\xi\|^2\\&=\left(\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_n^\infty\right)e^{-2\operatorname{Im} z\cdot\ln\lambda}d\|e_\lambda\xi\|^2\\&\leqslant\|e_{\frac{1}{n}}\xi\|^2+\int_n^\infty e^{2\delta\ln\lambda}d\|e_\lambda\xi\|^2\longrightarrow 0,\end{aligned}$$

但 $z\longrightarrow h^{iz}(e_n-e_{\frac{1}{n}})\xi$ 是$\mathbf{C}$到$\mathscr{H}$中的解析函数，$\forall n$，因此，$\xi(z)=h^{iz}\xi$ 是在$-\delta\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant 0$中连续、且在$-\delta<\operatorname{Im} z<0$中解析的函数。此外，当 $-\delta\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant 0$，

$$\begin{aligned}\|h^{iz}\xi\|^2&=\left(\int_0^1+\int_1^\infty\right)e^{-2\operatorname{Im} z\cdot\ln\lambda}d\|e_\lambda\xi\|^2\\&\leqslant\|\xi\|^2+\|h^\delta\xi\|^2.\end{aligned}$$

所以，$\xi(z)=h^{iz}\xi\in A(\delta)$。

今设有 $\xi(z)\in A(\delta)$，使得 $\xi(t)=h^{it}\xi$，$\forall t\in\mathbf{R}$。对任意的$\eta\in\mathscr{D}(h^\delta)$，前已证 $\eta(z)=h^{iz}\eta\in A(\delta)$，从而，$f(z)=\langle\xi(z),\eta\rangle$，$g(z)=\langle\xi,h^{-i\bar{z}}\eta\rangle$ 都是在 $-\delta\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant 0$ 中连续有界、在$-\delta<\operatorname{Im} z<0$ 中解析的复值函数，并且 $f(t)=g(t)$，$\forall t\in\mathbf{R}$，因此，$f=g$。特别当 $z=-i\delta$ 时，

$$\langle\xi(-i\delta),\eta\rangle=\langle\xi,h^\delta\eta\rangle,\ \forall\eta\in\mathscr{D}(h^\delta).$$

所以，$\xi\in\mathscr{D}(h^\delta)$。证毕。

命题 8.1.11 $\xi(\in\mathscr{H})$ 是关于 $\{\Delta^{it}\}$ 的解析矢，当且仅当，$\xi\in\mathscr{D}$，这里Δ是关于$\mathscr{H}$的模算子，$\mathscr{D}=\cap\{\mathscr{D}(\Delta^z)\mid z\in\mathbf{C}\}=\cap\{\mathscr{D}(\Delta^n)\mid n\in\mathbf{Z}\}$。这时$\xi$对应的解析函数 $\xi(z)=\Delta^{iz}\xi$。

证。用引理 8.1.10 于Δ，Δ^{-1}立见。

命题 8.1.12 设 $\{u_t | t \in \mathbf{R}\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中单参数强算子连续的酉算子群，$\xi \in \mathscr{H}$，对每个 $r > 0$，令

$$\xi_r = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rs^2} u_s \xi ds,$$

则 ξ_r 关于 $\{u_t\}$ 是解析的，并且当 $r \to +\infty$ 时，$\|\xi_r - \xi\| \to 0$.

证. $\xi_r(z) = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(s-z)^2} u_s \xi ds$ 是 C 上取值于 $\mathscr{H}$ 的解析函数，并且

$$\xi_r(t) = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(s-t)^2} u_t u_{s-t} \xi ds = u_t \xi_r, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

因此，ξ_r 关于 $\{u_t\}$ 是解析的，$\forall r > 0$.

由于 $\sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rs^2} ds = 1$，对任意的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta > 0$，使得 $\|(u_t - 1)\xi\| < \varepsilon$，$\forall |t| < \delta$，于是当 r 充分大时，

$$\|\xi_r - \xi\| \leqslant \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-rs^2} \|(u_s - 1)\xi\| ds$$

$$+ 4\|\xi\| \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-rs^2} ds$$

$$< \varepsilon + \frac{4\|\xi\|}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{r}\delta}^{\infty} e^{-s^2} ds < 2\varepsilon.$$ 证毕.

定理 8.1.13 设 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的非退化实线性闭子空间，Δ 是关于 $\mathscr{K}$ 的模算子，则 $\{\Delta^{it} | t \in \mathbf{R}\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中唯一的单参数强算子连续的酉算子群，使得关于 $\mathscr{K}$ 满足 KMS 条件，并且对 $\mathscr{K}$ 是不变的.

证. 引理 8.1.5 已指出 $\Delta^{it}\mathscr{K} = \mathscr{K}$，$\forall t \in \mathbf{R}$. 今设 $\xi, \eta \in \mathscr{K}$，依引理 8.1.4 $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}(\Delta^{\frac{1}{2}})$，再由引理 8.1.10，

$$f(z) = \langle \eta, \Delta^{iz} \xi \rangle$$

将是 $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \frac{1}{2}$ 中的连续有界函数，且在 $0 < \operatorname{Im} z < \frac{1}{2}$ 中解析，对任意的 $t \in \mathbf{R}$，依引理 8.1.2，8.1.4，8.1.5，

$$f\left(t+\frac{i}{2}\right)=\langle\eta,\ \Delta^{it}\Delta^{\frac{1}{2}}\xi\rangle=\langle\Delta^{it}\xi,\ j\eta\rangle,$$

但 $\Delta^{it}\xi\in\mathscr{K}$，$j\eta\in i\mathscr{K}^{\perp}$，从而，$f\left(t+\frac{i}{2}\right)$ 是实数．今依命题 8.1.8，$\{\Delta^{it}\}$ 关于 $\mathscr{K}$ 满足 KMS 条件．

如果 $\{u_t\}$ 满足同样的条件，由于 $(\mathscr{K}\dotplus i\mathscr{K})$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠我们只须证明

$$u_t\eta=\Delta^{it}\eta,\ \forall t\in\mathbf{R},\ \eta\in\mathscr{K}.$$

依命题 8.1.12，无妨设 η 关于 $\{u_t\}$ 是解析的，并且相应的 $\eta(z)$ 在复平面的每个平行于实轴的横条中是有界的．

注意 $j\sqrt{\frac{r}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-rs^2}\Delta^{is}\xi ds=\sqrt{\frac{r}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-rs^2}\Delta^{is}j\xi ds$，$ji=-ij$，及 $j(\mathscr{K}\dotplus i\mathscr{K})$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠，因此只须对任意的 $t\in\mathbf{R}$，如上的 η 及 $\xi\in\mathscr{K}$，并且 ξ 与 $j\xi$ 关于 $\{\Delta^{it}\}$ 是解析的，证明

$$\langle\Delta^{it}j\xi,\ u_t\eta\rangle=\langle j\xi,\ \eta\rangle.$$

令 $g(z)=\langle\Delta^{iz}j\xi,\ \eta(\bar{z})\rangle$，它是 $\mathbf{C}$ 上的解析函数，并且在每个平行于实轴的横条中有界．当 $t\in\mathbf{R}$ 时，$\eta(t)=u_t\eta\in\mathscr{K}$，$\Delta^{it}j\xi=j\Delta^{it}\xi\in j\mathscr{K}=i\mathscr{K}^{\perp}$，因此，$g(t)$ 是实数．

对任意固定的 $s\in\mathbf{R}$，η，$\Delta^{is}\xi\in\mathscr{K}$，因此有关于 $\{u_t\}$ 的 KMS 函数 f，使得

$$f(t)=\langle\Delta^{is}\xi,\ u_t\eta\rangle=\overline{f(t+i)},\ \forall t\in\mathbf{R}.$$

并且依命题 8.1.8，$f\left(t+\frac{i}{2}\right)=\overline{f\left(t+\frac{i}{2}\right)}$，$\forall t\in\mathbf{R}$．注意

$$h(z)=\langle\Delta^{is}\xi,\ \eta(\bar{z})\rangle$$

是 $\mathbf{C}$ 上的解析函数，并且 $h(t)=f(t)$，$\forall t\in\mathbf{R}$．用 Schwartz 反射原理于 $(f-h)$，可见 $f(z)=h(z)$，$0\leqslant\operatorname{Im}z\leqslant 1$．特别地，

$$h\left(s+\frac{i}{2}\right)=f\left(s+\frac{i}{2}\right)$$

是实数．即 $\langle\Delta^{is}\xi,\eta\left(s-\frac{i}{2}\right)\rangle=g\left(s+\frac{i}{2}\right)$ 是实数，$\forall s\in\mathbf{R}$．

现在 $g(z)$ 在 $\operatorname{Im} z=0$ 与 $\frac{i}{2}$ 上为实数，在 $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \frac{1}{2}$ 中连续有界，在 $0<\operatorname{Im} z<\frac{1}{2}$ 中解析，依 Schwartz 反射原理，它可开拓成 C 上有界的解析函数，因此 $g(z)$是常数函数。特别对任意的 $t \in \mathbf{R}$,

$$\langle \Delta^{it} j\xi, u_t\eta \rangle = g(t) = g(0) = \langle j\xi, \eta \rangle. \qquad \text{证毕.}$$

注 本节见参考文献 [86]，[89].

§2. Tomita-Takesaki 理论

本节中，设 M 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数，同时以 $\xi_0(\in \mathscr{H}, \|\xi_0\|=1)$ 为它的循环并且分离的矢.

命题 8.2.1 令 $\mathscr{K}=\overline{\{x\xi_0 \mid x^*=x \in M\}}$，则 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的非退化实线性闭子空间，并且

$$\{x'\xi_0 \mid x'^*=x' \in M\} \subset (i\mathscr{K})^{\perp}=i\mathscr{K}^{\perp},$$

这里"⊥"指在 $\mathscr{H}_r$ 中而言.

证. 如果 $x^*=x \in M$, $x'^*=x' \in M'$，则 $\langle x'\xi_0, x\xi_0 \rangle$ 是实数，因此，$x'\xi_0 \in (i\mathscr{K})^{\perp}$. 从而

$$M'\xi_0 \subset (i\mathscr{K})^{\perp}+\mathscr{K}^{\perp} \subset (\mathscr{K} \cap i\mathscr{K})^{\perp},$$

但 $M'\xi_0$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠，所以，$\mathscr{K} \cap i\mathscr{K}=\{0\}$. 又 $M\xi_0 \subset \mathscr{K}+i\mathscr{K}$，$M\xi_0$ 也在 $\mathscr{H}$ 中稠，因此，$\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}$ 的非退实线性闭子空间. 证毕.

以下，对于$\mathscr{H}$，$\mathscr{K}$，保持 §1 的诸记号：$p, q, a, j, b, \Delta, s, s^+$ 等.

命题 8.2.2 $q\xi_0=0$；$p\xi_0=a\xi_0=j\xi_0=b\xi_0=\xi_0$；$\Delta^{it}\xi_0=\xi_0$, $\forall t \in \mathbf{R}$；$M\xi_0 \subset \mathscr{D}(\Delta^{\frac{1}{2}})$，并且算子 s 是 $x\xi_0 \to x^*\xi_0 (x \in M)$ 的闭包. 此外，对每个 $x'^*=x' \in M'$，有 $x^*=x \in M$，使得

$$(p-q)x'\xi_0=x\xi_0.$$

证. 由于 $\xi_0 \in \mathscr{K} \cap (i\mathscr{K})^{\perp}$，因此，$q\xi_0=0$, $p\xi_0=\xi_0$, $a\xi_0=$

ξ_0. 今 $(p-q)^2\xi_0=\xi_0$，所以，$b\xi_0=\xi_0$. 由此，$j\xi_0=jb\xi_0=(p-q)\xi_0=\xi_0$. 又 $\xi_0=s\xi_0=j\Delta^{\frac{1}{2}}\xi_0$，因此，$\Delta\xi_0=\xi_0$，$\Delta^{it}\xi_0=\xi_0$，$\forall t\in\mathbb{R}$. 依 s 的定义，显然 $M\xi_0\subset\mathscr{D}(\Delta^{1/2})$，及 s 是 $x\xi_0\to x^*\xi_0$ $(x\in M)$ 的闭包.

今设 $x'\in M'$，$0\leqslant x'\leqslant 1$. 令 $\varphi(\cdot)=\langle\cdot\xi_0,\xi_0\rangle$，$\psi(\cdot)=\langle\cdot\xi_0,x'\xi_0\rangle$，则 $\varphi,\psi\in M_*$，$0\leqslant\psi\leqslant\varphi$. 依定理 1.10.4，有 $x\in M$，$0\leqslant x\leqslant 1$，使得

$$\langle y\xi_0,x'\xi_0\rangle=\frac{1}{2}\langle(xy+yx)\xi_0,\xi_0\rangle,\ \forall y\in M.$$

特别地，$\langle y\xi_0,x'\xi_0\rangle=\langle y\xi_0,x\xi_0\rangle_r$，$\forall y^*=y\in M$，即 $(x'-x)\xi_0\in\mathscr{K}^\perp$. 因此，$x\xi_0=px'\xi_0$. 又 $x'\xi_0\in(i\mathscr{K})^\perp$，所以，$x\xi_0=(p-q)x'\xi_0$. 由此，对任意的 $x'^*=x'\in M$，有 $x^*=x\in M$，使得 $(p-q)x'\xi_0=x\xi_0$. 证毕.

引理 8.2.3 对每个 $x'\in M'$ 及复数λ，$\mathrm{Re}\,\lambda>0$，有 $x\in M$，使得 $bjx'jb=\lambda(2-a)xa+\bar{\lambda}ax(2-a)$.

证. 无妨假设 $0\leqslant x'\leqslant 1$. 令 $\varphi(\cdot)=\langle\cdot\xi_0,\xi_0\rangle$，$\psi(\cdot)=\langle\cdot\xi_0,x'\xi_0\rangle$，则 $\varphi,\psi\in M_*$，$0\leqslant\psi\leqslant\varphi$，依定理 1.10.4，有 $x\in M_+$，使得 $\langle y\xi_0,x'\xi_0\rangle=\langle(\lambda xy+\bar{\lambda}yx)\xi_0,\xi_0\rangle$，$\forall y\in M$. 代 y 以 z^*y，则

$$\begin{aligned}\langle y\xi_0,x'z\xi_0\rangle=\lambda&\langle y\xi_0,zx\xi_0\rangle\\&+\bar{\lambda}\langle yx\xi_0,z\xi_0\rangle,\ \forall y,z\in M,\end{aligned}\tag{1}$$

对任意的 $y'^*=y'$，$z'^*=z'\in M'$，依命题 8.2.2，有 $y^*=y$，$z^*=z\in M$，使得 $jby'\xi_0=y\xi_0$，$jbz'\xi_0=z\xi_0$. 代到 (1) 中，则依 j 的性质，$\Delta^{\frac{1}{2}}b=(2-a)$，

$$\begin{aligned}&\langle bjx'jbz'\xi_0,y'\xi_0\rangle\\&=\lambda\langle jby'\xi_0,zx\xi_0\rangle+\bar{\lambda}\langle yx\xi_0,jbz'\xi_0\rangle\\&=\lambda\langle jby'\xi_0,j\Delta^{\frac{1}{2}}xz\xi_0\rangle+\bar{\lambda}\langle j\Delta^{\frac{1}{2}}xy\xi_0,jbz'\xi_0\rangle\\&=\lambda\langle xz\xi_0,(2-a)y'\xi_0\rangle+\bar{\lambda}\langle(2-a)z'\xi_0,xy\xi_0\rangle\\&=\lambda\langle xjbz'\xi_0,(2-a)y'\xi_0\rangle+\bar{\lambda}\langle(2-a)z'\xi_0,xjby'\xi_0\rangle,\end{aligned}$$

由于 $a-jb=2q$，$qc'\xi_0=0$，$\forall c'^*=c'\in M'$，因此，

$$\begin{aligned}
&\langle bjx'jbz'\xi_0, y'\xi_0\rangle \\
&= \lambda\langle xaz'\xi_0, (2-a)y'\xi_0\rangle + \bar{\lambda}\langle (2-a)z'\xi_0, xay'\xi_0\rangle \\
&= \langle(\lambda(2-a)xa + \bar{\lambda}ax(2-a))z'\xi_0, y'\xi_0\rangle, \\
&\quad \forall y'^* = y', \ z'^* = z' \in M'.
\end{aligned}$$

进而，此式对任意的 y', $z' \in M'$ 成立. 但 ξ_0 是 M' 的循环矢，所以，

$$bjx'jb = \lambda(2-a)xa + \bar{\lambda}ax(2-a). \qquad \text{证毕.}$$

引理 8.2.4 设 $\lambda = e^{\frac{i}{2}\theta}$, $|\theta| < \pi$, f 是 C 上的解析函数，并且在 $\left\{z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |\mathrm{Re}\, z| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ 中有界，则

$$f(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\theta t}}{\mathrm{ch}\,(\pi t)}\left(\lambda f\left(it + \frac{1}{2}\right) + \bar{\lambda} f\left(it - \frac{1}{2}\right)\right) dt.$$

证. 考虑 $g(z) = \dfrac{\pi e^{i\theta z}}{\sin(\pi z)} f(z)$，它在 $\left\{z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |\mathrm{Re}\, z| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ 中仅以 $z=0$ 为极点，留数恰为 $f(0)$，并且当 z 在这竖条中趋于 ∞ 时，$g(z)$急降于 0，因此，

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(g\left(it + \frac{1}{2}\right) - g\left(it - \frac{1}{2}\right)\right) i\,dt,$$

再稍加计算，即得证.

引理 8.2.5 设 x', λ, x 如引理 8.2.3，并且 $\lambda = e^{\frac{i}{2}\theta}$, $|\theta| < \pi$，则

$$x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\theta t}}{\mathrm{ch}\,(\pi t)} \Delta^{it} jx'j \Delta^{-it} dt.$$

证. 设 ξ, $\eta \in \mathscr{H}$，并且关于 $\{\Delta^{it}\}$ 是解析的，定义 C 上的解析函数 $f(z) = \langle bxb\Delta^{-z}\xi, \Delta^{\bar{z}}\eta\rangle$，$f$ 自然在每个平行于虚轴的竖条中有界. 由于 $\Delta^{\frac{1}{2}}b = 2-a$, $b\Delta^{-\frac{1}{2}} = a$，因此，

$$f\left(it + \frac{1}{2}\right) = \langle bxb\Delta^{-it}\Delta^{-\frac{1}{2}}\xi, \Delta^{-it}\Delta^{\frac{1}{2}}\eta\rangle$$

$$= \langle \Delta^{it}(2-a)xa\Delta^{-it}\xi, \eta\rangle,$$

$$f\left(it-\frac{1}{2}\right) = \langle bxb\Delta^{-it}\Delta^{\frac{1}{2}}\xi, \ \Delta^{-it}\Delta^{-\frac{1}{2}}\eta\rangle$$

$$= \langle \Delta^{it}ax(2-a)\Delta^{-it}\xi, \eta\rangle,$$

依引理 8.2.3,

$$\lambda f\left(it+\frac{1}{2}\right) + \lambda f\left(it-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \langle \Delta^{it}bjx'jb\Delta^{-it}\xi, \eta\rangle.$$

由此依引理 8.2.4,

$$\langle bxb\xi, \eta\rangle = f(0)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\theta t}}{\mathrm{ch}\,(\pi t)}\langle \Delta^{it}bjx'jb\Delta^{-it}\xi, \eta\rangle dt$$

b 与 Δ^{it} 是交换的,因此,

$$\langle xb\xi, b\eta\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\theta t}}{\mathrm{ch}\,(\pi t)}\Delta^{it}jx'j\Delta^{-it}dt\,b\xi, b\eta\right\rangle.$$

由于 b 是可逆的,$(\mathscr{K}\dot{+}i\mathscr{K})$ 在 $\mathscr{H}$ 中是稠的,并依命题 8.1.12,即可得证.

引理 8.2.6 $\Delta^{it}jx'j\Delta^{-it}\in M$, $\forall x'\in M$, $t\in \mathbf{R}$.

证. 取 $y'\in M'$, $\xi, \eta\in\mathscr{H}$, 并定义

$$g(t) = \langle(\Delta^{it}jx'j\Delta^{-it}y' - y'\Delta^{it}jx'j\Delta^{-it})\xi, \eta\rangle$$

依引理 8.2.5, 对每个 θ, $|\theta|<\pi$, 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\theta t}}{\mathrm{ch}\,(\pi t)}g(t)dt = 0.$$

令 $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-zt}}{\mathrm{ch}\,(\pi t)}g(t)dt$, 它在 $|\mathrm{Re}\,z|<\pi$ 中是解析的, 并且 $f(\theta)=0$, $\forall|\theta|<\pi$,因此, $f=0$. 特别,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ist}}{\mathrm{ch}\,(\pi t)}g(t)dt = 0,\ \forall s\in\mathbf{R}$$

依 Fourier 变换的唯一性, $g=0$. 但 $y'\in M'$, $\xi, \eta\in\mathscr{H}$ 是任意的,所以, $\Delta^{it}jx'j\Delta^{-it}\in M$. 证毕.

定理 8.2.7 $jMj=M'$, $\Delta^{it}M\Delta^{-it}=M$, $\forall t\in\mathbf{R}$.

证。在引理 8.2.6 中命 $t=0$，则 $jM'j\subset M$。

对任意的 $x^*=x, y^*=y\in M$，$x\xi_0, y\xi_0\in\mathscr{K}$。依引理 8.1.2，$jy\xi_0\in(i\mathscr{K})^\perp$，因此，$\langle xjy\xi_0,\xi_0\rangle=\langle jy\xi_0, x\xi_0\rangle$ 是实数。从而由 j 的性质，

$$\langle yjx\xi_0,\xi_0\rangle=\langle xjy\xi_0,\xi_0\rangle=\langle\xi_0, xjy\xi_0\rangle$$

由此易见对任意的 $a, b\in M$，有

$$\langle bja\xi_0,\xi_0\rangle=\langle\xi_0, ajb\xi_0\rangle.$$

特别地，对 $x^*=x$，$y^*=y\in M$，$y'\in M'$，有

$$\langle y(jy'j)jx\xi_0,\ \xi_0\rangle=\langle\xi_0,\ xjy(jy'j)\xi_0\rangle.$$

注意 $j\xi_0=\xi_0$，因此

$$\langle xjy\xi_0,\ y'\xi_0\rangle=\langle jyjx\xi_0,\ y'\xi_0\rangle.$$

ξ_0 是 M' 的循环矢，所以，$xjyj\xi_0=jyjx\xi_0$。 此式也将对任意的 $x, y\in M$ 成立，从而

$$jyjxz\xi_0=xzjyj\xi_0=xjyjz\xi_0,\ \forall x, y, z\in M,$$

ξ_0 是 M 的循环矢，因此，$xjyj=jyjx$，$\forall x, y\in M$，即 $jMj\subset M'$。已指出 $jM'j\subset M$，所以，$jMj=M'$。

再由 $jM'j=M$ 及引理 8.2.6，$\Delta^{it}M\Delta^{-it}=M$，$\forall t\in\mathbf{R}$。证毕。

定义 8.2.8 M 的 $*$ 自同构群 $\{\sigma_t(\cdot)=\Delta^{it}\cdot\Delta^{-it}|t\in\mathbf{R}\}$ 称为 M 的模自同构群。

定义 8.2.9 令 $\varphi_0(\cdot)=\langle\cdot\xi_0,\xi_0\rangle$，它是$M$上忠实的正规态。$M$ 上强算子连续的单参数 $*$ 自同构群 $\{\alpha_t(\cdot)|t\in\mathbf{R}\}$（即对任意的 $x\in M$，$t\to\alpha_t(x)$ 是强算子连续的）称为关于 φ_0 满足 KMS 条件的，指对于任意的 x，$y\in M$，存在在 $0\leqslant\mathrm{Im}\,z\leqslant 1$ 中连续有界，并且在 $0<\mathrm{Im}\,z<1$ 中解析的复值函数 f，使得

$$f(t)=\varphi_0(\alpha_t(x)y),\ f(t+i)=\varphi_0(y\alpha_t(x)),\ \forall t\in\mathbf{R}.$$

显然这 f 是唯一的，称为关于 x, y 的 KMS 函数。 当 $x^*=x$，$y^*=y$ 时，由于 $\varphi_0\geqslant 0$，因此，$\overline{f(t)}=f(t+i)$，$\forall t\in\mathbf{R}$。依命题 8.1.8 所证，这时也有 $f\left(t+\frac{i}{2}\right)=\overline{f\left(t+\frac{i}{2}\right)}$，$\forall t\in\mathbf{R}$。

定理 8.2.1 φ_0关于M的模自同构群$\{\sigma_t|t\in\mathbf{R}\}$是不变的，即$\varphi_0(\sigma_t(x))=\varphi_0(x)$，$\forall x\in M$，$t\in\mathbf{R}$，并且关于$\varphi_0$满足 KMS 条件的$M$上强算子连续的单参数*自同构群只能是$\{\sigma_t|t\in\mathbf{R}\}$.

证. 对任意的$x^*=x$，$y^*=y\in M$，依定理 8.1.3，有 KMS 函数f，使得

$$f(t)=\langle y\xi_0, \Delta^{it}x\xi_0\rangle,\ f(t+i)=\langle\Delta^{it}x\xi_0, y\xi_0\rangle,\ \forall t\in\mathbf{R}.$$

由于$\Delta^{-it}\xi_0=\xi_0$，因此，

$$f(t)=\varphi_0(\sigma_t(x)y),\ f(t+i)=\varphi_0(y\sigma_t(x)),\ \forall t\in\mathbf{R}.$$

进而可见$\{\sigma_t\}$关于φ_0满足 KMS 条件. 此外，由于$\Delta^{-it}\xi_0=\xi_0$ $(\forall t\in\mathbf{R})$，φ_0关于$\{\sigma_t\}$不变是显然的.

今设M上强算子连续的单参数*自同构群$\{\alpha_t|t\in\mathbf{R}\}$关于$\varphi_0$也满足 KMS 条件，首先$\varphi_0$关于$\{\alpha_t\}$是不变的. 事实上，对$x\in M_+$及$y=1$，有 KMS 函数$f$，使得

$$f(t)=f(t+i)=\varphi_0(\alpha_t(x))\geqslant 0,\ \forall t\in\mathbf{R}.$$

依 Schwartz 反射原理，f可扩张为$\mathbf{C}$上有界的解析函数，因此f是常数. 特别地，$\varphi_0(\alpha_t(x))=f(t)=f(0)=\varphi_0(x)$，$\forall t\in\mathbf{R}$，即$\varphi_0$关于$\{\alpha_t\}$是不变的. 由此定义

$$u_t x\xi_0=\alpha_t(x)\xi_0,\ \forall x\in M,$$

则u_t可扩张为$\mathscr{H}$中的酉算子，仍记为u_t，$\forall t\in\mathbf{R}$. 显然$\{u_t|t\in\mathbf{R}\}$是$\mathscr{H}$中单参数强算子连续的酉算子群，并且它对$\mathscr{H}$是不变的. 对任意的$\xi,\eta\in\mathscr{H}$，有$x_n^*=x_n$，$y_n^*=y\in M$，使得$x_n\xi_0\to\xi$，$y_n\xi_0\to\eta$. $\{\alpha_t\}$关于φ_0满足 KMS 条件，因此对每个n，有 KMS 函数f_n，使得

$$\begin{aligned} f_n(t)&=\varphi_0(\alpha_t(x_n)y_n)=\langle y_n\xi_0, \alpha_t(x_n)\xi_0\rangle\\ &=\langle y_n\xi_0, u_t x_n\xi_0\rangle,\\ f_n(t+i)&=\varphi_0(y_n\alpha_t(x_n))=\langle\alpha_t(x_n)\xi_0, y_n\xi_0\rangle\\ &=\langle u_t x_n\xi_0, y_n\xi_0\rangle \end{aligned}$$

$\forall t\in\mathbf{R}$. 依极大模原理[1)]及$\{u_t\}$是酉算子群，

---

1) 例见 Rudin, W., Real and Complex analysis, New York, 1966.

$$\sup_{0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1}|f_n(z)-f_m(z)|=\sup_{t\in\mathbb{R}}|f_n(t)-f_m(t)|$$
$$\leqslant \|y_n\xi_0\|\cdot\|x_n\xi_0-x_m\xi_0\|+\|x_m\xi_0\|$$
$$\cdot\|y_n\xi_0-y_m\xi_0\|\to 0,$$
$$\sup_{\substack{0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1\\ n}}|f_n(z)|=\sup_{n,t\in\mathbb{R}}|f_n(t)|$$
$$\leqslant \sup_n(\|y_n\xi_0\|\cdot\|x_n\xi_0\|).$$

因此有 KMS 函数 f，使得 $f_n(z)\to f(z)$，$\forall 0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1$． 于是，$f(t)=\langle\eta,u_t\xi\rangle$，$f(t+i)=\langle u_t\xi,\eta\rangle$．即 $\{u_t\}$ 关于 $\mathscr{H}$ 满足 KMS 条件．今依定理 8.1.13，$u_t=\Delta^{it}$，$\forall t\in\mathbb{R}$． 于是对任意的 $x\in M$，$t\in\mathbb{R}$，

$$\alpha_t(x)\xi_0=u_tx\xi_0=\Delta^{it}x\Delta^{-it}\xi_0=\sigma_t(x)\xi_0,$$

但 ξ_0 是M的分离矢，所以，$\alpha_t(x)=\sigma_t(x)$．证毕．

注　本节见参考文献 [86]，[89]，[117]，[123]．

§3. σ-有限的 w^*-代数的模自同构群

设M是σ-有限的 w^*-代数，于是 M 上必有忠实的正规态 φ，它产生 M 忠实的循环 w^*-表示 $\{\pi_\varphi,\mathscr{H}_\varphi,\xi_\varphi\}$．显然，$\xi_\varphi$ 也是 $\pi_\varphi(M)$ 的分离矢，从而可以把 § 2 的理论应用于 $\{\pi_\varphi(M),\mathscr{H}_\varphi,\xi_\varphi\}$．相应有模算子 Δ_φ（$\mathscr{H}_\varphi$ 中非负可逆的自伴算子），使得

$$\Delta_\varphi^{it}\pi_\varphi(M)\Delta_\varphi^{-it}=\pi_\varphi(M),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

由于M与$\pi_\varphi(M)$是$*$同构的，令

$$\sigma_t^\varphi(x)=\pi_\varphi^{-1}(\Delta_\varphi^{it}\pi_\varphi(x)\Delta_\varphi^{-it}),\forall x\in M,t\in\mathbb{R}.$$

显然 $\{\sigma_t^\varphi|t\in\mathbb{R}\}$ 将是M的 $s(M,M_*)$ 连续的$*$自同构群．

定义 8.3.1　$\{\sigma_t^\varphi|t\in\mathbb{R}\}$ 称为M的相应于φ的模自同构群．

依照定理 8.2.10，φ关于 $\{\sigma_t^\varphi\}$ 是不变的，即 $\varphi(\sigma_t^\varphi(x))=\varphi(x)$，$\forall x\in M$，$t\in\mathbb{R}$，并且 $\{\sigma_t^\varphi\}$ 关于φ是满足 KMS 条件的，即对于任意的 $x,y\in M$，有 KMS 函数(即在 $0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1$ 中连续有界，在 $0<\operatorname{Im} z<1$ 中解析的函数) f，使得

$$f(t)=\varphi(\sigma_t^\varphi(x)y),\ f(t+i)=\varphi(y\sigma_t^\varphi(x)),\ \forall t\in\mathbf{R}.$$

此外，M 的关于 φ 满足 KMS 条件的 $s(M, M_*)$ 连续的单参数 $*$ 自同构群只能是 $\{\sigma_t^\varphi|t\in\mathbf{R}\}$。

命题 8.3.2 设 φ 是 w^*-代数 M 上忠实的正规态，

$$M^\varphi=\{x\in M|\sigma_t^\varphi(x)=x,\ \forall t\in\mathbf{R}\},$$

则 $x\in M^\varphi$，当且仅当，$\varphi(xy-yx)=0$，$\forall y\in M$。

证. 设 $x\in M^\varphi$. 对于任意的 $y\in M$，有关于 x, y 的 KMS 函数 f，使得

$$f(t)=\varphi(\sigma_t^\varphi(x)y)=\varphi(xy),$$
$$f(t+i)=\varphi(y\sigma_t^\varphi(x))=\varphi(yx),$$

$\forall t\in\mathbf{R}$. 因此，f 是常数，特别地，

$$\varphi(xy)=f(0)=f(i)=\varphi(yx).$$

反之设 $x\in M$，满足 $\varphi(xy-yx)=0$，$\forall y\in M$，要证明 $x\in M^\varphi$. 无妨设 $x^*=x$. 对任意的 $y^*=y\in M$，有关于 x, y 的 KMS 函数 f，使得

$$f(t)=\varphi(\sigma_t^\varphi(x)y),\ f(t+i)=\varphi(y\sigma_t^\varphi(x)),\ \forall t\in\mathbf{R},$$

由于 $x^*=x$，$y^*=y$，因此，$f(t)=\overline{f(t+i)}$，$\forall t\in\mathbf{R}$. 另一方面，φ 关于 $\{\sigma_t^\varphi\}$ 是不变的，于是

$$\begin{aligned}f(t)&=\varphi(x\sigma_{-t}^\varphi(y))=\varphi(\sigma_{-t}^\varphi(y)x)\\&=\varphi(y\sigma_t^\varphi(x))=f(t+i),\ \forall t\in\mathbf{R}.\end{aligned}$$

由此，f 可开拓为 $\mathbf{C}$ 上有界的解析函数，所以，f 是常数. 从而，$\varphi((\sigma_t^\varphi(x)-x)y)=0$，$\forall y^*=y\in M$，$t\in\mathbf{R}$，即见 $x\in M^\varphi$. 证毕.

命题 8.3.3 设 M 是 σ-有限的 w^*-代数，φ，ψ 是 M 上忠实的正规态，$\{\sigma_t^\varphi\}$，$\{\sigma_t^\psi\}$ 分别是相应于 φ，ψ 是模自同构群，则存在 M 的依 $s(M, M_*)$ 连续的单参数酉元族 $\{u_t|t\in\mathbf{R}\}$，使得

$$\sigma_t^\psi(a)=u_t\sigma_t^\varphi(a)u_t^*,\ u_{t+s}=u_t\sigma_t^\varphi(u_s),\ \forall a\in M,\ t, s\in\mathbf{R}.$$

证. 考虑 w^*-代数

$$M_2=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle|\,a, b, c, d\in M\right\}$$

及其上的泛函

$$\theta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \varphi(a) + \psi(d).$$

显然 θ 是 M_2 上忠实的正规态，相应有 M_2 的模自同构群 $\{\sigma_t^\theta\}$.

设 $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，易见 $\theta(e_{11}x - xe_{11}) = 0$，$\forall x \in M_2$。依命题 8.3.2，$\sigma_t^\theta(e_{11}) = e_{11}$，$\forall t \in \mathbf{R}$. 注意对任意的 $a \in M$，

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此，

$$\sigma_t^\theta\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\sigma_t^\theta\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_t(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

易见 $\{\alpha_t\}$ 将是 M 的 $s(M, M_*)$ 连续的单参数 * 自同构群. 由 $\{\sigma_t^\theta\}$ 关于 θ 满足 KMS 条件，易见 $\{\alpha_t\}$ 关于 φ 满足 KMS 条件，依定理 8.2.10，$\alpha_t = \sigma_t^\varphi$，$\forall t \in \mathbf{R}$.

对 $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 进行同样讨论，又有

$$\sigma_t^\theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t^\psi(a) \end{pmatrix}, \ \forall a \in M, \ t \in \mathbf{R}.$$

由于 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，因此

$$\sigma_t^\theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sigma_t^\theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix}.$$

注意

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_t^\theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix}\sigma_t^\theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^*\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_t u_t^* \end{pmatrix},$$

因此，$u_t u_t^* = 1$. 相仿证 $u_t^* u_t = 1$. 从而 $\{u_t | t \in \mathbf{R}\}$ 是 M 的依 $s(M, M_*)$ 连续的单参数酉元族.

由于 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，因此，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t^\psi(a) \end{pmatrix} = \sigma_t^\theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_t^\varphi(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & u_t^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\sigma_t^\psi(a) = u_t\sigma_t^\varphi(a)u_t^*$，$\forall a \in M$，$t \in \mathbf{R}$。此外，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{t+s} & 0 \end{pmatrix} = \sigma_t^\theta\left(\sigma_s^\theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \sigma_t^\theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_s & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \sigma_t^\theta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_t^\varphi(u_s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，$u_{t+s} = u_t\sigma_t^\varphi(u_s)$，$\forall t, s \in \mathbf{R}$。证毕。

注. 依命题 8.3.3，对任意固定的 $t \in \mathbf{R}$，σ_t^φ是否是M的内$*$自同构(即形如 $\cdot \longrightarrow u^* \cdot u$ 的$*$自同构，这里 u 是M的酉元)，这一性质将不随φ的选择而变化.

引理 8.3.4 设φ是M上忠实的正规态，$h \in M^\varphi \cap M_+$，并且 h 的谱族在 0 处是 $s(M, M^*)$连续的，令 $\psi(\cdot) = \varphi(h\cdot) = \varphi(h^{\frac{1}{2}}\cdot h^{\frac{1}{2}})$(命题 8.3.2) 也将是$M$上忠实的正规正泛函. 记 $\{\sigma_t^\psi\}$ 是相应于ψ的模自构群，则

$$\sigma_t^\psi(x) = h^{it}\sigma_t^\varphi(x)h^{-it},\ \forall x \in M,\ t \in \mathbf{R}.$$

证. 任意固定 $x, y \in M$. 对正整数 n，令

$$x_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ns^2}\sigma_s^\varphi(x)ds,$$

于是 x_n 关于 $\{\sigma_t^\varphi\}$ 是解析的，即

$$x_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(s-z)^2}\sigma_s^\varphi(x)ds,\ \forall z \in \mathbf{C}$$

是 $\mathbf{C}$ 到 M 中的解析函数，并且 $x_n(t) = \sigma_t^\varphi(x_n)$，$\forall t \in \mathbf{R}$. 此外，显然 $x_n(z)$在每个平行于实轴的横条中是有界的. 从而，

$$f_n(z) = \varphi(h^{iz+1}x_n(z)h^{-iz}y)$$

是 $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$ 中连续有界，并且在 $0 < \operatorname{Im} z < 1$ 中解析的函数. 我们来计算 f 的边界值. 对 $t \in \mathbf{R}$，

$$f_n(t) = \varphi(hh^{it}\sigma_t^\varphi(x_n)h^{-it}y) = \psi(h^{it}\sigma_t^\varphi(x_n)h^{-it}y)$$

由于 $h^{it}\in M^\varphi$，因此，

$$\begin{aligned} f_n(t+i) &= \varphi(h^{it}x_n(t+i)h^{-it}hy) \\ &= \varphi(x_n(t+i)h^{-it}hyh^{it}) \\ &= \langle \pi_\varphi(h^{-it}hyh^{it})\xi_\varphi,\ \pi_\varphi(x_n(t+i)^*)\xi_\varphi\rangle. \end{aligned}$$

如果记 $\eta = \pi_\varphi(x^*)\xi_\varphi$ ($\in \mathscr{H}_\varphi$)，依命题 8.1.12，

$$\eta_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ns^2}\Delta_\varphi^{is}\eta ds = \pi_\varphi(x_n^*)\xi_\varphi$$

是关于 $\{\Delta_\varphi^{it}\}$ 的解析矢．再依命题 8.1.11 可见

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(s-z)^2}\Delta_\varphi^{is}\eta ds = \eta_n(z) = \Delta_\varphi^{iz}\eta_n,\ \forall z\in \mathbb{C}.$$

从而对任意的 $z\in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \pi_\varphi(x_n(z)^*)\xi_\varphi &= \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{-n(s-z)^2}}\pi_\varphi(\sigma_s^\varphi(x^*))\xi_\varphi ds \\ &= \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(s-\bar z)^2}\Delta_\varphi^{is}\eta ds \\ &= \eta_n(\bar z) = \Delta_\varphi^{i\bar z}\eta_n = \Delta_\varphi^{i\bar z}\pi_\varphi(x_n^*)\xi_\varphi. \end{aligned}$$

由此，

$$\begin{aligned} f_n(t+i) &= \langle \pi_\varphi(h^{-it}hyh^{it})\xi_\varphi,\ \Delta_\varphi\Delta_\varphi^{it}\pi_\varphi(x_n^*)\Delta_\varphi^{-it}\xi_\varphi\rangle \\ &= \langle \Delta_\varphi^{1/2}\pi_\varphi(h^{-it}hyh^{it})\xi_\varphi,\ \Delta_\varphi^{1/2}\pi_\varphi(\sigma_t^\varphi(x_n^*))\xi_\varphi\rangle \\ &= \langle \pi_\varphi(\sigma_t^\varphi(x_n))\xi_\varphi,\ \pi_\varphi(h^{-it}y^*hh^{it})\xi_\varphi\rangle \\ &= \varphi(h^{-it}hyh^{it}\sigma_t^\varphi(x_n)) = \varphi(hyh^{it}\sigma_t^\varphi(x_n)h^{-it}) \\ &= \psi(yh^{it}\sigma_t^\varphi(x_n)h^{-it}) \end{aligned}$$

由极大模原理及 $\|x_n - x\|\to 0$，

$$\sup_{0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1}|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \|\psi\|\cdot\|y\|\cdot\|x_n - x_m\|\to 0,$$

$$\sup_{0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1}|f_n(z)| < \infty,$$

因此有 KMS 函数 f，使得 $f_n(z)\to f(z)$，$\forall 0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1$，并且 $f(t) = \psi(h^{it}\sigma_t^\varphi(x)h^{-it}y)$，$f(t+i) = \psi(yh^{it}\sigma_t^\varphi(x)h^{-it})$，$\forall t\in \mathbb{R}$．这说明$M$的 $*$ 自同构群 $\{h^{it}\sigma_t^\varphi(\cdot)h^{-it}|t\in \mathbb{R}\}$ 关于 ψ 满足 KMS 条

件，所以，$\sigma_t^{\psi}(x)=h^{it}\sigma_t^{\varphi}(x)h^{-it}$，$\forall x\in M$，$t\in\mathbf{R}$。证毕。

引理 8.3.5 设φ是M上忠实的正规态，如果$\sigma_t^{\varphi}(x)=x$，$\forall x\in M$，$t\in\mathbf{R}$，则φ是迹。

证。对任意的$x\in M$，有关于x^*x的KMS函数f，使得对任意的$t\in\mathbf{R}$，

$$f(t)=\varphi(\sigma_t^{\varphi}(x^*)x)=\varphi(x^*x)\geqslant 0,$$
$$f(t+i)=\varphi(x\sigma_t^{\varphi}(x^*))=\varphi(xx^*)\geqslant 0,$$

因此，f是常数。特别地，$\varphi(x^*x)=\varphi(xx^*)$。证毕。

定理 8.3.6 设φ是w^*-代数M上忠实的正规态，$\{\sigma_t^{\varphi}|t\in\mathbf{R}\}$是相应的模自同构群，则$M$是半有限的，必须且只须，$\{\sigma_t^{\varphi}|t\in\mathbf{R}\}$是$M$的内$*$自同构群，即存在$M$的依$s(M, M_*)$连续的单参数酉元群$\{u_t|t\in\mathbf{R}\}$，使得

$$\sigma_t^{\varphi}(x)=u_txu_t^*,\ \forall x\in M,\ t\in\mathbf{R}.$$

证。设满足要求的$\{u_t\}$存在，也无妨设M是$\mathscr{H}$中的vN代数。依Stone定理，将有$\mathscr{H}$中非负可逆的算子h，使得$u_t=h^{-it}$，$\forall t\in\mathbf{R}$。由于$u_t\in M^{\varphi}$，$\forall t\in\mathbf{R}$，因此，h的谱族$\subset M^{\varphi}$。令p_n是h相应于$[n^{-1}, n]$上的谱投影，于是p_n，$hp_n\in M^{\varphi}$。在p_nMp_n上，令$\phi_n(\cdot)=\varphi(hp_n\cdot)$，依引理8.3.4，相应于$\phi_n$的模自同构群将是

$$(hp_n)^{it}\sigma_t^{\varphi}(x)(hp_n)^{-it}=h^{it}u_txu_t^*h^{-it}=x,$$

$\forall x\in p_nMp_n$，$t\in\mathbf{R}$。依引理8.3.5，ϕ_n是p_nMp_n上忠实的正规迹，从而p_n是M的有限投影，$\forall n$。又显然$\sup\limits_n p_n=1$，所以，M是半有限的。反之，设M是半有限的，于是，M_+上有忠实的半有限正规迹τ。

1) 设p是M的投影，使得$\tau(p)<\infty$。于是τ可唯一扩张为pMp上忠实的正规迹。我们说存在唯一的$h\in pMp$，$0\leqslant h\leqslant 1$，使得

$$\tau((1-h)x)=\varphi(hx)=\varphi(xh),\ \forall x\in pMp.$$

事实上，用定理1.10.4于τ，$\varphi+\tau$，有$h\in pMp$，$0\leqslant h\leqslant 1$，

使得对任意的 $x\in pMp$，有

$$\tau(x)=\frac{1}{2}(\varphi+\tau)(xh+hx)$$
$$=\frac{1}{2}\varphi(xh+hx)+\tau(hx).$$

于是，$\tau((1-h)x)=\frac{1}{2}\varphi(xh+hx),\forall x\in pMp$. 由此，

$$\frac{1}{2}\varphi(xh^2+hxh)=\tau((1-h)xh)$$
$$=\tau(h(1-h)x)=\tau((1-h)hx)$$
$$=\frac{1}{2}\varphi(hxh+h^2x),$$

即 $\varphi(xh^2)=\varphi(h^2x)$，$\forall x\in pMp$. 一般有 $\varphi(xh^{2n})=\varphi(h^{2n}x)$，$\forall x\in pMp$ 及 n. 用 h^2 的多项式列逼近 h，则 $\varphi(hx)=\varphi(xh)$，即有 $\tau((1-h)x)=\varphi(hx)=\varphi(xh)$，$\forall x\in pMp$.

2) 存在 $h\in M$，$0\leqslant h\leqslant 1$，h 的谱族在 $\{0,1\}$ 处 $s(M,M_*)$ 连续，使得

$$\tau(1-h)<\infty,\tau((1-h)x)=\varphi(hx)=\varphi(xh),\forall x\in M.$$

事实上，由于 τ 是半有限的，可取 M 的投影递增网 $\{p_l\}$，使得 $\sup_l p_l=1$，$\tau(p_l)<\infty$，$\forall l$. 由 1)，对每个 l，有 $h_l\in p_lMp_l$，$0\leqslant h_l\leqslant 1$，使得

$$\tau((1-h_l)x_l)=\varphi(h_lx_l)=\varphi(x_lh_l),\ \forall x_l\in p_lMp_l,$$

依命题 6.5.2，

$$\tau((1-h_l)p_lxp_l)=\tau(p_l(1-h_l)xp_l)=\tau((1-h_l)xp_l),$$

因此，

$$\tau((1-h_l)xp_l)=\varphi(h_lxp_l)=\varphi(p_lxh_l),\ \forall x\in M.\quad(1)$$

由于 M 的单位球是 $\sigma(M,M_*)$ 紧的，必要时代以子网，可以设 $h_l\xrightarrow{\sigma(M,M_*)}h\in M$，$0\leqslant h\leqslant 1$. 如果 $p_l\leqslant p_{l'}$，则依(1)

$$\tau((1-h_{l'})xp_l)=\tau((1-h_{l'})xp_lp_{l'})$$
$$\overset{(1)}{=}\varphi(h_{l'}xp_lp_{l'})=\varphi(h_{l'}xp_l).$$

由于 $\tau(p_l)<\infty$，依命题 6.5.3，$\tau(\cdot p_l)\in M_*$. 由此，对 l' 取极限，则

$$\tau((1-h)xp_l)=\varphi(hxp_l),\ \forall x\in M \text{ 及指标 } l. \tag{2}$$

特别地，$\varphi(hp_l)=\tau((1-h)p_l)=\tau((1-h)^{\frac{1}{2}}p_l(1-h)^{\frac{1}{2}})$, $\forall l$. 依 τ 的正规性，$\tau(1-h)=\varphi(h)<\infty$. 再依命题 6.5.3，在(2)中对 p_l 取极限，则

$$\tau((1-h)x)=\varphi(hx),\ \forall x\in M. \tag{3}$$

由(1)，当 $p_{l'}\geqslant p_l$ 时，$\tau((1-h_{l'})xp_l)=\varphi(p_{l'}xp_lh_{l'})$. 依 Schwartz 不等式.

$$\begin{aligned}|\varphi(p_{l'}xp_lh_{l'})-\varphi(xp_lh)| &\leqslant |\varphi(xp_l(h_{l'}-h))|\\ &+|\varphi((1-p_{l'})xp_lh_{l'})|\leqslant|\varphi(xp_l(h_{l'}-h))|\\ &+\|x\|\varphi(1-p_{l'})^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

对 l' 取极限，可见 $\tau((1-h)xp_l)=\varphi(xp_lh)$, $\forall l$. 依命题 6.5.3，再对 p_l 取极限，则

$$\tau((1-h)x)=\varphi(xh),\ \forall x\in M. \tag{4}$$

此外，由于 φ, τ 是忠实的，依(3)或(4)，h 的谱族在 $\{0,1\}$ 处必然是 $s(M,M_*)$ 连续的.

3) 令 $\alpha_t(x)=h^{-it}(1-h)^{it}xh^{it}(1-h)^{-it}$, $\forall x\in M$, $t\in\mathbb{R}$, 今只须证明 $\sigma_t^\varphi=\alpha_t$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

对任意的 $x,y\in M$，令

$$f(z)=\varphi(h^{-iz}(1-h)^{iz+1}xh^{iz+1}(1-h)^{-iz}y).$$

显然，f 在 $0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1$ 中连续有界，在 $0<\operatorname{Im} z<1$ 中解析. 对任意的 $t\in\mathbb{R}$，依(3)，(4)

$$\left.\begin{aligned}f(t)&=\varphi(\alpha_t((1-h)xh)y),\\ f(t+i)&=\varphi(h\alpha_t(x)(1-h)y)\\ &=\tau((1-h)\alpha_t(x)(1-h)y)\\ &=\tau((1-h)y(1-h)\alpha_t(x))\\ &=\varphi(y(1-h)\alpha_t(x)h),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

取 $y=1$, $x=ha(1-h)$，这里 $a^*=a$，则

$$f(t)=f(t+i)=\varphi(\alpha_t(y_0ay_0))$$

是实数，$\forall t\in\mathbf{R}$，这里 $y_0=h(1-h)$. 因此，f 是常数. 特别地，

$$\varphi(\alpha_t(y_0ay_0))=\varphi(y_0ay_0),\ \forall a^*=a\in M,\ t\in\mathbf{R}.$$

设 $y_0=\int_0^1\lambda de_\lambda$，$p_n=e_{1-\frac{1}{n}}-e_{\frac{1}{n}}$，由于 $\{e_\lambda\}$ 在 $(0,1)$ 处 $s(M, M_*)$ 连续，因此 $p_n\nearrow 1$. 又命

$$a_n=\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\lambda}de_\lambda\right)a\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\lambda}de_\lambda\right),$$

则 $y_0a_ny_0=p_nap_n$. 于是 $\varphi(\alpha_t(p_nap_n))=\varphi(p_nap_n)$，$\forall n$. 对 n 取极限，可见

$$\varphi(\alpha_t(a))=\varphi(a),\ \forall a\in M,\ t\in\mathbf{R}. \tag{6}$$

对任意的 x, y，令 $x_n=\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\lambda}de_\lambda\right)x\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\lambda}de_\lambda\right)$,

$$f_n(z)=\varphi(h^{-iz}(1-h)^{iz+1}hx_n(1-h)h^{iz+1}(1-h)^{-iz}y),$$

依 (5)，

$$f_n(t)=\varphi(\alpha_t(p_nxp_n)y),\ f_n(t+i)=\varphi(y\alpha_t(p_nxp_n)),\ \forall t\in\mathbf{R}.$$

由极大模原理，Schwartz 不等式及 (6)，

$$\sup_{\substack{0\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant 1\\ n}}|f_n(z)-f_m(z)|\leqslant\|y\|\varphi((p_nxp_n-p_mxp_m)^*\cdot(p_nxp_n-p_mxp_m))\to 0,$$

$$\sup_{0\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant 1,n}|f_n(z)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

从而有 KMS 函数 f，使得 $f_n(z)\to f(z)$，$\forall 0\leqslant \mathrm{Im}\, z\leqslant 1$，并且 $f(t)=\varphi(\alpha_t(x)y)$，$f(t+i)=\varphi(y\alpha_t(x))$，$\forall t\in\mathbf{R}$. 因此，$\{\alpha_t\}$ 关于 φ 也满足 KMS 条件，所以，$\alpha_t=\sigma_t^\varphi$，$\forall t\in\mathbf{R}$. 证毕.

注 本节见参考文献 [11]，[86]，[117].

第九章 Borel 构造

本章叙述 Borel 构造方面的一些重要结果. 严格地说，这些内容并不属于算子代数的范围（因此可以独立地阅读它），但是为着顺利地叙述后面的章节，本章是必不可少的. 此外，在这方面，我们并不引入过多的概念与结果，但对于后面章节的应用却已足够.

§1. Polish 空间

定义 9.1.1 拓扑空间 E 称为 Polish 空间，指可以给予 E 一个距离 d，使得 (E, d) 成为完备可分的距离空间，并且 d 所产生的拓扑与原来的拓扑等价.

例. 设 $\mathscr{H}$ 是可分的 Hilbert 空间，S 是 $B(\mathscr{H})$ 的单位球，则 S 依弱算子、强算子、强 * 算子拓扑都是 Polish 空间.

事实上，设 $\{\xi_n\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的单位球的可数稠集，对任意的 a, $b \in S$，令

$$d(a, b) = \sum_{m,n} \frac{1}{2^{m+n}} |\langle (a-b)\xi_m, \xi_n \rangle|,$$

$$\rho(a, b) = \sum_n \frac{1}{2^n} \|(a-b)\xi_n\|,$$

$$\rho^*(a, b) = \sum_n \frac{1}{2^n} \{\|(a-b)\xi_n\| + \|(a-b)^*\xi_n\|\}.$$

再依 $B(\mathscr{H})$ 是可数生成的及稠密性定理 1.6.1 即得证.

命题 9.1.2 Polish 空间的可数并与可数积也是 Polish 空间.

证. 设 $\{(E_n, d_n)\}$ 是 Polish 空间的列.

在 $E=\bigcup_n E_n$（不相交的并）上，命

$$d(x,y)=\begin{cases}\min\{1,d_n(x,y)\}, & \text{如 } x,y \text{ 属于同一个 } E_n,\\ 1, & \text{如 } x,y \text{ 属于不同的 } E_n\end{cases}$$

易见 (E,d) 是 Polish 空间，每个 E_n 为 E 的既闭又开的子集，且在每个 E_n 上，d 诱导的拓扑与 d_n 产生的拓扑等价.

在 $\times_n E_n$ 上，命

$$d((x_n),(y_n))=\sum_n \frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)},$$

即见 $\times_n E_n$ 依乘积拓扑是 Polish 空间. 证毕.

命题 9.1.3 Polish 空间的一个子空间是 Polish 的，当且仅当它是 G_δ 子集(即开集的可数交).

证. 设 (E,d) 是 Polish 空间，无妨设 E 依 d 的直径不超过 1. 如果 U 是 E 的开子集，令

$$\delta(x,y)=d(x,y)+|d(x,U')^{-1}-d(y,U')^{-1}|,$$

$\forall x,y\in U$，这里 $U'=E\backslash U$. 易见 δ 是 U 上的距离，并且 δ 产生的拓扑正是 d 所诱导的拓扑. 如果 $\{x_n\}(\subset U)$ 是按 δ 的基本列，它也是依 d 的基本列，因此有 $x\in E$，使得 $d(x_n,x)\to 0$. 这时 $\{d(x_n,U')^{-1}\}$ 也是基本的，由于 E 依 d 的直径 $\leqslant 1$，因此，$d(x_n,U')\to\lambda>0$. 于是，$d(x,U')=\lambda>0$，即 $x\in U$. 所以，U 作为 E 的子空间也是 Polish 空间.

今设 $F=\bigcap_n U_n$，这里 U_n 是 E 的开子集，$\forall n$. 设 δ_n 是 U_n，上如前段定义的距离，并命

$$d_F(x,y)=\sum_n \frac{1}{2^n}\frac{\delta_n(x,y)}{1+\delta_n(x,y)},\quad \forall x,y\in F,$$

由于 δ_n 与 d 在 F 上诱导相同的拓扑，$\forall n$，因此，d_F 与 d 在 F 上诱导相同的拓扑. 如果 $\{x_n\}(\subset F)$ 是依 d_F 的基本列，于是有 $y_k\in$

U_k，使得 $\delta_k(x_n, y_k) \xrightarrow{n} 0, \forall k$. 从而，$d(x_n, y_k) \xrightarrow{n} 0, \forall k$. 所以，$y_k = x \in F$，$\forall k$，以及 $d_F(x_n, x) \to 0$，即 F 作为 E 的子空间是 Polish 空间。

反之，设 (F, d_F) 是 Polish 空间，$F \subset E$，并且 d_F 与 d 在 F 上诱导相同的拓扑. 对每个 n，令

$$F_n = \Big\{x \in \bar{F} \mid \text{存在 } x \text{ 的开邻域 } U,$$

$$\text{使得 } (U \cap F) \text{ 依 } d_F \text{ 的直径} \leqslant \frac{1}{n}\Big\}.$$

显然，$F \subset \bigcap_n F_n$. 如果 $x \in \bigcap_n F_n$，于是对每个 n，有 x 的开邻域 U_n，使得 $(U_n \cap F)$ 依 d_F 的直径 $\leqslant \frac{1}{n}$. 无妨认为 $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$，并且 U_n 关于 d 的直径 $\longrightarrow 0$. 取 $x_n \in U_n \cap F$，于是 $\{x_n\} (\subset F)$ 是依 d_F 的基本列，因此，有 $y \in F$，使得 $d_F(x_n, y) \to 0$. 由此 $d(x_n, y) \to 0$. 又 U_n 是 x 的邻域，且 U_n 依 d 的直径 $\longrightarrow 0$，所以，$d(x_n, x) \to 0$，$y = x$，即 $F = \bigcap_n F_n$.

如果 $x \in F_n$，于是有 x 的开邻域 U，使得 $(U \cap F)$ 依 d_F 的直径 $\leqslant \frac{1}{n}$. 依 F_n 的定义，$U \cap \bar{F} \subset F_n$，因此，$F_n$ 是 $\bar{F}$ 的开子集. 即有 E 的开子集 G_n，使得 $F_n = \bar{F} \cap G_n$，$\forall n$. 令命 $U_m = \Big\{x \in E \mid d(x, \bar{F}) < \frac{1}{m}\Big\}$，它是 E 的开子集，并且 $\bar{F} = \bigcap_m U_m$. 由此，

$$F = \bigcap_n F_n = \bigcap_n (G_n \cap \bar{F}) = \bigcap_{n,m} (G_n \cap U_m),$$

即 F 是 E 的 G_δ 子集. 证毕.

命题 9.1.4 任意 Polish 空间必同胚于 $[0, 1]^\infty$ ($[0, 1]$ 的可数无穷积)的一个 G_δ 子集.

证. 设 (E, d) 是 Polish 空间，$\{a_n\}$ 是 E 依 d 的可数稠集，

于是 $x \to \left(\frac{d(a_n, x)}{1+d(a_n, x)}\right)_n$ 是 E 到 $[0,1]^\infty$ 中的同胚。再依命题 9.1.3 即得证。

命题 9.1.5 设 Ω 是局部紧 Hausdorff 空间，则 Ω 是 Polish 空间，当且仅当，Ω 具有可数基。

证. 设 Ω 具有可数基，Ω_∞ 是 Ω 的一点紧化，于是 Ω_∞ 必是 Polish 空间. 但 Ω 是 Ω_∞ 的开子集，依命题 9.1.3，Ω 也是 Polish 空间. 反之则显然. 证毕.

定义 9.1.6 Polish 空间 N^∞ 指集合

$$\{n=(n_k) \mid n_k \text{ 是非负整数}, k=1,2,\cdots\},$$

其中拓扑由距离

$$d(n,m)=\sum_k \frac{1}{2^k}\frac{|n_k-m_k|}{1+|n_k-m_k|}$$

来定义. 形如 $n=(n_1,\cdots,n_k,0,\cdots)$ 元的全体是 N^∞ 的可数稠集. 此外，对任意的 $n=(n_k)\in N^\infty$,

$$N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}=\{m\in N^\infty \mid m_i=n_i, 1\leqslant i\leqslant k\}, k=1,2,\cdots$$

构成 n 的邻域基.

命题 9.1.7 设 E 是 Polish 空间，则存在 N^∞ 到 E 上的连续映象.

证. 设 d 是 E 上相应的距离，且 E 依 d 的直径 $\leqslant 1$.

对 $n_1=0,1,\cdots$，令 $F(n_1)=E$，$F(n_1)$ 的 d-直径 $\leqslant 2^{-1}$ 的可数闭覆盖记为 $\{F(n_1,n_2)\mid n_2=0,1,\cdots\}$. $F(n_1,n_2)$ 又有 d-直径 $\leqslant 2^{-2}$ 的可数闭覆盖 $\{F(n_1,n_2,n_3)\mid n_3=0,1,\cdots\},\cdots$，一般我们有闭子集族$\{F(n_1,\cdots,n_p)\mid n_i=0,1,\cdots,1\leqslant i\leqslant p, p=1,2,\cdots\}$，使得 $F(n_1)=E$，$F(n_1,\cdots,n_p)=\bigcup_{k=0}^\infty F(n_1,\cdots,n_p,k)$，且 $F(n_1,\cdots,n_p)$ 的 d-直径 $\leqslant 2^{-(p-1)}$.

由于 (E,d) 是完备的，从而对任意的 $n=(n_k)\in N^\infty$，$\bigcap_{k=1}^\infty F(n_1,\cdots,n_k)$ 包含且仅包含一点，记为 $f(n)$. 于是 f 为 N^∞

到 E 的映象，且易见 $f(N^\infty)=E$。今若 $n^{(k)}\xrightarrow{N^\infty}n$，对任意的 $\varepsilon>0$，取 p，使得 $2^{-(p-1)}<\varepsilon$。于是 k 充分大时有 $n_i^{(k)}=n_i$，$1\leqslant i\leqslant p$，由此，$f(n)$ 与 $f(n^{(k)})$ 都 $\in F(n_1,\cdots,n_p)$，所以，$d(f(n^{(k)}),f(n))\leqslant 2^{-(p-1)}<\varepsilon$，即 f 是连续的。　证毕。

引理 9.1.8　设 (E,d) 是无孤立点的 Polish 空间，$\varepsilon>0$，则存在 E 的无孤立点的非空 G_δ 子集无穷列 $\{E_n\}$，使得每个 E_n 关于 d 的直径 $\leqslant\varepsilon$，$E_n\cap E_m=\varnothing$，$\forall n\neq m$，及 $\bigcup\limits_n E_n=E$。

证。无妨设 ε 小于 E 关于 d 的直径，取 E 的非空的可数开覆盖 $\{V_n\}$，使得每个 V_n 关于 d 的直径 $\leqslant\varepsilon$。令 $E_1=\overline{V}_1$，自然是 G_δ 子集，且无孤立点。归纳定义 $E_n=\overline{V}_n\backslash F_n$，这里 $F_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}E_k$，$\forall n>1$。由于 F_n 是闭集，因此 E_n 是 G_δ 子集。又 $(V_n\backslash F_n)\subset E_n\subset\overline{V_n\backslash F_n}$，所以，$E_n$ 也无孤立点。今若 $\{E_n\}$ 中有无限个是非空的，即满足要求；否则至少有两个是非空的(因 ε 小于 E 的 d-直径)，再对其中一个施行同样手续，继续下去，即得证。

引理 9.1.9　设 E 是无孤立点的 Polish 空间，则对任意的非负整数 $n_1,\cdots,n_k$，有 E 的非空的无孤立点 G_δ 子集 $E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}$，使得

1) 如果 $(n_1,\cdots,n_k)\neq(m_1,\cdots,m_k)$，则

$$E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}\cap E^{(k)}_{m_1,\cdots,m_k}=\varnothing;$$

2) $E^{(0)}=E$，$E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}=\bigcup\limits_{p=0}^{\infty}E^{(k+1)}_{n_1,\cdots,n_k,p}$；

3) 如果 $d^{(0)}$ 是 Polish 空间 $E^{(0)}=E$ 上相应的距离，$d^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}$ 是 Polish 空间 $E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}$（依 E 的诱导拓扑）上相应的距离，则 $E^{(k+1)}_{n_1,\cdots,n_{k+1}}$ 关于 $(d^{(0)}+d^{(1)}_{n_1}+\cdots+d^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k})$ 的直径 $\leqslant(k+1)^{-1}$。

证. 对 $(E,d^{(0)})$ 及 $\varepsilon=1$，使用引理 9.1.8，得到 $\{E^{(1)}_{n_1}\}$；再对 $(E^{(1)}_{n_1},d^{(0)}+d^{(1)}_{n_1})$ 及 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 使用引理 9.1.8，又得到$\{E^{(2)}_{n_1,n_2}\}$；

如此继续，即得证。

命题 9.1.10 Polish 空间 E 是 N^∞ 的一一连续映象，当且仅当，E 非空并且无孤立点。

证. N^∞ 是无孤立点的，因此必要性显然. 今设 E 是无孤立点的非空 Polish 空间，取 $\{E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}\}$ 如引理 9.1.9. 由于 $N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}$ 与 N^∞ 同胚，依命题 9.1.7，有 $N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}$ 到 $E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}$ 上的连续映象 $f^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}$.

任意固定 k，$\{N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}|n_1,\cdots,n_k\}$ 是 N^∞ 的互不相交的既闭又开覆盖，于是可以定义 N^∞ 到 E 上的连续映象 $f^{(k)}$，使得 $f^{(k)}|N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}=f^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}$.

对任意的 $n=(n_k)\in N^\infty$ 及正整数 $p\leqslant q$,

$$f^{(q)}(n)\in E^{(q)}_{n_1,\cdots,n_q}\subset E^{(p)}_{n_1,\cdots,n_p}.$$

依引理 9.1.9，$d^{(0)}(f^{(p)}(n),f^{(q)}(n))\leqslant p^{-1}$. 因此 $\{f^{(k)}(n)\}_k$ 是 $(E,d^{(0)})$ 的基本列，因此有 $f(n)\in E$，使得 $f^{(k)}(n)\xrightarrow{d^{(0)}}f(n)$，并且收敛速度对 $n\in N^\infty$ 一致. 于是得到 N^∞ 到 E 的连续映象 f.

依引理 9.1.9，$\{f^{(p)}(n)\}_{p\geqslant k}$ 也是 $(E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k},d^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k})$ 的基本列，$\forall k$，因此，$f(n)\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}$. 由于 $E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}$ 关于 $d^{(0)}$ 的直径 $\leqslant k^{-1}$，所以，$\{f(n)\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}$，$\forall n\in N^\infty$. 今若 $n=(n_k)\neq m=(m_k)\in N^\infty$，$k$ 足够大时 $(n_1,\cdots,n_k)\neq(m_1,\cdots,m_k)$，于是 $E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}\cap E^{(k)}_{m_1,\cdots,m_k}=\varnothing$，所以，$f(n)\neq f(m)$，即 f 是一一的. 最后，对任意的 $x\in E$，依引理 9.1.9，必有 $n=(n_k)\in N^\infty$，使得 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E^{(k)}_{n_1,\cdots,n_k}$，即 $x=f(n)$，$f(N^\infty)=E$. 证毕.

命题 9.1.11 设 E 是 Polish 空间，则可写 $E=F\cup G$，这里 $F\cap G=\varnothing$，G 是 E 可数的开子集，F 或为空集或为 N^∞ 的一一连续映象.

证. 设 $\{V_n\}$ 是 E 拓扑的可数基，令

$$G = \bigcup\{V_n | V_n \text{ 是可数子集}\}$$

及 $F = E\backslash G$. 如果 $F \neq \varnothing$，依命题 9.1.10，只须证明 F 无孤立点. 设 $x \in F$，V 是 x 的任意邻域，于是有 n，使得 $x \in V_n \subset V$. 既然 $x \notin G$，所以 V_n 是不可数的. 又 G 是可数的，因此必有 $y \in V_n\backslash G \subset V \cap F$，且 $y \neq x$. 这说明 F 无孤立点. 证毕.

注 本节见参考文献 [5]，[7]，[129].

§2. Borel 子集与 Sousline 子集

定义 9.2.1 设 E 是 Polish 空间，E 的一个子集称为 Borel 子集，指它属于由 E 的开子集全体所生成的 σ-Bool 代数.

E 的子集 A 称为 Sousline 的（或者解析的），指存在 N^∞ 到 E 的连续映象 f，使得 $f(N^\infty) = A$.

引理 9.2.2 设 E 是 Polish 空间，$\mathscr{F}$ 是 E 的子集族，使得：1) $\mathscr{F}$ 包含 E 的任意开子集与闭子集；2) $\mathscr{F}$ 对可数交封闭；3) $\mathscr{F}$ 对互不相交子集的可数并封闭，则 $\mathscr{F}$ 包含 E 的所有 Borel 子集.

证. 令 $\mathscr{S} = \{V \subset E | V$ 与 $(E\backslash V)$ 都 $\in \mathscr{F}\}$，显然 $\mathscr{S}$ 包含 E 的所有开子集与闭子集. 如果 $V_1, V_2 \in \mathscr{S}$，于是，$V_1\backslash V_2 = V_1 \cap (E\backslash V_2) \in \mathscr{F}$；$E\backslash(V_1\backslash V_2) = (E\backslash V_1) \cup (V_1 \cap V_2) \in \mathscr{F}$，因此，$(V_1\backslash V_2) \in \mathscr{S}$ 又如果 $\{V_n\}$ 是 $\mathscr{S}$ 中互不相交的子集列，于是，$\bigcup\limits_n V_n \in \mathscr{F}$，$E\backslash \bigcup\limits_n V_n = \bigcap\limits_n (E\backslash V_n) \in \mathscr{F}$，因此，$\bigcup\limits_n V_n \in \mathscr{S}$. 这表明 $\mathscr{S}$ 是 σ-Bool 代数. 从而 $\mathscr{S}(\subset \mathscr{F})$ 包含所有的 Borel 子集. 证毕.

命题 9.2.3 设 E 是 Polish 空间.

1) 如果 P 是 Polish 空间，且 f 是 P 到 E 的连续映象，则 $f(P)$ 是 E 的 Sousline 子集；

2) E 的 Borel 子集必为 Polish 空间的一一连续映象；

3) E 的 Borel 子集必为 Sousline 子集.

证. 1) 由命题 9.1.7 及定义 9.2.1 立见.

2）令$\mathscr{F}$是E的可以为 Polish 空间一一连续映象子集的全体，只须证明$\mathscr{F}$满足引理 9.2.2 的条件。

E的任意开子集或闭子集本身就是 Polish 空间，因此属于$\mathscr{F}$。

今设 $\{E_n\}\subset\mathscr{F}$，$P_n$是 Polish 空间，$f_n$是$P_n$到$E$的一一连续映象，使得 $f(P_n)=E_n$，$\forall n$。定义积空间 $\underset{n}{\times}P_n$ 到 $\underset{n}{\times}E$ 的映象 f：$f(p_1,\cdots,p_n,\cdots)=(f_1(p_1),\cdots,f_n(p_n),\cdots)$。显然$f$是一一且连续的。记 $\Delta=\{(x,\cdots,x,\cdots)|x\in E\}$，它是 $\underset{n}{\times}E$ 的闭子集，于是，$Q=f^{-1}(\Delta)$ 是 $\underset{n}{\times}P_n$ 的闭子集，从而Q也是 Polish 空间，并且f把Q一一连续地映成 $\{(x,\cdots,x,\cdots)|x\in\bigcap\limits_n E_n\}$。如果令$\pi$是 $\underset{n}{\times}E$ 到其第一分量上的投影，则 $\pi\circ f$ 一一连续地把Q映成 $\bigcap\limits_n E_n$，所以，$\bigcap\limits_n E_n\in\mathscr{F}$。

最后，设 $\{E_n\}\subset\mathscr{F}$，且 $E_n\cap E_m=\varnothing$，$\forall n\neq m$。令P_n是 Polish 空间，f_n是P_n到E的一一连续映象，使得 $f(P_n)=E_n$，$\forall n$。记 $P=\bigcup\limits_n P_n$，f: $P\to E$ 使得 $f|P_n=f_n$，$\forall n$。即见f是 Polish 空间P到E的一一连续映象，且 $f(P)=\bigcup\limits_n E_n$。所以，$\bigcup\limits_n E_n\in\mathscr{F}$。

3）由2)与1)立见。　证毕。

命题 9.2.4　设E是 Polish 空间，B是E的 Borel 子集，则或者B可数，或者有N^∞到E的一一连续映象f，使得 $f(N^\infty)\subset B$，并且 $(B\setminus f(N^\infty))$ 是可数的。

证．由命题 9.2.3 与 9.1.11 立见。

命题 9.2.5　1）Sousline 子集的连续映象是 Sousline 的，即若E，F是 Polish 空间，f是E到F的连续映象，如果A是E的 Sousline 子集，则$f(A)$是F的 Sousline 子集；

2）Sousline 子集的可数交与可数并是 Sousline 的。

证. 1）由定义 9.2.1 立见. 2）设 $\{A_n\}$ 是 Polish 空间 E 的 Sousline 子集列. 于是对每个 n，有 N^∞ 到 E 的连续映象 f_n，使得 $f_n(N^\infty)=A_n$, $\forall n$. 定义 f: $P=\bigcup_n P_n\to E$，使得 $f|P_n=f_n$，这里 $P_n=N^\infty$, $\forall n$，则 $f(P)=\bigcup_n A_n$，因此，$\bigcup_n A_n$ 是 Sousline 的.

命 $Q=\bigtimes_n P_n$，这里 $P_n=N^\infty$, $\forall n$，及

$$M=\{x=(x_n)\in Q\,|\,f_n(x_n)=f_m(x_m),\ \forall n,m\}.$$

自然 M 是 Q 的闭子集，因此是 Polish 空间. 再令 $g(x)=f_1(x_1)$, $\forall x=(x_n)\in M$，则 $g(M)=\bigcap_n A_n$，因此，$\bigcap_n A_n$ 是 Sousline 的. 证毕.

定义 9.2.6 Polish 空间 E 的子集 A, B 称为 Borel 分离的，指存在 E 的 Borel 子集 F，使得 $A\subset F$, $B\subset(E\backslash F)$.

引理 9.2.7 设 $\{A_n\}$, $\{B_m\}$ 是 Polish 空间的子集列，并且 A_n 与 B_m Borel 分离，$\forall n,m$，则 $A=\bigcup_n A_n$ 与 $B=\bigcup_m B_m$ 也是 Borel 分离的.

证. 设 $F_{n,m}$ 是 E 的 Borel 子集，使得 $A_n\subset F_{n,m}$, $B_m\subset E\backslash F_{n,m}$, $\forall n,m$. 于是

$$A_n\subset\bigcap_m F_{n,m},\quad B_k\subset(E\backslash F_{n,k})\subset(E\backslash\bigcap_m F_{n,m}),\quad \forall n,k\ .$$

如命 $F=\bigcup_n\bigcap_m F_{n,m}$，则 $A\subset F$, $B\subset\bigcap_n(E\backslash\bigcap_m F_{n,m})=(E\backslash F)$，所以，$A$ 与 B Borel 分离. 证毕

命题 9.2.8 设 A, B 是 Polish 空间 E 的不相交的 Sousline 子集，则它们是 Borel 分离的.

证. 设 f, g 分别是 N^∞ 到 E 的连续映象，使得 $f(N^\infty)=A$, $g(N^\infty)=B$. 若 A, B 并非是 Borel 分离的，由于 $N^\infty=\bigcup_{k=0}^\infty N_k^\infty$,

依引理 9.2.7，必有 n_1，m_1，使得 $f(N^{\infty}_{n_1})$ 与 $g(N^{\infty}_{m_1})$ 不是 Borel 分离的．递推可见，存在 $n=(n_k)$ 及 $m=(m_k)\in N^{\infty}$，使得 $f(N^{\infty}_{n_1,\cdots,n_k})$ 与 $g(N^{\infty}_{m_1,\cdots,m_k})$ 不是 Borel 分离的，$\forall k$．由于 $A\cap B=\varnothing$，$f(n)\neq g(m)$，于是可取 E 的开子集 U，V，使得

$$f(n)\in U,\quad g(m)\in V,\quad U\cap V=\varnothing.$$

k 充分大时，$f(N^{\infty}_{n_1,\cdots,n_k})\subset U$，$g(N^{\infty}_{m_1,\cdots,m_k})\subset V$．这便与 $f(N^{\infty}_{n_1,\cdots,n_k})$，$g(N^{\infty}_{m_1,\cdots,m_k})$ 不是 Borel 分离的相矛盾．所以，A，B 是 Borel 分离的． 证毕．

命题 9.2.9 如果 $\{A_n\}$ 是 Polish 空间 E 的互不相交的 Sousline 子集列，则 $\{A_n\}$ 是 Borel 分离的，即存在 E 的互不相交的 Borel 子集列 $\{B_n\}$，使得 $A_n\subset B_n$，$\forall n$．

证．依命题 9.2.5，9.2.8，对任意的 n，有 Borel 子集 F_n，使得 $A_n\subset F_n$，$\bigcup\limits_{k>n}A_k\subset(E\setminus F_n)$．再令 $B_1=F_1$，$B_n=F_n\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}B_i$，$\forall n>1$，即满足要求． 证毕．

定理 9.2.10 （Sousline 准则） 设 E Polish 空间，$B\subset E$，则 B 是 Borel 子集，必须且只须，B 与 $(E\setminus B)$ 都是 Sousline 子集．

证．必要性显然．今设 B 与 $(E\setminus B)$ 都是 Sousline 子集，依命题 9.2.8，它们是 Borel 分离的，所以，B 必是 Borel 子集． 证毕．

定理 9.2.11 设 E 是 Polish 空间，$\mathscr{B}$ 表示 E 的 Borel 子集的全体，A 是 E 的 Sousline 子集，则对于 $\mathscr{B}$ 上任意的 σ-有限测度 ν，存在 E 的 Borel 子集 B，F，使得 $A\subset B$，$(B\setminus A)\subset F$，且 $\nu(F)=0$．

证．无妨设 ν 是有限的．对于 E 的任意子集 S，我们说存在着 S 关于 ν 的最小 Borel 覆盖，即有 $T\in\mathscr{B}$，$S\subset T$，使得如果 $F\in\mathscr{B}$，$S\subset F$，则 $\nu(T\setminus F)=0$．事实上，由于 ν 有限，可取 $\{E_n\}\subset\mathscr{B}$，使得 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset S$，并且 $\lim\limits_n\nu(E_n)=\lambda=\inf\{\nu(F)|S\subset F\}$．令 $T=\bigcap\limits_n E_n$，则 $S\subset T$，$T\in\mathscr{B}$，$\nu(T)=\lambda$．

如果 $F\in\mathscr{B}$，$S\subset F$，则 $\nu(T)=\nu(T\cap F)=\lambda$。因此，$\nu(T\setminus F)=0$。

现在来证明定理。依定义 9.2.1，有 N^∞ 到 E 的连续映象 f，使得 $f(N^\infty)=A$。对任意的非负整数 $n_1,\cdots,n_k$，命 $E_{n_1,\cdots,n_k}$ 是 $f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k})$ 的最小 Borel 覆盖，并无妨设 $E_{n_1,\cdots,n_k}\subset\overline{f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k})}$。定义

$$B=\bigcup_{n_1=0}^{\infty}E_{n_1},$$

$$F=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n_1,\cdots,n_k}\left(E_{n_1,\cdots,n_k}\setminus\bigcup_{p=0}^{\infty}E_{n_1,\cdots,n_k,p}\right).$$

于是

$$A=f(N^\infty)=\bigcup_{n_1=0}^{\infty}f(N^\infty_{n_1})\subset\bigcup_{n_1=0}^{\infty}E_{n_1}=B.$$

由于 $N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}=\bigcup\limits_{p=0}^{\infty}N^\infty_{n_1,\cdots,n_k,p}$，因此，$f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k})\subset\bigcup\limits_{p=0}^{\infty}E_{n_1,\cdots,n_k,p}$。

依 $E_{n_1,\cdots,n_k}$ 的定义，$\nu\left(E_{n_1,\cdots,n_k}\setminus\bigcup\limits_{p=0}^{\infty}E_{n_1,\cdots,n_k,p}\right)=0$，$\forall n_1,\cdots,n_k$，所以，$\nu(F)=0$。

今只须证明 $(B\setminus A)\subset F$。设 $x\in(B\setminus A)$，于是有 n_1，使得 $x\in E_{n_1}\setminus A$。如果 $x\notin F$，则 $x\notin E_{n_1}\setminus\bigcup\limits_{n_2=0}^{\infty}E_{n_1,n_2}$。于是 $x\in E_{n_1}\cap\left(\bigcup\limits_{n_2=0}^{\infty}E_{n_1,n_2}\right)$，从而又有 n_2，使得 $x\in E_{n_1,n_2}$。又依 F 的定义，$x\notin E_{n_1,n_2}\setminus\bigcup\limits_{n_3=0}^{\infty}E_{n_1,n_2,n_3}$。如此继续，有 $n=(n_k)\in N^\infty$，使得 $x\in E_{n_1,\cdots,n_k}$，$\forall k$。今指出

$$\{f(n)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k})}.$$

事实上，若 $y\neq f(n)$，取 $f(n)$ 在 E 中的闭邻域 V，使得 $y\notin V$。f

是连续的，因此 k 充分大，$f(N^{\infty}_{n_1,\cdots,n_k})\subset V$． V 是闭的，因此，$y\in\overline{f(N^{\infty}_{n_1,\cdots,n_k})}$．从而，$y\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{f(N^{\infty}_{n_1,\cdots,n_k})}$，即 $\{f(n)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{f(N^{\infty}_{n_1,\cdots,n_k})}$．令 $x\in E_{n_1,\cdots,n_k}\subset\overline{f(N^{\infty}_{n_1,\cdots,n_k})}$，$\forall k$，因此，$x=f(n)\in A$，这与 $x\in(B\backslash A)$ 相矛盾．从而 $(B\backslash A)\subset F$． 证毕．

系 9.2.12 设 E，A，ν 如定理 9.2.10，则存在 E 的 Borel 子集 C，G，使得 $C\subset A$，$(A\backslash C)\subset G$，$\nu(G)=0$．

证．设 B，F 如定理 9.2.11，令 $C=B\backslash F$，$G=F$，即满足要求． 证毕．

注 本节见参考文献 [5]，[63]，[129]．

§3. Borel 映象与标准的 Borel 空间

定义 9.3.1 $(E,\mathscr{B})$ 称为 Borel 空间，指 E 是一个集合，$\mathscr{B}$ 是由 E 的子集组成的一个 σ-Bool 代数．$\mathscr{B}$ 中的子集将称为 E 的 Borel 子集，$\mathscr{B}$ 也称为 Borel 空间 E 的 Borel 构造．

例如 E 是 Polish 空间，$\mathscr{B}$ 是 E 的 Borel 子集(定义 9.2.1)全体，则 $(E,\mathscr{B})$ 是 Borel 空间．

Borel 空间 $(E,\mathscr{B}_E)$ 到 Borel 空间 $(F,\mathscr{B}_F)$ 的映象 f 称为 Borel 的，指 $f^{-1}(B_F)\in\mathscr{B}_E$，$\forall B_F\in\mathscr{B}_F$．

如果 f 是 $(E,\mathscr{B}_E)$ 到 $(F,\mathscr{B}_F)$ 上一一的 Borel 映象，并且 f^{-1} 也是 Borel 的，则称 $(E,\mathscr{B}_E)$ 与 $(F,\mathscr{B}_F)$ 是 Borel 同构的，f 称为 Borel 同构映象．

设 $(E,\mathscr{B}_E)$ 是 Borel 空间，$\mathscr{P}(\subset\mathscr{B})$ 称为 $\mathscr{B}$ 的生成集，指 $\mathscr{B}$ 是包含 $\mathscr{P}$ 的最小 σ-Bool 代数．

命题 9.3.2 1) 设 $(E,\mathscr{B}_E)$，$(F,\mathscr{B}_F)$ 是 Borel 空间，$\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{B}_F$ 的生成集，f: $E\to F$ 是 Borel 的，当且仅当，$f^{-1}(B_F)\in\mathscr{B}_E$，$\forall B_F\in\mathscr{P}$；2) 设 f 是 Polish 空间 E 到 Polish 空间 F 的连续映象，则 f 是 Borel 的；3) Borel 映象的复合仍然是 Borel 的．

证．1) 令 $\mathscr{B}'_E=\{f^{-1}(B_F)\mid B_F\in\mathscr{B}_F\}$，它显然是 σ-Bool 代

数. 又若 $\mathscr{B}''_E$ 是由 $f^{-1}(\mathscr{P})$ 生成的 σ-Bool 代数，则 $\mathscr{B}''_E\subset\mathscr{B}_E$. 由此，$\mathscr{P}\subset\{B_F\in\mathscr{B}_F|f^{-1}(B_F)\in\mathscr{B}''_E\}=\mathscr{B}'_F\subset\mathscr{B}_F$. 但 $\mathscr{B}'_F$ 是 σ-Bool 代数，$\mathscr{P}$生成 $\mathscr{B}_F$，因此，$\mathscr{B}'_F=\mathscr{B}_F$. 进而，$\mathscr{B}'_E=\mathscr{B}''_E\subset\mathscr{B}_E$. 因此 f 是 Borel 的. 2) 由 f^{-1} 把开集变为开集，再依 1) 立见. 3)是显然的. 证毕.

定义 9.3.3 Borel 空间 $(E,\mathscr{B})$ 称为标准的，指可以在 E 中引入拓扑 $\mathscr{T}$，使得 $(E,\mathscr{T})$ 成为 Polish 空间，同时 Polish 空间 $(E,\mathscr{T})$ 的 Borel 子集全体即为 $\mathscr{B}$.

显然 Polish 空间作为 Borel 空间时是标准的. 反之对于一个标准的 Borel 空间，可能可以引入几种拓扑，使之都成为 Polish 空间，而保持 Borel 构造不变(例见命题 9.3.14).

命题 9.3.4 1) 设 $(E,\mathscr{B})$ 是标准的 Borel 空间，f 是 E 中的 Borel 映象，则 $\{x\in E|x=f(x)\}\in\mathscr{B}$;

2) 设 $(E,\mathscr{B}_E)$，$(F,\mathscr{B}_F)$ 是标准的 Borel 空间，f 是 E 到 F 的 Borel 映象，则 f 的图象 $\{(x,f(x))|x\in E\}$ 是 $E\times F$ 的 Borel 子集，这里 $E\times F$ 的 Borel 构造是由 $B_E\times B_F(\forall B_E\in\mathscr{B}_E,B_F\in\mathscr{B}_F)$ 生成的 σ-Bool 代数(也是标准 Borel 空间).

证. 1) 无妨设 E 是 Polish 空间，于是 $\Delta=\{(x,x)|x\in E\}$ 是 $E\times E$ 的闭子集. 定义 E 到 $E\times E$ 的映象 $f\times I$: $x\to(f(x),x)$，易见它是 Borel 的，从而，$(f\times I)^{-1}(\Delta)=\{x\in E|x=f(x)\}\in\mathscr{B}$.

2) 定义 $E\times F$ 中的映象 φ: $(x,y)\to(x,f(x))$，易见它是 Borel 的. 依 1)，$\{(x,f(x))|x\in E\}=\{(x,y)|(x,y)=\varphi(x,y)\}$ 是 $E\times F$ 的 Borel 子集. 证毕.

命题 9.3.5 设 E，F 是 Polish 空间，f 是 E 到 F 的 Borel 映象，A 是 E 的 Sousline 子集，则 $f(A)$ 是 F 的 Sousline 子集.

证. 设 g 是 N^∞ 到 E 的连续映象，使得 $g(N^\infty)=A$. 于是，$f\circ g$ 是 N^∞ 到 F 的 Borel 映象，依命题 9.3.4，$\{(n,f\circ g(n))|n\in N^\infty\}$ 是 $N^\infty\times F$ 的 Borel 子集. 定义 $N^\infty\times F$ 到 $E\times F$ 的映象 $g\times I$: $(n,y)\to(g(n),y)$，它是连续的，因此，$g\times I(\{(n,f\circ g(n))|$

$n\in N^{\infty}\}) = \{(x, f(x)) | x\in A\}$ 是 $E\times F$ 的 Sousline 子集. 令 π 是 $E\times F$ 到 F 的投影, 则 $f(A) = \pi(\{(x, f(x)) | x\in A\})$ 是 F 的 Sousline 子集. 证毕.

定义 9.3.6 集合 E 的子集族 $\mathscr{F}$ 称为分离的,指对任意的 $x\neq y\in E$,有 $F\in\mathscr{F}$,使得 $\{x, y\}$ 中的一个 $\in F$,而另一个 $\notin F$.

引理 9.3.7 设 $(E, \mathscr{B})$ 是 Borel 空间, $\mathscr{P}\subset\mathscr{B}$, 则下列是等价的: 1) $\mathscr{B}$ 是分离的,$\mathscr{P}$ 生成 $\mathscr{B}$;2) $\mathscr{P}$ 是分离的, 并且生成 $\mathscr{B}$.

证. 只须由 1)推导 2). 若 $\mathscr{P}$ 不是分离的, 则存在 $x\neq y\in E$,使得对任意的 $F\in\mathscr{P}$, x 与 y 同时属于或不属于 F. 令 $\mathscr{L} = \{B\in\mathscr{B} | x, y$ 同时属于或不属于 $B\}$,显然, $\mathscr{P}\subset\mathscr{L}\subset\mathscr{B}$. 如果 $\{B_n\}\subset\mathscr{L}$, 自然 $\bigcup_n B_n\in\mathscr{L}$. 如果 $B_1, B_2\in\mathscr{L}$,则仅有三种情况: ① $x, y\notin B_1$; ② $x, y\in(B_1\backslash B_2)$; ③ $x, y\in(B_1\cap B_2)$, 因此, $(B_1\backslash B_2)\in\mathscr{L}$. 这说明 $\mathscr{L}$ 是 σ-Bool 代数,所以, $\mathscr{L} = \mathscr{B}$,即 $\mathscr{B}$ 不是分离的,矛盾. 证毕.

定义 9.3.8 Borel 空间 $(E, \mathscr{B})$ 称为 $\frac{1}{2}$-标准的, 指 $\mathscr{B}$ 是分离的,且 $\mathscr{B}$ 包含一个可数的生成集. 依引理 9.3.7, 这等价于存在 $\mathscr{P}\subset\mathscr{B}$, $\mathscr{P}$ 可数, $\mathscr{P}$ 生成 $\mathscr{B}$, 且 $\mathscr{P}$ 是分离的.

显然标准的 Borel 空间必是 $\frac{1}{2}$-标准的.

记 $M = \{a = (a_1, \cdots, a_n, \cdots) | a_n = 0$ 或 $1, \forall n\}$,即 M 是离散紧空间 $\{0, 1\}$ 的可数无穷积,因此,M 是紧的 Polish 空间.

定理 9.3.9 Borel 空间 $(E, \mathscr{B})$ 是 $\frac{1}{2}$-标准的,必须且只须,它 Borel 同构于 M 的一个子空间.

证. 记 $F_n = \{a\in M | a$ 的第 n 个分量 $= 1\}$, 它是 M 的既闭又开子集,并且 $\{F_n | n\}$ 生成 M 的 Borel 构造.

如果 $(E, \mathscr{B})$ 是 $\frac{1}{2}$-标准的,于是有 $\{B_n\}\subset\mathscr{B}$,它生成 $\mathscr{B}$,并且是分离的. 定义 f: $E\to M$,

$$f(x) \text{ 的第 } n \text{ 个分量} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x \in B_n \\ 0, & \text{如果 } x \notin B_n \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots, \quad \forall x \in E,$$

由于$\{B_n\}$是分离的，因此，f是一一的。注意对任意的n，$f(B_n) = F_n \cap f(E)$，依命题9.3.2，f是E到$f(E)$上的 Borel 同构，这里$f(E)$的 Borel 构造由M诱导而来，即由$\{F_n \cap f(E) | n\}$生成。

反之如$(E, \mathscr{B})$ Borel 同构于M的一个子空间，由于M的子空间必是$\frac{1}{2}$-标准的，因此，$(E, \mathscr{B})$是$\frac{1}{2}$-标准的。　证毕。

引理 9.3.10　设E是 Polish 空间，f是N^∞到E的一一连续映象，则$f(N^\infty)$是E的 Borel 子集。

证。对任意固定的k，$\{f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}) | n_1, \cdots, n_k\}$是$E$的互不相交的 Sousline 子集列，依命题9.2.9，有E的互不相交的 Borel 子集列$\{F_{n_1,\cdots,n_k} | n_1, \cdots, n_k\}$，使得$f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}) \subset F_{n_1,\cdots,n_k}$，$\forall n_1, \cdots, n_k$。归纳地定义：$A_{n_1} = F_{n_1}$，$A_{n_1,\cdots,n_k} = F_{n_1,\cdots,n_k} \cap \overline{f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k})} \cap A_{n_1,\cdots,n_{k-1}}$，$\forall k > 1$，则 Borel 子集族$\{A_{n_1,\cdots,n_k} | n_1, \cdots, n_k, k \geq 1\}$有如下性质：

1) $A_{n_1,\cdots,n_k} \cap A_{m_1,\cdots,m_k} = \varnothing$，$\forall (n_1, \cdots, n_k) \neq (m_1, \cdots, m_k)$；

2) $A_{n_1,\cdots,n_{k+1}} \subset A_{n_1,\cdots,n_k}$；

3) $f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}) \subset A_{n_1,\cdots,n_k} \subset \overline{f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k})}$，

其中$f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}) \subset A_{n_1,\cdots,n_k}$可用归纳法证明，余皆显然。

由于f是一一的，因此，$f(n) = f\left(\bigcap_{k=1}^\infty N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}\right) = \bigcap_{k=1}^\infty f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k})$，$\forall n = (n_k) \in N^\infty$。仿照定理9.2.11证明的相应部分，也有$\{f(n)\} = \bigcap_{k=1}^\infty \overline{f(N^\infty_{n_1,\cdots,n_k})}$。再由性质3)，$\{f(n)\} = \bigcap_{k=1}^\infty A_{n_1,\cdots,n_k}$，$\forall n = (n_k) \in N^\infty$。

现在证明$f(N^\infty) = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n_1,\cdots,n_k} A_{n_1,\cdots,n_k}$，由此即见$f(N^\infty)$是

E的 Borel 子集。已证 $\{f(n)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n_1,\cdots,n_k}$，因此，$f(N^\infty)\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n_1,\cdots,n_k}A_{n_1,\cdots,n_k}$。反之如 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n_1,\cdots,n_k}A_{n_1,\cdots,n_k}$，对 $k=1$，有 m_1，使得 $x\in A_{m_1}$。依性质 1)，2)，

$$x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n_1,\cdots,n_k}(A_{n_1,\cdots,n_k}\cap A_{m_1})$$

$$=A_{m_1}\cap\bigcap_{k=2}^{\infty}\bigcap_{n_2,\cdots,n_k}A_{m_1,n_2,\cdots,n_k}$$

递推可见有 $m=(m_k)\in N^\infty$，使得 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{m_1,\cdots,m_k}=\{f(m)\}$，所以，$x=f(m)\in f(N^\infty)$。　证毕。

引理 9.3.11　设 E，F 是 Polish 空间，f 是 E 到 F 的一一 Borel 映象，则 $f(E)$ 是 F 的 Borel 子集，并且 f 是 E 到 $f(E)$ 上的 Borel 同构。

证。只须对 E 的任意 Borel 子集 B，证明 $f(B)$ 是 F 的 Borel 子集。记 $G=\{(x,f(x))|x\in B\}$。设 d 是 F 上相应的距离，$\{a_k\}$ 是 F 的可数稠集，令

$$U_k^n=\left\{y\in F\,|\,d(y,a_k)\leqslant\frac{1}{2n}\right\},\quad V_k^n=f^{-1}(U_k^n\cap f(B)).$$

我们来证明 $G=\bigcap_n\bigcup_k(V_k^n\times U_k^n)$。事实上，对任意的 n，$\bigcup_k U_k^n=F$，因此，$G\subset\bigcap_n\bigcup_k(V_k^n\times U_k^n)$。反之设 $(x,y)\in\bigcap_n\bigcup_k(V_k^n\times U_k^n)$，即对每个 n，有 $k=k(n)$，使得 $(x,y)\in V_k^nU_k^n$。于是 $f(x)\in U_k^n\cap f(B)$，f 是一一的，因此，$x\in B$，$f(x)\in U_k^n$。又 $y\in U_k^n$，因此，$d(f(x),y)\leqslant\frac{1}{n}$。但 n 是任意的，所以，$f(x)=y$，即 $(x,y)\in G$。

由于 f 是一一的，$V_k^n = f^{-1}(U_k^n) \cap B$，由此可见 G 是 $E \times F$ 的 Borel 子集。

如果 G 是可数的，自然 $f(B)$ 是 F 的 Borel 子集。今设 G 不是可数的，依命题 9.2.4，有 N^∞ 到 $E \times F$ 的一一连续映象 g，使得 $g(N^\infty) \subset G$，并且 $(G \backslash g(N^\infty))$ 是可数的。记 π 是 $E \times F$ 到 F 上的投影，由于 $g(N^\infty) \subset G$ 及 f 是一一的，可见 $\pi \circ g$ 是 N^∞ 到 F 的一一连续映象。依引理 9.3.10，$\pi \circ g(N^\infty)$ 是 F 的 Borel 子集。于是，$f(B) = \pi G = \pi \circ g(N^\infty) \cup \pi(G \backslash g(N^\infty))$ 是 F 的 Borel 子集。

证毕。

定理 9.3.12 设 E 是标准的 Borel 空间，F 是 $\frac{1}{2}$-标准的 Borel 空间，f 是 E 到 F 的一一 Borel 映象，则 $f(E)$ 是 F 的 Borel 子集，并且 f 是 E 到 $f(E)$ 上的 Borel 同构。

证．依定理 9.3.9，可以认为 $F \subset M$． 再依引理 9.3.11 即得证。

定理 9.3.13 设 $(E, \mathscr{B})$ 是标准的 Borel 空间，如果 $\{B_n | n\}$ $(\subset \mathscr{B})$ 是分离的，则 $\{B_n\}$ 生成 $\mathscr{B}$ ．

证．设 $\mathscr{B}_0$ 是 $\{B_n\}$ 生成的 σ-Bool 代数，显然，$\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$，及 $(E, \mathscr{B}_0)$ 是 $\frac{1}{2}$-标准的．今恒等映象 I 是 $(E, \mathscr{B})$ 到 $(E, \mathscr{B}_0)$ 上的一一 Borel 映象，依定理 9.3.12，$\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}$． 证毕。

命题 9.3.14 设 $\mathscr{H}$ 是可分的 Hilbert 空间，则 $B(\mathscr{H})$ 中的弱算子拓扑、强算子拓扑、强 * 算子拓扑、$\sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$，$S(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$，$S^*(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 及 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$ 都产生相同的标准 Borel 构造，这里所谓某个拓扑产生的 Borel 构造，指依这个拓扑的所有开子集生成的 σ-Bool 代数。特别，$S = \{a \in B(\mathscr{H}) | \|a\| \leqslant 1\}$ 依弱算子拓扑、强算子拓扑、强 * 算子拓扑的三个 Polish 空间作为标准的 Borel 空间是相同的。

证．以 $\mathscr{T}$ 表示所提到的诸拓扑之一．记 $S_n = \{a \in B(\mathscr{H}) |$

$\|a\| \leqslant n\}$，$V_1 = S_1$，$V_{n+1} = S_{n+1} \backslash S_n$，$\forall n \geqslant 1$。依定义 9.1.1 下面的例，$(S_n, \mathscr{T})$ 是 Polish 空间。由于 V_n 是 $(S_n, \mathscr{T})$ 的开子集，因此，$(V_n, \mathscr{T})$ 也是 Polish 空间，$\forall n$。由此，$B(\mathscr{H})$ 作为 $\{(V_n, \mathscr{T})\}_n$ 的拓扑并也是 Polish 空间，记它的拓扑为 $\mathscr{T}'$。显然 $B(\mathscr{H})$ 的子集 U 是 $\mathscr{T}'$-开集，指 $U \cap V_n$ 是 $(V_n, \mathscr{T})$ 的开子集，$\forall n$。于是 $U \in \mathscr{B}_{\mathscr{T}}$，这里 $\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$ 是由 $B(\mathscr{H})$ 的 $\mathscr{T}$-开集全体生成的 σ-Bool 代数。又显然 $\mathscr{T}' \prec \mathscr{T}$，从而，$\mathscr{B}_{\mathscr{T}} = \mathscr{B}_{\mathscr{T}'}$，这里 $\mathscr{B}_{\mathscr{T}'}$ 是 Polish 空间 $(B(\mathscr{H}), \mathscr{T}')$ 的 Borel 子集的全体，即 $(B(\mathscr{H}), \mathscr{B}_{\mathscr{T}})$ 是标准的 Borel 空间。又显然 $\mathscr{B}_\tau \supset \mathscr{B}_{\mathscr{T}}$，这里 τ 表示 Mackey 拓扑 $\tau(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H}))$，依定理 9.3.13，$\mathscr{B}_\tau = \mathscr{B}_{\mathscr{T}}$，$\forall \mathscr{T}$。　证毕。

命题 9.3.15　设 E 是标准的 Borel 空间，$B \subset E$，则 B 作为 E 的 Borel 子空间是标准的，当且仅当，B 是 E 的 Borel 子集。

证。设 B 是标准的，I 表示 B 到 E 中的嵌入映象，依定理 9.3.12，即见 B 是 E 的 Borel 子集。反之设 B 是 E 的 Borel 子集，无妨认为 E 是 Polish 空间，依命题 9.2.3，有 Polish 空间 P，及 P 到 E 的一一连续映象 f，使得 $f(P) = B$。依定理 9.3.12，f 是 P 到 B 上的 Borel 同构，因此，B 是标准的。　证毕。

定理 9.3.16　标准 Borel 空间的势或为可数或为连续统，并且等势的标准 Borel 空间是 Borel 同构的。

证。依命题 9.1.11，我们只须对势为连续统的标准 Borel 空间 E，证明它与 $\mathbf{R}$ Borel 同构。

依命题 9.1.10，存在 N^∞ 到 $\mathbf{R}$ 上一一连续映象。再依命题 9.1.11 及定理 9.3.12，可见有 $\mathbf{R}$ 到 E 中的 Borel 同构 f，使得 $(E \backslash f(\mathbf{R}))$ 是可数的。取 T 为 $\mathbf{R}$ 的闭子集，且 $^{\#}T = {}^{\#}(E \backslash f(\mathbf{R}))$。自然有 T 到 $(E \backslash f(\mathbf{R}))$ 上的 Borel 同构 φ。依命题 9.1.10，也有 $(\mathbf{R} \backslash T)$ 到 $\mathbf{R}$ 上的 Borel 同构 ϕ。今命

$$g(t) = \begin{cases} f \circ \phi(t), & \text{如果 } t \in (\mathbf{R} \backslash T); \\ \varphi(t), & \text{如果 } t \in T, \end{cases}$$

即见 g 是 $\mathbf{R}$ 到 E 上的 Borel 同构。　证毕。

注 本节见参考文献 [5], [71], [129].

§4. Borel 截面

引理 9.4.1 给予 N^∞ 以这样的全序: $n\leqslant m$ 指 $n=m$ 或者存在 j, 使得 $n_k=m_k$ $1\leqslant k<j$, 及 $n_j<m_j$, 则 N^∞ 的每个非空闭子集有最小元.

证. 设 F 是 N^∞ 的非空闭子集, 令 $\alpha_1=\min\{n_1|n=(n_k)\in F\}$, $F_1=\{n=(n_k)\in F|n_1=\alpha_1\}$; $\alpha_2=\min\{n_2|n=(n_k)\in F_1\}$, $F_2=\{n=(n_k)\in F_1|n_2=\alpha_2\}$; $\cdots$, 如此得到 $F_1\supset F_2\supset\cdots$, 显然 F_j 关于 d 的直径 $\leqslant 2^{-j}$, 因此 $\bigcap\limits_j F_j$ 仅包含一点,这个点显然是 F 的最小元. 证毕.

定理 9.4.2 设 E 是 Polish 空间,$\sim$是 E 中的等价关系,使得

1) 对任意的 $x\in E$, $\{y\in E|y\sim x\}$ 是闭的;

2) 如果 F 是 E 的闭子集,则 $\tilde{F}=\{y\in E|$ 存在 $x\in F$, 使得 $x\sim y\}$ 是 E 的 Borel 子集,或者代以 2) 为

2)′ 如果 V 为 E 的开子集,则 $\tilde{V}=\{y\in E|$ 存在 $x\in V$, 使得 $x\sim y\}$是 E 的 Borel 子集.

那么,存在 E 的 Borel 子集 B,使得 B 与 E 的每个等价类的交包含且仅包含一个点.

证. 设 d 是 E 上相应的距离. 如果 1), 2) 满足,取 E 的非空闭子集族 $\{B(n_1,\cdots,n_k)\}$,使得① $E=\bigcup\limits_{n_1=0}^{\infty}B(n_1)$;② $B(n_1,\cdots,n_k)=\bigcup\limits_{p=0}^{\infty}B(n_1,\cdots,n_k,p)$; ③ $B(n_1,\cdots,n_k)$ 的 d-直径$<2^{-k}$. 如果 1), 2)′ 满足,取 E 的非空开子集族 $\{B(n_1,\cdots,n_k)\}$, 也满足①②③, 并且有④ $\overline{B(n_1,\cdots,n_{k+1})}\subset B(n_1,\cdots,n_k)$. 由于 E 是 Polish 空间, $\{B(n_1,\cdots,n_k)\}$ 是找得到的.

在每个情形中，我们定义 $f: N^\infty \to E$，使得 $\{f(n)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty} B(n_1, \cdots, n_k)$，$\forall n=(n_k)\in N^\infty$，则易见 $f(N^\infty)=E$，并且 f 是连续的。

记 $\tilde{B}(n_1, \cdots, n_k)=\{y\in E \mid 存在\ x\in B(n_1, \cdots, n_k)，使得\ x\sim y\}$，依假定，它是 E 的 Borel 子集。今归纳地定义 E 的 Borel 子集族 $\{A(n_1, \cdots, n_k)\}$：

$$A(n_1)=B(n_1)\cap\left[E\Big\backslash\bigcup_{m_1<n_1}\tilde{B}(m_1)\right],$$

$$A(n_1, \cdots, n_{k+1})=B(n_1, \cdots, n_{k+1})\cap A(n_1, \cdots, n_k)$$
$$\cap\left[E\Big\backslash\bigcup_{m_{k+1}<n_{k+1}}\tilde{B}(n_1, \cdots, n_k, m_{k+1})\right].$$

对 E 的每个等价类 X，依 1) 可见 $f^{-1}(X)$ 是 N^∞ 的非空闭子集。由引理 9.4.1，$f^{-1}(X)$ 有最小元 $(p_k)=p=p(X)$。我们将有

a) $A(p_1, \cdots, p_k)\cap X=B(p_1, \cdots, p_k)\cap X\neq\varnothing$，$\forall k$；

b) 如果 $(n_1, \cdots, n_k)\neq(p_1, \cdots, p_k)$，则 $A(n_1, \cdots, n_k)\cap X=\varnothing$，$\forall k$。事实上，$f(p)\in X$，$\{f(p)\}=\bigcap_{k=0}^{\infty}B(p_1, \cdots, p_k)$，因此，$B(p_1, \cdots, p_k)\cap X\neq\varnothing$，$\forall k$。依定义，$A(p_1, \cdots, p_k)\cap X\subset B(p_1, \cdots, p_k)\cap X$，$\forall k$。今若 $x\in B(p_1)\cap X$，并且有 $m_1<p_1$，使得 $x\in\tilde{B}(m_1)$。取 $y\in B(m_1)$，$y\sim x$。当然有 $m=(m_k)\in N^\infty$，使得 $y=f(m)$。于是 $m\in f^{-1}(X)$。但 p 是 $f^{-1}(X)$ 的最小元，便与 $m_1<p_1$ 相矛盾。因此，$x\in B(p_1)\Big\backslash\bigcup_{m_1<p_1}\tilde{B}(m_1)=A(p_1)$，即 $A(p_1)\cap X=B(p_1)\cap X$。再用归纳法及相仿的手续，可见 a) 成立。今设 $(n_1, \cdots, n_k)\neq(p_1, \cdots, p_k)$，且有 $x\in A(n_1, \cdots, n_k)\cap X$。于是有 $n=(n_1, \cdots, n_k, \cdots)\in N^\infty$，使得 $f(n)=x$，即 $n\in f^{-1}(X)$，因此 $n\geqslant p$。但 $(n_1, \cdots, n_k)\neq(p_1, \cdots, p_k)$，因此有 $j(\leqslant k)$，使得 $n_i=p_i$，$1\leqslant i<j$，而 $p_j<$

n_j. 于是

$$A(p_1, \cdots, p_{j-1}, n_j) \cap \widetilde{B}(p_1, \cdots, p_j)$$
$$\subset \left[E \setminus \bigcup_{p<n_j} \widetilde{B}(p_1, \cdots, p_{j-1}, p)\right] \cap \widetilde{B}(p_1, \cdots, p_j) = \varnothing.$$

另一方面，由于 $B(p_1, \cdots, p_j) \cap X \neq \varnothing$，因此，$X \subset \widetilde{B}(p_1, \cdots, p_j)$. 又 $j \leqslant k$，从而，

$$x \in A(n_1, \cdots, n_j) \cap X$$
$$= A(p_1, \cdots, p_{j-1}, n_j) \cap X \subset A(p_1, \cdots, p_{j-1}, n_j)$$
$$\cap \widetilde{B}(p_1, \cdots, p_j) = \varnothing$$

矛盾. 因此 b) 成立.

令 $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_1, \cdots, n_k} A(n_1, \cdots, n_k)$，它自然是 E 的 Borel 子集，并且对 E 的每个等价类 X，依 a), b)，

$$B \cap X = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_1, \cdots, n_k} (A(n_1, \cdots, n_k) \cap X)$$
$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} (A(p_1, \cdots, p_k) \cap X)$$
$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} (B(p_1, \cdots, p_k) \cap X)$$
$$= \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B(p_1, \cdots, p_k)\right) \cap X = \{f(p)\},$$

这里 $p = (p_k)$ 是 $f^{-1}(X)$ 的最小元，所以，B 与 E 的每个等价类的交包含且仅包含一个点.　　证毕.

定理 9.4.3　设 f 是 Polish 空间 E 到 Borel 空间 F 上的 Borel 映象，并且满足

1) $f^{-1}(\{y\})$ 是 E 的闭子集，$\forall y \in F$；

2) f 把 E 的任何闭子集变为 F 的 Borel 子集，或者代以 2) 为

2′) f 把 E 的任何开子集变为 F 的 Borel 子集.

那么 f 有 Borel 截面，即存在 F 到 E 的 Borel 映象 g，使得 $f \circ g(y) = y$，$\forall y \in F$.

证. 在E中引入等价关系$\sim$: $x_1 \sim x_2$ 指 $f(x_1) = f(x_2)$. 易见将满足定理 9.4.2 的条件，因此有E的 Borel 子集 B，使得 $(f^{-1}(\{y\}) \cap B)$ 包含且仅包含一个点，$\forall y \in F$. 令 $\{g(y)\} = f^{-1}(\{y\}) \cap B$，即见 $f \circ g(y) = y$，$\forall y \in F$. 设G是E的闭子集(当满足条件 2)时)或者是E的开子集(当满足条件 2)'时)，于是$f(G)$是F的 Borel 子集. 但 $g^{-1}(G) = f(G)$，依命题 9.3.2，g是 Borel 映象. 证毕.

引理 9.4.4 设Ω是具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，ν是Ω上正则的 Borel 测度，f是N^∞到Ω的连续映象，则存在 $\Omega' = f(N^\infty)$ 到N^∞的映象g，及包含在Ω'中的紧子集列 $\{K_n\}$，使得

$$f \circ g(x) = x, \ \forall x \in \Omega', \ \left(\Omega' \setminus \bigcup_n K_n\right) \subset \text{某 } \nu\text{-零集},$$

并且对每个n，g在K_n上是连续的.

证. 对任意的 $x \in \Omega'$，由于f是连续的，$f^{-1}(\{x\})$ 是N^∞的非空闭子集，它有最小元，记作 $g(x)$. 即见 $f \circ g(x) = x$，$\forall x \in \Omega'$.

自然Ω'是Ω的 Sousline 子集，依系 9.2.12，ν的σ-有限性及内正则性，我们只须对包含在Ω'中的任意紧子集K，寻找紧子集列 $\{K_n\}$，使得 $K_n \subset K$，g在K_n上连续，$\forall n$，并且

$$\nu\left(K \setminus \bigcup_n K_n\right) = 0.$$

1) Ω的子集E称为关于ν是有 Borel 核的，指存在 Borel 子集 F，G，使得 $F \subset E$，$(E \setminus F) \subset G$，并且 $\nu(G) = 0$. 依系 9.2.12，Ω的任意 Sousline 子集关于ν是有 Borel 核的. 又如果E_n关于ν是有 Borel 核的，显然 $\bigcup_n E_n$ 关于ν也将有 Borel 核. 此外，如果 E_i 关于ν是有 Borel 核的，$i = 1, 2$，则 $(E_1 \setminus E_2)$ 关于ν也有 Borel 核. 事实上，设 F_i，G_i 如定义，$i = 1, 2$，则 $E_2 \subset F_2 \cup G_2$，于是，$F = F_1 \setminus (F_2 \cup G_2) \subset (E_1 \setminus E_2)$，及 $(E_1 \setminus E_2) \setminus F \subset G_1 \cup G_2$.

2）令 $Q=\{n=(n_k)\in N^\infty|$ 除去有限个外，n_k 都$=0\}$，它是 N^∞ 的可数子集. 设 V 是 N^∞ 的开子集，如果 $n=(n_k)\in V$，必有 k，使得 $N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}\subset V$. 令

$$z_1=(n_1,\cdots,n_{k+1},0,\cdots),$$
$$z_2=(n_1,\cdots,n_{k+1}+1,0,\cdots).$$

于是，$n\in[z_1,z_2)=\{z\in N^\infty|z_1\leqslant z<z_2\}\subset N^\infty_{n_1,\cdots,n_k}$. 由于 Q 是可数的，因此，V 必是形如 $[z_1,z_2)=[0,z_2)\backslash[0,z_1)$ 的可数并 $(z_1,z_2\in Q)$.

3）对任意的 $z\in Q$，$g^{-1}([0,z))=f([0,z))$. 事实上，如果 $x\in g^{-1}([0,z))$，则 $x=f\circ g(x)\in f([0,z))$. 反之如果 $n\in[0,z)$，依 g 的定义，$g\circ f(n)=f^{-1}(\{f(n)\})$ 的最小元，因此，$g\circ f(n)\leqslant n$. 从而，$g\circ f(n)\in[0,z)$，即 $f(n)\in g^{-1}([0,z))$.

4）对任意的 $z\in Q$，$[0,z)$ 显然是 N^∞ 的 Borel 子集，f 是连续的，因此由 3)，$g^{-1}([0,z))=f([0,z))$ 是 Ω 的 Sousline 子集. 依系 9.2.12，$g^{-1}([0,z))$ 关于 ν 是有 Borel 核的.

5）对 N^∞ 的任意开子集 V，闭子集 F，$g^{-1}(V)$ 与 $g^{-1}(F)$ 关于 ν 都有 Borel 核. 事实上，由 1), 2), 4), $g^{-1}(V)$ 关于 ν 是有 Borel 核的. 又 $g^{-1}(F)=\Omega'\backslash g^{-1}(F')$，这里 $F'=N^\infty\backslash F$，因此，$g^{-1}(F)$ 关于 ν 也有 Borel 核.

今设 K 是 Ω 的紧子集，$K\subset\Omega'$，$\{a_k\}$ 是 N^∞ 的可数稠集，d 是 N^∞ 中的距离(9.1.6)，令

$$A_{k,p}=\{x\in K|d(g(x),a_k)\leqslant p^{-1}\},$$

并命

$$B_{1,p}=A_{1,p},\quad B_{k+1,p}=A_{k+1,p}\Big\backslash\bigcup_{i=1}^{k}A_{i,p},$$

于是对任何的 p，有

$$B_{i,p}\cap B_{j,p}=\varnothing,\ \forall i\neq j,$$
$$\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{k,p}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{k,p}=K$$

又定义 g_p: $K\to N^\infty$,

$$g_p(x)=a_k,\quad 如果\ x\in B_{k,p},$$

易见 $g_p(x)\xrightarrow{N^\infty} g(x)$, $\forall x\in K$.

对任意的 k, p, 依 5), $A_{k,p}$ 关于 ν 是具有 Borel 核的,因此, $B_{k,p}$ 关于 ν 也有 Borel 核. 于是对任意的正整数 m, 依 ν 的正则性及 g_p 的定义,可以找到紧子集 $K_p^{(m)}\subset K$, 使得 g_p 在 $K_p^{(m)}$ 上连续,并且 $\nu(K\backslash K_p^{(m)})<(m\cdot 2^p)^{-1}$. 令 $K^{(m)}=\bigcap\limits_p K_p^{(m)}$, 则 g_p 在 $K^{(m)}$ 上连续, $\forall p$, 并且 $\nu(K\backslash K^{(m)})<m^{-1}$, $\forall m$. 记 N^∞ 到其第 j 个分量上的投影映象为 π_j, 自然 $(\pi_j g_p)(x)\to(\pi_j g)(x)$, $\forall x\in K$. 依 Egorov 定理[1],对任意的 $\varepsilon>0$, 有紧子集 $K_{mj}^{(\varepsilon)}\subset K^{(m)}$, 使得

$$(\pi_j g_p)(x)\to(\pi_j g)(x),\quad 对\ x\in K_{mj}^{(\varepsilon)}\ 一致,$$

并且 $\nu(K^{(m)}\backslash K_{mj}^{(\varepsilon)})<2^{-j}\varepsilon$. 令 $K_m^{(\varepsilon)}=\bigcap\limits_j K_{mj}^{(\varepsilon)}$, 则

$$g_p(x)\xrightarrow{N^\infty} g(x),\quad 对\ x\in K_m^{(\varepsilon)}\ 一致,$$

并且 $\nu(K^{(m)}\backslash K_m^{(\varepsilon)})<\varepsilon$. 于是, g 在 $K_m^{(\varepsilon)}$ 上也是连续的, 今命 $\{K_n\}=\{K_m^{(p^{-1})}|m, p\ 正整数\}$,则 $K_n\subset K$, g 在 K_n 上连续, $\forall n$,并且 $\nu\left(K\backslash\bigcup\limits_n K_n\right)=0$. 证毕.

定理 9.4.5 设 E, F 是 Polish 空间, ν 是定义在 F 的 Borel 子集全体上的 σ-有限测度, G 是 $E\times F$ 的 Sousline 子集. 如果 π_F 是 $E\times F$ 到 F 上的投影,则存在 $R=\pi_F(G)$ 到 E 中的映象 g, 及 F 的 Borel 子集 $B\subset R$,使得

$$(g(y),y)\in G,\quad \forall y\in R,$$

并且 g 是 B 到 E 中的 Borel 映象, 以及 $(R\backslash B)$ 包含于某个 ν-零集之中.

证. 由于 ν σ-有限, 依命题 9.3.15, 9.3.16, 无妨认为 F 就是具可数基的局部紧 Hausdorff 空间, 及 ν 是 F 上正则的 Borel 测度. 今 G 是 $E\times F$ 的 Sousline 子集. 于是有 N^∞ 到 $E\times F$ 的连续

---

1) 例见 [47].

映象 h，使得 $h(N^\infty)=G$。令 $f=\pi_F\circ h$，则 $R=f(N^\infty)$。依引理 9.4.4，有 R 到 N^∞ 中的映象 η，及 F 的 Borel 子集 $B\subset R$，使得 $f\circ\eta(y)=y$，$\forall y\in R$，并且 η 在 B 上是 Borel 的，以及 $(R\backslash B)$ 包含于某个 ν-零集之中。命 π_E 是 $E\times F$ 到 E 上的投影，$g=\pi_E\circ h\circ\eta$，于是 $g:R\to E$，且 $g|B$ 是 Borel 的。对任意的 $y\in R$，$h\circ\eta(y)\in G$，由于 $\pi_F\circ h\circ\eta(y)=f\circ\eta(y)=y$，因此，$(g(y),y)=h\circ\eta(y)\in G$。 证毕。

命题 9.4.6 设 E，F 是标准的 Borel 空间，f 是 E 到 F 上的 Borel 映象，ν 是 F 的 Borel 子集全体上的 σ-有限测度，则 f 有关于 ν 的 Borel 截面，即有 F 的 Borel 子集 F_0，$(F\backslash F_0)$ 到 E 的 Borel 映象 g，使得 $\nu(F_0)=0$，$f\circ g(y)=y$，$\forall y\in(F\backslash F_0)$。

证。依命题 9.3.4，f 的图象 $G=\{(x,f(x))|x\in E\}$ 是 $E\times F$ 的 Borel 子集。又 $\pi_F(G)=F$，再依定理 9.4.5 即得证。

命题 9.4.7 设 E，F 是标准的 Borel 空间，f 是 E 到 F 上的 Borel 映象，μ 是 E 的 Borel 子集全体上的有限测度。在 E 中引入等价关系～：$x_1\sim x_2$ 指 $f(x_1)=f(x_2)$，则有 E 的完满的(在～的意义下) Borel 子集 E_0，$\mu(E_0)=0$，使得 f 在 $(E\backslash E_0)$ 上有 Borel 截面。

证。令 $\nu=\mu\circ f^{-1}$，它是 F 的 Borel 子集全体上的有限测度。依命题 9.4.6，有 F 的 Borel 子集 F_0 及 $(F\backslash F_0)$ 到 E 的 Borel 映象 g，使得 $\nu(F_0)=0$，并且 $f\circ g(y)=y$，$\forall y\in(F\backslash F_0)$。今命 $E_0=f^{-1}(F_0)$，它是 E 的完满的 Borel 子集，$\mu(E_0)=0$。自然 $f(E\backslash E_0)=F\backslash F_0$，$g(F\backslash F_0)\subset(E\backslash E_0)$，因此，$f$ 在 $(E\backslash E_0)$ 上有 Borel 截面。 证毕。

注 本节见参考文献 [5]，[17]，[21]，[84]。

第十章 von Neumann 代数的 Borel 空间

设$\mathscr{H}$是可分的 Hilbert 空间，$\mathscr{A}$ 是$\mathscr{H}$中 vN 代数的全体，E. G. Effros 在 $\mathscr{A}$ 中引入了一种 Borel 构造，使之成为标准的 Borel 空间(10.3.2)。本章 §1—§3 就来叙述这个 Borel 构造，并且指出 $\mathscr{H}$ 中因子的全体$\mathscr{F}$是$\mathscr{A}$的 Borel 子集，从而依诱导的构造，$\mathscr{F}$ 也是标准的 Borel 空间(10.3.6)。§4 指出 $\mathscr{H}$ 中各类因子的全体 $\mathscr{F}_{\mathrm{I}_n}$，$\mathscr{F}_{\mathrm{I}_\infty}$，$\mathscr{F}_{\mathrm{II}_1}$，$\mathscr{F}_{\mathrm{II}_\infty}$ 及 $\mathscr{F}_{\mathrm{III}}$ 都是$\mathscr{F}$的 Borel 子集(10.4.16)。 J. T. Schwartz 曾指出过 $\mathscr{F}_{\mathrm{III}}$ 的可测性，后来，O. Nielsen 证明了 $\mathscr{F}_{\mathrm{III}}$ 还是 Borel 子集. 同样的结果对 $\mathscr{A}$ 也是成立的，但由于要用到约化理论，我们将在第十一章来讨论它。

§ 1. $W(X^*)$ 的标准 Borel 构造

设 E 是拓扑空间，$\mathscr{C}(E)$ 表示 E 的非空闭子集的全体.

引理 10.1.1 如果 (E, d) 是紧距离空间，对任意的 F_1, $F_2 \in \mathscr{C}(E)$，定义

$$\rho(F_1, F_2) = \max\{\sup_{x\in F_1} d(x, F_2), \sup_{y\in F_2} d(y, F_1)\}$$

则 $(\mathscr{C}(E), \rho)$ 也是紧距空间.

证. 易见 ρ 是 $\mathscr{C}(E)$ 上的距离. 设 $\{x_n\}$ 是 E 的可数稠集，对任意的 $\varepsilon > 0$，由于 (E, d) 是紧的，必有 k，使得 $\bigcup_{i=1}^{k} S_d(x_i, \varepsilon) = E$。我们说相应有

$$\bigcup_{I\subset\{1,\cdots,k\}} S_\rho(\{x_i\}_{i\in I}, \varepsilon) = \mathscr{C}(E).$$

事实上，对任意的 $F \in \mathscr{C}(E)$，必有 $I \subset \{1, \cdots, k\}$，使得 $S_d(x_i,$

$\varepsilon)\cap F\neq\varnothing$, $\forall i\in \mathrm{I}$, 并且 $\bigcup\limits_{i\in \mathrm{I}} S_d(x_i,\varepsilon)\supset F$. 于是，对任意的 $i\in\mathrm{I}$, $d(x_i,F)<\varepsilon$; 对任意的 $y\in F$, 必有 $i\in\mathrm{I}$, $d(x_i,y)<\varepsilon$, 所以，$\rho(\{x_i\}_{i\in\mathrm{I}},F)<\varepsilon$.

今只须证明 $(\mathscr{C}(E),\rho)$ 是完备的. 设 $\{F_n\}\subset\mathscr{C}(E)$, 并且 $\rho(F_n,F_m)\to 0$. 命

$F=\{x\in E\mid$ 有子列 $\{n_k\}$,及 $x_{n_k}\in F_{n_k}$, $\forall k$, 且 $x_{n_k}\to x\}$,由于 E 是紧距空间，$F\neq\varnothing$. 进而易见 $F\in\mathscr{C}(E)$. 对任意的 $\varepsilon>0$,有 n_0,使得 $\rho(F_n,F_m)<\varepsilon$, $\forall n,m\geqslant n_0$. 任意固定 $n(\geqslant n_0)$, 当 $y\in F_n$ 时，由于 $d(y,F_m)<\varepsilon$, $\forall m\geqslant n_0$, 因此有 $x_m\in F_m$, 使得 $d(y,x_m)<\varepsilon$, $\forall m\geqslant n_0$. 由于 E 是紧距的，$\{x_m|m\geqslant n_0\}$ 中有子列收敛于 $x\in F$,由此，$d(y,x)\leqslant\varepsilon$. 所以,$d(y,F)\leqslant\varepsilon$, $\forall y\in F_n$. 反之设 $x\in F$,有子列$\{n_k\}$及 $x_{n_k}\in F_{n_k}$, $\forall k$,使得 $x_{n_k}\to x$. 取 k 充分大,使得 $d(x_{n_k},x)<\varepsilon$, 并且 $n_k\geqslant n_0$. 由于 $d(x_{n_k},F_n)<\varepsilon$,因此有 $y\in F_n$, 使得 $d(x_{n_k},y)<\varepsilon$. 从而 $d(x,y)<2\varepsilon$. 即 $d(x,F_n)<2\varepsilon$, $\forall x\in F$. 以上说明 $\rho(F_n,F)<2\varepsilon$ $\forall n\geqslant n_0$, 因此，$\rho(F_n,F)\to 0$. 证毕.

引理 10.1.2 设 (P,d) 是紧距离空间，E 是 P 的 Polish 子空间,则 $(\mathscr{C}(E),\rho)$ 也是 Polish 空间.

证. 设 $\bar{E}$ 是 E 在 P 中的闭包,于是，$(\bar{E},d)$ 是紧距离空间，依引理 10.1.1, $(\mathscr{C}(\bar{E}),\rho)$ 也是紧距离空间. 定义映象 f: $\mathscr{C}(E)\to\mathscr{C}(\bar{E})$, $f(F)=\bar{F}$, $\forall F\in\mathscr{C}(E)$, 这里 $\bar{F}$ 是 F 在 P 中的闭包. 易见

$$\rho(f(F_1),f(F_2))=\rho(F_1,F_2),\quad \forall F_1,F_2\in\mathscr{C}(E)$$

以及 $f(\mathscr{C}(E))=\{K\in\mathscr{C}(\bar{E})|(K\cap E)$ 在 K 中是稠的$\}$. 今 $(\mathscr{C}(E),\rho)$ 与 $(f(\mathscr{C}(E)),\rho)$ 是拓扑同胚的，因此，只须证明 $f(\mathscr{C}(E))$ 是 $(\mathscr{C}(\bar{E}),\rho)$ 的 Polish 子空间. 依命题 9.1.3,要证 $f(\mathscr{C}(E))$ 是 $(\mathscr{C}(\bar{E}),\rho)$ 的 G_δ 子集.

由于 E 是 P 的 Polish 子空间,依命题 9.1.3,可写 $E=\bigcap\limits_n V_n$,

这里每个 V_n 是 P 的开子集. 如果 $K\in\mathscr{C}(\bar{E})$,并且 $(K\cap V_n)$ 在 K 中稠, $\forall n$, 我们说 $K\in f(\mathscr{C}(E))$. 事实上, K 是 P 的紧子集, 从而是 Baire 空间. 令 $(K\cap V_n)$ 是 K 的开稠集, 因此, $K\cap E=\bigcap_n (K\cap V_n)$ 也在 K 中稠, 即 $K\in f(\mathscr{C}(E))$. 由此,

$$f(\mathscr{C}(E))=\{K\in\mathscr{C}(\bar{E})\mid (K\cap V_n) \text{ 在 } K \text{ 中稠 } \forall n\},$$

命 $\Sigma_n=\{K\in\mathscr{C}(\bar{E})\mid (K\cap V_n)$ 不在 K 中稠$\}$, $\forall n$, 则 $f(\mathscr{C}(E))=\bigcap_n (\mathscr{C}(\bar{E})\backslash\Sigma_n)$. 于是只须证明每个 Σ_n 是 $(\mathscr{C}(\bar{E}),\rho)$ 的 F_σ 子集(闭集的可数并).

任意固定 n, 当 $K\in\Sigma_n$ 时, 令 $L=\overline{K\cap V_n}$, 则 $K\cap V_n\subset L\underset{\neq}{\subset} K$. 从而如果 $K\cap V_n\neq\emptyset$, 或者 K 包含两个以上的点, 总有 $L\in\mathscr{C}(\bar{E})$, 使得 $K\cap V_n\subset L\underset{\neq}{\subset}K$. 由此,

$$\Sigma_n=\mathscr{F}\cup\Pi_1(\{(K,L)\mid K,L\in\mathscr{C}(\bar{E}),K\cap V_n\subset L\subset K\}\backslash\Delta).$$

这里 $\Delta=\{(K,K)\mid K\in\mathscr{C}(\bar{E})\}$. Π_1 是 $\mathscr{C}(\bar{E})\times\mathscr{C}(\bar{E})$ 到其第一分量上的投影, $\mathscr{F}=\{\{x\}\mid x\in\bar{E}\backslash V_n\}$. 容易证明 $\mathscr{F}$ 是 $(\mathscr{C}(\bar{E}),\rho)$ 的闭子集. 继而命

$$S_n=\{(K,L)\mid K,L\in\mathscr{C}(\bar{E}),K\cap V_n\subset L\subset K\},$$

我们说 S_n 是 $\mathscr{C}(\bar{E})\times\mathscr{C}(\bar{E})$ 的闭子集. 事实上, 设 S_n 的列 $(K_m,L_m)\to(K,L)$. 如果 $x\in K\cap V_n$, 由于 $\rho(K,K_m)\to 0$, 因此存在 $x_m\in K_m$, 使得 $d(x,x_m)\to 0$. 但 $x\in V_n$, V_n 是开集, 所以 m 充分大时,

$$x_m\in K_m\cap V_n\subset L_m\subset K_m,$$

又 $\rho(L_m,L)\to 0$, 因此, $d(x_m,L)\to 0$, $x\in L$. 即有 $K\cap V_n\subset L$. 如果 $y\in L$, 由 $\rho(L_m,L)\to 0$, 有 $y_m\in L_m\subset K_m$, 使得 $d(y_m,y)\to 0$. 但 $\rho(K_m,K)\to 0$, 因此 $d(y_m,K)\to 0$, $y\in K$. 即 $L\subset K$, $(K,L)\in S_n$.

Δ 显然是紧距离空间 $\mathscr{C}(\bar{E})\times\mathscr{C}(\bar{E})$ 的闭集, 从而是 G_δ 子集. 进而 $(S_n\backslash\Delta)$ 是 F_σ 子集, 即可写

$$S_n \backslash \Delta = \bigcup_m C_m,$$

其中 C_m 是 $\mathscr{C}(\bar{E}) \times \mathscr{C}(\bar{E})$ 的紧子集，$\forall m$。又 Π_1 是连续的，因此，$\Pi_1(S_n \backslash \Delta) = \bigcup_m \Pi_1(C_m)$ 是 $\mathscr{C}(\bar{E})$ 的 F_σ 子集。 证毕。

定义 10.1.3 设 E 是 Polish 空间，$\mathscr{C}(E)$ 是 E 的非空闭子集全体，给予 $\mathscr{C}(E)$ Borel 构造 $\mathscr{P}$，$\mathscr{P}$ 由 $u(U) = \{F \in \mathscr{C}(E) | F \cap U \neq \emptyset\}$（$\forall U$是 E 的非空开子集）生成。

定理 10.1.4 设 E 是 Polish 空间，则 $(\mathscr{C}(E), \mathscr{P})$ 是标准的 Borel 空间。

证. 依命题 9.1.4，E 可以看作 $P = [0, 1]^\infty$ 的 Polish 子空间。 P 上自然有距离 d，使之成为紧距离空间。 依引理 10.1.2，$(\mathscr{C}(E), \rho)$ 是 Polish 空间。今只须证明 ρ 产生的 Borel 构造即 $\mathscr{P}$。

首先，如果 U 是 E 的开子集，我们说 $u(U)$（见定义 10.1.3）是 $(\mathscr{C}(E), \rho)$ 的开子集。事实上，设 $F \in u(U)$，则有 $x \in F$ 及 x 的开邻域 $V \subset U$。从而如果 $G \in \mathscr{C}(E)$，使得 $\rho(F, G)$ 充分小，则 $d(x, G)$ 也充分小，因此，$G \cap V \neq \emptyset$，$G \cap U \neq \emptyset$，即 $G \in u(U)$。

由此，$\mathscr{P} \subset \rho$ 产生的 Borel 构造。今依定理 9.3.13，只须证明 $\mathscr{P}$ 包含分离的可数族。设 $\{U_n\}$ 是 E 拓扑的可数基，我们证明 $\{u(U_n)\}$ 是分离的即可。如果 $F, G \in \mathscr{C}(E)$，$F \neq G$，无妨设有 $x \in F \backslash G$，于是存在 x 的邻域 U，使得 $U \cap G = \emptyset$。取 n，使得 $x \in U_n \subset U$，即有 $F \cap U_n \neq \emptyset$，$G \cap U_n = \emptyset$。所以，$F \in u(U_n)$，$G \notin u(U_n)$。 证毕。

命题 10.1.5 设 (E, d) 是完备可分的距离空间，则 $\mathscr{C}(E)$ 的标准 Borel 构造 $\mathscr{P}$ 是使得 $F \to d(x, F)$ 为 $\mathscr{C}(E)$ 上可测函数的最小 Borel 构造，$\forall x \in E$。换言之，$\mathscr{P}$ 由 $\{F \in \mathscr{C}(E) | d(x, F) < \lambda\}$（$\forall x \in E$，$\lambda > 0$）生成。

证. 首先对任意的 $x \in E$，$\lambda > 0$，令 $U = \{y \in E | d(x, y) <$

$\lambda\}$，易见 $u(U)=\{F\in\mathscr{C}(E)\,|\,d(x,F)<\lambda\}$，因此，$\{F\in\mathscr{C}(E)\,|\,d(x,F)<\lambda\}\in\mathscr{P}$.

依定理 9.3.13，今只须证明形如 $\{F\in\mathscr{C}(E)\,|\,d(x,F)<\lambda\}$ $(x\in E,\lambda>0)$ 的全体包含分离的可数族. 设 $\{x_n\}$ 是 (E,d) 的可数稠集，$U_{m,n}=\{x\in E\,|\,d(x,x_n)<m^{-1}\}$，及 $\theta_{m,n}=u(U_{m,n})=\{F\in\mathscr{C}(E)\,|\,d(x_n,F)<m^{-1}\}$，$\forall m,n$ 如果 $F,G\in\mathscr{C}(E)$，$F\neq G$，无妨设有 $x\in F\backslash G$，于是 m 充分大时有 $d(x,G)>2m^{-1}$. 取 x_n，使得 $d(x,x_n)<m^{-1}$，于是 $d(x_n,F)<m^{-1}$，即 $F\in\theta_{m,n}$. 另一方面，

$$d(x_n,G)\geqslant d(x,G)-d(x_n,x)>m^{-1},$$

因此 $G\notin\theta_{m,n}$. 所以 $\{\theta_{m,n}\}$ 是分离的. 证毕.

命题 10.1.6 设 X 是(复或实)可分的 Banach 空间，$C(X)$ 表示 X 的闭线性子空间的全体，则 $C(X)$ 是$(\mathscr{C}(X),\mathscr{P})$ 的 Borel 子集.

证. 设 $\{V_n\}$ 是 X 拓扑的可数基，只须证明 $C(X)=$

$$\bigcap_{m,n}[u(V_m)'\cup u(V_n)'\cup u(V_m+V_n)]\cap\bigcap_{i,k}[u(V_i)'\cup u(\lambda_kV_i)]$$

这里$\{\lambda_k\}$是（复或实）有理数的全体，$u(V_m)'=\mathscr{C}(X)\backslash u(V_m)$，$\forall m$. 事实上，如果 $E\in$ 等式的右边，则对任意的 m,n,i，有 i) 如果 $E\cap V_m\neq\varnothing$，$E\cap V_n\neq\varnothing$，则 $E\cap(V_m+V_n)\neq\varnothing$；ii) 如果 $E\cap V_i\neq\varnothing$；则 $E\cap(\lambda_kV_i)\neq\varnothing$，$\forall k$. 因此，如果 $x,y\in E$，$\lambda\in\mathbf{C}$（或 $\mathbf{R}$），取 V_m,V_n 分别紧缩于 x,y，及有理数列$\longrightarrow\lambda$，利用 E 的闭性，可见 $(x+y)\in E$，$\lambda x\in E$，即 $E\in C(X)$. 反之，如果 $E\in C(X)$，则对任意的 m,n,i，有上面的 i)，ii)，因此 $E\in$ 等式的右边. 证毕.

定理 10.1.7 设 X 是(复或实)可分的 Banach 空间，$C(X)$ 表示 X 的闭线性子空间全体，$W(X^*)$ 表示 X^* 的弱 * 闭线性子空间全体，则

1) $C(X)$ 的如下形式的子集

$$\{E \in C(X) \mid \|x + E\| < \lambda\}, \quad \forall x \in X, \lambda > 0$$

生成 $C(X)$ 的标准 Borel 构造；

2) $W(X^*)$ 的如下形式子集

$$\{E^* \in W(X^*) \mid \|x + E^*_\perp\| < \lambda\}, \forall x \in X, \lambda > 0$$

生成 $W(X^*)$ 的标准 Borel 构造，这里 $E^*_\perp$ 是 E^* 在 X 中的直交部分。

证。1) 由命题 9.3.15，10.1.6 及 10.1.5 立见。

2) 只须注意 $E^* \to E^*_\perp$ 是 $W(X^*)$ 到 $C(X)$ 上的一一映象。 证毕。

命题 10.1.8 设$\mathscr{H}$是可分的 Hilbert 空间，$W(\mathscr{H})$ 表示$\mathscr{H}$的闭线性子空间全体，则

$$\{E \in W(\mathscr{H}) \mid \|\xi + E\| < \lambda\}, \quad \forall \xi \in \mathscr{H}, \lambda > 0$$

生成 $W(\mathscr{H})$ 的标准 Borel 构造，并且 $E \to E^\perp$ 是 $W(\mathscr{H})$ 到 $W(\mathscr{H})$ 上的 Borel 同构。

证。只须对任意的 $\xi \in \mathscr{H}$，$\lambda > 0$，证明

$$\{E \in W(\mathscr{H}) \mid \|\xi + E^\perp\| < \lambda\}$$

是 $W(\mathscr{H})$ 的 Borel 子集。如果 $\lambda > \|\xi\|$，显然 $\{E \in W(\mathscr{H}) \mid \|\xi + E^\perp\| < \lambda\} = W(\mathscr{H})$，因此可设 $\|\xi\| \geqslant \lambda$。注意如果 $E \in W(\mathscr{H})$，令 p 是$\mathscr{H}$到 E 上的投影，则

$$\|\xi + E^\perp\| = \|p\xi\|, \quad \|\xi + E\| = \|(1 - p)\xi\|^2.$$

如果命 $\mu = (\|\xi\|^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$，则可见

$$\begin{aligned}
&\{E \in W(\mathscr{H}) \mid \|\xi + E^\perp\| < \lambda\} \\
&= \{E \in W(\mathscr{H}) \mid \|\xi + E\| > \mu\} \\
&= W(\mathscr{H}) \Big\backslash \bigcap_n \Big\{E \in W(\mathscr{H}) \mid \|\xi + E\| \\
&< \frac{1}{n} + \mu\Big\}
\end{aligned}$$

是 $W(\mathscr{H})$ 的 Borel 子集。 证毕。

注 本节见参考文献 [25]，[119]。

§2. Borel 选择函数列

首先讨论一下 Hahn-Banach 定理的过程. 设 X 是实 Banach 空间, E 是 X 的线性子空间, f 是 E 上范数 $\leqslant 1$ 的线性泛函, $x\in X\setminus E$, 我们要把 f 保范地开拓到 $E\dotplus[x]$ 上,即要求

$$|f(x+w)|\leqslant\|x+w\|,\quad \forall w\in E.$$

因此需要取 $f(x)$ 满足

$$-\|x+u\|-f(u)\leqslant f(x)\leqslant\|x+v\|-f(v),$$
$$\forall u,\ v\in E,$$

命

$$L(f)=\sup_{u\in E}(-\|x+u\|-f(u)),$$
$$M(f)=\inf_{v\in E}(\|x+v\|-f(v)),$$

于是要求 $L(f)\leqslant f(x)\leqslant M(f)$.

引理 10.2.1 设 $(E^*)_1=\{f\in E^*\,|\,\|f\|\leqslant 1\}$, 则 $L(f)$ 是 $(E^*)_1$ 上的凸函数,并且 $f\to L(f)=-M(-f)$ 在 $(E^*)_1$ 的内部是连续的.

证. 设 $\lambda\in[0,1]$, $f,g\in(E^*)_1$, 对任意的 $u\in E$, $-\|x+u\|-(\lambda f+(1-\lambda)g)(u)=\lambda[-\|x+u\|-f(u)]+(1-\lambda)\cdot[-\|x+u\|-g(u)]\leqslant\lambda L(f)+(1-\lambda)L(g)$, 因此, $L(\lambda f+(1-\lambda)g)\leqslant\lambda L(f)+(1-\lambda)L(g)$. 即 $L(\cdot)$ 是 $(E^*)_1$ 上的凸函数.

今设 $f_0\in E^*$, $\|f_0\|\leqslant 1-\eta$, 这里 $\eta\in(0,1)$. 在 $V=\{f\in E^*|\|f\|<\eta\}$ 上定义函数 $F(f)=L(f+f_0)-L(f_0)$, 于是我们要证 $F(\cdot)$ 在 $f=0$ 处是连续的. 显然, $F(0)=0$, $F(\cdot)$ 在 V 上是凸函数,并且依 $M(\cdot)$ 的定义,

$$F(f)\leqslant M(f+f_0)-L(f_0)\leqslant\|x\|-L(f_0),\quad \forall f\in V,$$

记 $\alpha=\|x\|-L(f_0)$. 对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$, 当 $\|f\|<\eta\varepsilon$ 时, f, $\pm\varepsilon^{-1}f$ 都 $\in V$, 于是由 $F(\cdot)$ 的凸性,

$$F(f)=F((1-\varepsilon)\cdot 0+\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}f)\leqslant\varepsilon F(\varepsilon^{-1}f)\leqslant\varepsilon\alpha,$$

$$0=F((1+\varepsilon)^{-1}f+\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}\cdot(-\varepsilon^{-1}f))$$
$$\leqslant(1+\varepsilon)^{-1}F(f)+\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}F(-\varepsilon^{-1}f),$$

第二式即 $F(f)\geqslant-\varepsilon F(-\varepsilon^{-1}f)\geqslant-\varepsilon\alpha$，因此，$|F(f)|\leqslant\varepsilon\alpha$. 这正表明 $F(\cdot)$ 在 $f=0$ 处是连续的. 证毕.

定理 10.2.2 设 X 是可分的 Banach 空间，$W(X^*)$ 赋予定理 10.1.7 的标准 Borel 构造，则存在 Borel 映象列 f_n: $W(X^*)\to(X^*,\sigma(X^*,X))$，这里 $\sigma(X^*,X)$ 是 X^* 中的弱 $*$ 拓扑[1]，使得对每个 $E^*\in W(X^*)$ 及 n，$f_n(E^*)\in(E^*)_1$（即 $f_n(E^*)\in E^*$，且 $\|f_n(E^*)\|\leqslant 1$），同时 $\{f_n(E^*)|n\}$ 在 $(E^*)_1$ 中是弱 $*$ 稠的.

证. 首先设 X 是实的，$\{x_n\}$ 是 X 的可数稠集并且 $x_1=0$，$E^*\in W(X^*)$，于是 $\{\tilde{x}_n=x_n+E^*_\perp|n\}$ 是 $X/E^*_\perp$ 的稠集. 记 $B_n=B_n(E^*)=[\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_n]$，它是 $X/E^*_\perp$ 的有限维子空间，$\forall n$. 对任意的 $t=(t_1,\cdots,t_n,\cdots)$，这里 $t_n\in[0,1]$，$\forall n$，我们来定义 $X/E^*_\perp$ 上范数$\leqslant 1$的线性泛函 $f_t^{E^*}$，即 $f_t^{E^*}\in(E^*)_1$. 自然 $f_t^{E^*}(\tilde{x}_1)=f_t^{E^*}(\tilde{o})=0$，归纳假定 $f_t^{E^*}$ 在 B_n 上已有了定义，并且在 B_n 上范数$\leqslant 1$. 进而命

$$f_t^{E^*}(\tilde{x}_{n+1})=t_{n+1}L(f_t^{E^*})+(1-t_{n+1})M(f_t^{E^*}).\qquad(1)$$

这里 $L(f_t^{E^*})=\sup\{-\|\tilde{x}_{n+1}+\tilde{u}\|-f_t^{E^*}(\tilde{u})|\tilde{u}\in B_n\}$，$M(f_t^{E^*})=\inf\{\|\tilde{x}_{n+1}+\tilde{v}\|-f_t^{E^*}(\tilde{v})|\tilde{v}\in B_n\}$. 当 $\tilde{x}_{n+1}\notin B_n$ 时，由前面关于 Hahn-Banach 定理的讨论，可见 $f_t^{E^*}$ 将成为 $\tilde{B}_{n+1}$ 上范数 $\leqslant 1$ 的线性泛函. 当 $\tilde{x}_{n+1}\in B_n$ 时，我们指出 (1) 原来就是成立的. 事实上，由于 $f_t^{E^*}$ 在 B_n 上范数 $\leqslant 1$，因此 $|f_t^{E^*}(\tilde{x}_{n+1}+\tilde{w})|\leqslant\|\tilde{x}_{n+1}+\tilde{w}\|$，$\forall\tilde{w}\in B_n$，从而 $-\|\tilde{x}_{n+1}+\tilde{u}\|-f_t^{E^*}(\tilde{u})\leqslant f_t^{E^*}(\tilde{x}_{n+1})\leqslant\|\tilde{x}_{n+1}+\tilde{v}\|-f_t^{E^*}(\tilde{v})$，$\forall\tilde{u},\tilde{v}\in B_n$. 依 $L(f_t^{E^*})$ 与 $M(f_t^{E^*})$ 的定义，可见

$$-f_t^{E^*}(-\tilde{x}_{n+1})\leqslant L(f_t^{E^*})\leqslant f_t^{E^*}(\tilde{x}_{n+1})\leqslant M(f_t^{E^*})$$
$$\leqslant-f_t^{E^*}(-\tilde{x}_{n+1}),$$

即 $f_t^{E^*}(\tilde{x}_{n+1})=L(f_t^{E^*})=M(f_t^{E^*})$，因此 (1) 原来就是成立的. 这

---

1) 拓扑空间看作 Borel 空间时，其 Borel 构造指由其开集全体所生成.

样归纳地便可得到 $f_t^{E^*}\in(E^*)_1$. 现在指出 $\{f_r^{E^*}|r=(r_n),\ r_n$ 有理数且 $\in[0,1]$, $\forall n$, 且除去有限个外, r_n 都 $=0\}$ 在 $(E^*)_1$ 中是弱 * 稠的,即对任意的 $f\in E^*$, $\|f\|<1$, n 及 $\varepsilon>0$,要寻找如上的 r, 使得

$$|(f_r^{E^*}-f)(\tilde{x}_i)|<\varepsilon,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

当 $n=1$ 时, 由于 $\tilde{x}_1=\tilde{o}$, 取任意的 r 都是成立的. 今归纳假定对 n 及任意的 $\varepsilon>0$,存在有理数 $r_1,\cdots,r_n\in[0,1]$, 只要 $r=(r_1,\cdots,r_n,\cdots)$ (从 r_{n+1} 起,可以是[0, 1]中任意的有理数,但除有限个外均为 0), 就有 $|(f_r^{E^*}-f)(\tilde{x}_i)|<\varepsilon$, $1\leqslant i\leqslant n$. 今对于 $(n+1)$ 及 $\varepsilon>0$, 依引理 10.2.1, 存在 $\eta>0$, 对任何的 $g\in B_n^*$, 只要 $|(g-f)(\tilde{x}_i)|<\eta$, $1\leqslant i\leqslant n$ (这将使得 $\|g-f|B_n\|$ 充分小),就有

$$|L(f)-L(g)|<\varepsilon,\quad |M(f)-M(g)|<\varepsilon,\tag{2}$$

这里 $L(h)=\sup\{-\|\tilde{x}_{n+1}+\tilde{u}\|-h(\tilde{u})|\tilde{u}\in B_n\}$ 及 $M(h)=\inf\{\|\tilde{x}_{n+1}-\tilde{v}\|-h(\tilde{v})|\tilde{v}\in B_n\}$, $\forall h\in B_n^*$. 对此 $\eta>0$, 依归纳假定,将有 $r_1,\cdots,r_n$, 使得 $|(f_r^{E^*}-f)(\tilde{x}_i)|<\eta$, $1\leqslant i\leqslant n$, 这里 $r=(r_1,\cdots,r_n,\cdots)$. 由于 f 在 B_{n+1} 上范数仍然<1, 于是 $L(f)\leqslant f(\tilde{x}_{n+1})\leqslant M(f)$, 因此有 $t_{n+1}\in[0,1]$ 使得

$$f(\tilde{x}_{n+1})=t_{n+1}L(f)+(1-t_{n+1})M(f),$$

依(1), $f_r^{E^*}(\tilde{x}_{n+1})=r_{n+1}L(f_r^{E^*})+(1-r_{n+1})M(f_r^{E^*})$. 今取有理数 r_{n+1} 充分接近 t_{n+1}, 依 (2),将有 $|(f_r^{E^*}-f)(\tilde{x}_{n+1})|<\varepsilon$. 无妨认为 $\eta\leqslant\varepsilon$,因此对 $(n+1)$ 及 $\varepsilon>0$, 也有 $r_1,\cdots,r_{n+1}$, 只要 $r=(r_1,\cdots,r_{n+1},\cdots)$ 就有 $|(f_r^{E^*}-f)(\tilde{x}_i)|<\varepsilon$, $1\leqslant i\leqslant n+1$.

现在对于任意的 $t=(t_1,\cdots,t_n,\cdots)$, 这里 $t_n\in[0,1]$, $\forall n$, 我们来证明 $E^*\to f_t^{E^*}$ 是 $W(X^*)$ 到 $(X^*,\sigma(X^*,X))$ 的 Borel 映象.这只须对任意的 n,证明 $E^*\to f_t^{E^*}(\tilde{x}_n)$ 是 $W(X^*)$ 上的 Borel 可测函数. 当 $n=1$ 时, 由 $x_1=0$, 这是显然的. 归纳假定对 $\leqslant n$ 成立. 依作法,

$$f_t^{E^*}(\tilde{x}_{n+1})=t_{n+1}L(f_t^{E^*})+(1-t_{n+1})M(f_t^{E^*}).$$

注意

$$L(f_t^{E^*}) = \sup\{-\|x_{n+1} + u + E_\perp^*\| - f_t^{E^*}(\tilde{u})$$

$$|u \text{ 是 } x_1, \cdots, x_n \text{ 的有理系数的组合}\}$$

依归纳假定及定理 10.1.7，可见 $E^* \to L(f_t^{E^*})$ 是 $W(X^*)$ 上的 Borel 可测函数. 又 $M(f_t^{E^*}) = -L(-f_t^{E^*})$，因此，$E^* \to f_t^{E^*}(\tilde{x}_{n+1})$ 是 $W(X^*)$ 上的 Borel 可测函数. 这样对X是实的情况，定理已得到证明.

以下设X是复的，X_r是把X看作为实的 Banach 空间. 依前段，可取 Borel 映象列 f_n: $W(X_r^*) \to (X_r^*, \sigma(X_r^*, X_r))$，使得对每个 $E_r^* \in W(X_r^*)$，$\{f_n(E_r^*)|n\}$ 是包含于 $(E_r^*)_1$ 的弱 * 稠集. 对任意的n及 $E^* \in W(X^*)$，令

$$g_n(E^*)(x) = f_n(\mathrm{Re}E^*)(x) - if_n(\mathrm{Re}E^*)(ix), \quad \forall x \in X,$$

则 g_n 是 $W(X^*)$ 到 $(X^*, \sigma(X^*, X))$ 的 Borel 映象，并且 $\|g_n(E^*)\| \leqslant 1$，$\forall E^* \in W(X^*)$. 如果 $x \in E_\perp^*$，自然 $ix \in E_\perp^*$，但 $E_\perp^* = (\mathrm{Re}E^*)_\perp$，因此，$g_n(E^*)(x) = 0$，即 $g_n(E^*) \in (E^*)_1$，$\forall E^* \in W(X^*)$. 此外，如果 $E^* \in W(X^*)$，对任意的 $g \in (E^*)_1$，$y_1, \cdots, y_m \in X$，及 $\varepsilon > 0$，由于 $\mathrm{Re}g \in (\mathrm{Re}E^*)_1$，所以有$n$，使得

$$|(f_n(\mathrm{Re}E^*) - \mathrm{Re}g)(y_j)| < \varepsilon,$$

$$|(f_n(\mathrm{Re}E^*) - \mathrm{Re}g)(iy_j)| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

于是 $|(g_n(E^*) - g)(y_j)| < 2\varepsilon$，$1 \leqslant j \leqslant m$，即 $\{g_n(E^*)|n\}$ 在 $(E^*)_1$ 中是弱 * 稠的. 证毕.

定理 10.2.3 设X是可分的 Banach 空间，$(E, \mathscr{B})$ 是 Borel 空间，则映象 ϕ: $(E, \mathscr{B}) \to W(X^*)$ 是 Borel 的，必须且只须，存在 Borel 映象列 g_n: $(E, \mathscr{B}) \to (X^*, \sigma(X^*, X))$，使得对每个 $t \in E$，$\{g_n(t)|n\}$ 是包含于 $\phi(t)(\in W(X^*))$ 的单位球 $(\phi(t))_1$ 的弱 * 稠集.

证. 设$\{f_n\}$如定理 10.2.2. 如果ϕ是 Borel 的，则 $\{g_n = f_n \circ \phi\}$ 满足要求. 反之若满足要求的 $\{g_n\}$ 存在，于是对任意的 $x \in X$，$t \in E$，

$$\|x + \phi(t)_\perp\| = \sup_n \|g_n(t)(x)\|.$$

因此，$t \to \|x + \phi(t)_\perp\|$ 是$(E, \mathscr{B})$上的 Borel 可测函数，$\forall x \in X$. 再依定理 10.1.7，ϕ是 Borel 的．　证毕．

注　本节见参考文献 [26]，[119]．

§3. vN 代数的 Borel 空间

设$\mathscr{H}$是(复)可分的 Hilbert 空间，于是 $X = T(\mathscr{H})$ 是可分的 Banach 空间，及 $X^* = B(\mathscr{H})$．对任意的 $E \in W(X^*)$，命

$$E^* = \{a^* \mid a \in E\}, \quad E' = \{b \in B(\mathscr{H}) \mid ab = ba, \forall a \in E\}.$$

命题 10.3.1　$E \to E^*$，$E \to E'$ 是 $W(X^*)$ 中的 Borel 映象，这里 $W(X^*)$ 中的标准 Borel 构造如定理 10.1.7.

证．记 $\Phi(E) = E^*$，注意 $(E^*)_\perp = (E_\perp)^*$，于是对任意的 $t \in X$，$\lambda > 0$，依定理 10.1.7，

$$\begin{aligned}&\Phi^{-1}(\{E \in W(X^*) \mid \|t + E_\perp\|_1 < \lambda\}) \\ &\qquad = \{E \in W(X^*) \mid \|t^* + E_\perp\|_1 < \lambda\}\end{aligned}$$

是 $W(X^*)$ 的 Borel 子集，这里 $\|\cdot\|_1$是 $X = T(\mathscr{H})$ 的迹范数．因此，$E \to E^*$ 是 $W(X^*)$ 中的 Borel 映象．

依定理 10.2.2，存在 Borel 映象列 $a_n(\cdot)$: $W(X^*) \to (X^*, \sigma(X^*, X))$，使得对任意的 $E \in W(X^*)$，$\{a_n(E) \mid n\}$ 是包含于$(E)_1$ 的弱 * 稠集．于是

$$E' = \{b \in X^* \mid ba_n(E) = a_n(E)b, \ \forall n\},$$
$$\forall E \in W(X^*).$$

定义

$$M = \{(x_n) \mid x_n \in B(\mathscr{H}), \ \forall n, \ \sup_n \|x_n\| < \infty\},$$
$$M_* = \left\{(t_n) \mid t_n \in T(\mathscr{H}), \ \forall n, \ \sum_n \|t_n\|_1 < \infty\right\}.$$

自然地它们都是 Banach 空间，并且 $(M_*)^* = M$.

对任意的 $E \in W(X^*)$，定义映象 T^E: $B(\mathscr{H}) \to M$，$T^E(b) = (ba_n(E) - a_n(E)b)$，$\forall b \in B(\mathscr{H})$．于是，$E' = \ker T^E = \{b \in B(\mathscr{H}) \mid T^E(b) = 0\}$，并且易证 T^E是 σ-σ 连续的．再定义

映象 $T_*^E: M_* \to T(\mathscr{H})$.

$$T_*^E((t_n))(b) = T^E(b)((t_n))$$
$$= \sum_n \mathrm{tr}((ba_n(E) - a_n(E)b)t_n)$$

$\forall b \in B(\mathscr{H})$, $(t_n) \in M_*$. 由于 $(T_*^E)^* = T^E$, 所以, $(E')_\perp = (\ker T^E)_\perp = \overline{T_*^E M_*}$.

设 S 是 $B(\mathscr{H})$ 的单位球,$\{b_i\}$是(S,σ)的可数稠集. 又 M_* 是可分的,命 $\{(t_n^{(j)})\}_j$ 是 M_* 的可数稠集. 于是对任意的 $t \in X$, $E \in W(X^*)$,

$$\|t + (E')_\perp\|_1 = \inf_j \|t + T_*^E((t_n^{(j)}))\|_1,$$

但 $\|t + T_*^E((t_n^{(j)}))\|_1 = \sup_i |\mathrm{tr}(tb_i) + \sum_n \mathrm{tr}((b_i a_n(E) - a_n(E) b_i)t_n^{(j)})|$, 及 $a_n(\cdot)$: $W(X^*) \to (B(\mathscr{H}), \sigma)$ 是 Borel 的,因此, $E \to \|t + (E')_\perp\|_1$ 是 $W(X^*)$ 上的 Borel 可测函数. 所以, $E \to E'$ 是 $W(X^*)$ 中的 Borel 映象. 证毕.

定理 10.3.2 设 $\mathscr{H}$ 是可分的 Hilbert 空间, $X = T(\mathscr{H})$, $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 中 vN 代数的全体, 则 $\mathscr{A}$ 是 $W(X^*)$ 的 Borel 子集. 特别地,

$$\{M \in \mathscr{A} \mid \|t + M_\perp\|_1 < \lambda\}, \quad \forall t \in X, \ \lambda > 0$$

将生成$\mathscr{A}$的标准 Borel 构造.

证. 依命题 10.3.1 及 9.3.4, $\{E \in W(X^*) \mid E = E^*\}$, $\{E \in W(X^*) \mid E = E''\}$ 都是 $W(X^*)$ 的 Borel 子集. 从而 $\mathscr{A} = \{E \in W(X^*) \mid E = E^*\} \cap \{E \in W(X^*) \mid E = E''\}$ 是 $W(X^*)$ 的 Borel 子集. 证毕.

命题 10.3.3 设 $\mathscr{H}$ 是可分的 Hilbert 空间, S 是 $B(\mathscr{H})$ 的单位球,$\mathscr{A}$是$\mathscr{H}$中 vN 代数的全体,则存在 Borel 映象列 $a_n(\cdot)$: $\mathscr{A} \to (S, \sigma)$, 使得对每个 $M \in \mathscr{A}$, $\{a_n(M) \mid n\}$ 是包含于M的单位球 $(M)_1$ 的 $\tau(M, M_*)$ 稠集.

证. 依定理 10.2.2 与 10.3.2, 有 Borel 映象列 $b_n(\cdot)$: $\mathscr{A} \to (S, \sigma)$, 使得对每个 $M \in \mathscr{A}$, $\{b_n(M) \mid n\}$ 是包含于 $(M)_1$ 的弱

算子稠集. 命

$$\{a_n(\cdot)|n\}=\left\{\sum_k \lambda_k b_k(\cdot)\,|\,\lambda_k\right.$$

$$\left.\text{是非负有理数, 且}\sum_k \lambda_k=1\right\}.$$

依命题 1.2.8, $\{a_n(\cdot)\}_n$ 即满足要求. 证毕.

命题 10.3.4 设 $(E, \mathscr{B})$ 是 Borel 空间, $\mathscr{A}$ 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中 vN 代数的全体, 则映象 $\phi: E\to\mathscr{A}$ 是 Borel 的, 当且仅当, 存在 Borel 映象列 $a_n(\cdot): E\to(B(\mathscr{H}), \sigma(B(\mathscr{H}), T(\mathscr{H})))$, 使得对每个 $t\in E$, $\{a_n(t)|n\}$ 生成 $\phi(t)$.

证. 必要性由定理 10.2.3 立见. 反之设 $\{a_n(\cdot)\}$ 存在, 依稠密性定理 1.6.1 及作适当的处理, 可见有 Borel 映象列 $b_n(\cdot): E\to(B(\mathscr{H}), \sigma)$, 使得对每个 $t\in E$, $\{b_n(t)|n\}$ 是包含于 $(\phi(t))_1$ 的 σ-稠集. 于是, 依定理 10.2.3, $\phi: E\to\mathscr{A}$ 是 Borel 的. 证毕.

命题 10.3.5 $(M, N)\to M\cap N$, $(M, N)\to(M\cup N)''$ 是 $\mathscr{A}\times\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 中的 Borel 映象.

证. 设 Borel 映象列 $a_n(\cdot): \mathscr{A}\to(B(\mathscr{H}), \sigma)$ 如命题 10.3.3. 对任意的 $M, N\in\mathscr{A}$, 命 $\{b_n(M, N)|n\}=\{a_n(M), a_m(N)|n, m\}$. 易见 $\{b_n(\cdot,\cdot)\}$ 是 $\mathscr{A}\times\mathscr{A}$ 到 $(B(\mathscr{H}), \sigma)$ 的 Borel 映象列, 且 $\{b_n(M, N)|n\}$ 生成 $(M\cup N)''$, $\forall M, N\in\mathscr{A}$. 依命题 10.3.4, $(M, N)\to(M\cup N)''$ 是 $\mathscr{A}\times\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 中的 Borel 映象. 又注意 $(M, N)\to(M', N')\to(M'\cup N')''\to(M'\cup N')'''\doteq M\cap N$, 每个映象都是 Borel 的, 因此, $(M, N)\to M\cap N$ 是 $\mathscr{A}\times\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的 Borel 映象. 证毕.

定理 10.3.6 设 $\mathscr{H}$ 是可分的 Hilbert 空间, $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 中 vN 代数的全体, $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{H}$ 中因子的全体, 则 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Borel 子集. 特别地,

$$\{M\in\mathscr{F}\,|\,\|t+M_\perp\|_1<\lambda\}, \forall t\in T(\mathscr{H}),\ \lambda>0$$

将生成 $\mathscr{F}$ 的标准 Borel 构造.

证. 注意 $M\to(M, M')\to M\cap M'$ 是 Borel 映象，因此，$\mathscr{F}=\{M\in\mathscr{A}\mid M\cap M'=\mathbb{C}1_{\mathscr{H}}\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Borel 子集. 证毕.

注 本节见参考文献 [26], [27], [119].

§4. 因子 Borel 空间的 Borel 子集

设$\mathscr{H}$是可分的 Hilbert 空间，$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 中 vN 代数的全体，$\mathscr{F}$是$\mathscr{H}$中因子的全体.

引理 10.4.1 设G是$\mathscr{H}$中酉算子的全体，依强算子拓扑，G是 Polish 拓扑群.

证. G依强算子拓扑显然是拓扑群. 今设S是 $B(\mathscr{H})$ 的单位球，依强算子拓扑，S是 Polish 空间. 如果$\{\xi_k\}$是$\{\xi\in\mathscr{H}\mid \|\xi\|=1\}$ 的可数稠集，则$u\in G$，当且仅当，$\|u\xi_k\|=\|u^*\xi_k\|=1$，$\forall k$. 因此，

$$G=\bigcap_k\{u\in S\mid \|u\xi_k\|=1\}\cap\bigcap_{k,n}\bigcup_m\left\{u\in S\,\middle|\,|\langle\xi_k, u\xi_m\rangle|>1-\frac{1}{n}\right\}$$

这说明G是S的G_δ子集，因此，G依强算子拓扑也是 Polish 空间. 证毕.

命题 10.4.2 对任意的 $M\in\mathscr{A}$，$S(M)=\{uMu^*\mid u\in G\}$是$\mathscr{A}$的 Borel 子集，这里$G$是$\mathscr{H}$中酉算子的全体.

证. 令 $H=\{u\in G\mid uMu^*=M\}$，在G中定义等价关系～，$u\sim v$ 指 $v\in uH$. 依引理 10.4.1 及定理 9.4.2，将有G的 Borel 子集 E，使得E与uH的交由一个元组成，$\forall u\in G$. 于是，$S(M)=\{uMu^*\mid u\in E\}$.

今证明 $u\to uMu^*$ 是G到$\mathscr{A}$中的 Borel 映象. 事实上，如果$\{a_n\}$是 $(M)_1$ (M 的单位球)的可数 σ-稠集，则 $a_n(\cdot)$: $u\to ua_nu^*$ 是G到 $(B(\mathscr{H}), \sigma)$ 的连续映象，并且 $\{a_n(u)\mid n\}$ 生成 uMu^*，

$\forall u\in G$。依命题 10.3.4，$u\to uMu^*$ 是G到$\mathscr{A}$的 Borel 映象。

特别，$u\to uMu^*$ 是E到$\mathscr{A}$中一一的 Borel 映象。依定理 9.3.12，$s(M)$是$\mathscr{A}$的 Borel 子集。 证毕。

命题 10.4.3 设 $M\in\mathscr{A}$，则 $a(M)=\{N\in\mathscr{A}\,|\,N$ 与 M * 同构$\}$是$\mathscr{A}$的 Borel 子集。

证。$\mathscr{A}=\mathscr{A}(\mathscr{H})$ 是 $\mathscr{H}$ 中 vN 代数的全体，将记 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 为 $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}$ 中 vN 代数的全体，定义 $\mathscr{A}(\mathscr{H})$ 到 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 中的映象 Φ：$\Phi(M)=M\overline{\otimes}C1_{\mathscr{H}}$，$\forall M\in\mathscr{A}(\mathscr{H})$。于是，$M$与$N$ * 同构，当且仅当，$\Phi(M)$与 $\Phi(N)$ * 同构。但 $\Phi(M)'=M'\overline{\otimes}B(\mathscr{H})$，$\Phi(N)'=N'\overline{\otimes}B(\mathscr{H})$ 都是真无限的(这里设 $\dim\mathscr{H}=\infty$，如果 $\dim\mathscr{H}<\infty$，则 $a(M)=s(M)$，不待证)，依命题 6.6.7，如果 $\Phi(M)$ 与 $\Phi(N)$ * 同构，则它们也是空间 * 同构的。于是，$a(M)=\Phi^{-1}(s(\Phi(M)))$。依命题 10.4.2，只须证$\Phi$是 Borel 映象。

依命题 10.3.3，有 Borel 映象列 $a_n(\cdot)$：$\mathscr{A}\to(S,\sigma)$，这里 S 是 $B(\mathscr{H})$ 的单位球，使得$\{a_n(N)|n\}$生成N，$\forall N\in\mathscr{A}$。于是，$\{a_n(\cdot)\otimes 1_{\mathscr{H}}\}$是$\mathscr{A}$到$(B(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}),\sigma)$的 Borel 映象列，并且$\{a_n(N)\otimes 1_{\mathscr{H}}\}$将生成 $\Phi(N)$，$\forall N\in\mathscr{A}$。从而依命题 10.3.4，Φ 是 Borel 的。 证毕。

命题 10.4.4 $\mathscr{H}$中(I_n)型因子的全体$\mathscr{F}_{\mathrm{I}_n}$是$\mathscr{F}$的 Borel 子集，$n=\infty,1,2,\cdots$。

证。由于(I_n)型因子彼此都是 * 同构的，因此，依命题 10.4.3 立见。

引理 10.4.5 记$e_M(p)$是 $\mathscr{H}$ 到$\overline{[M'p\mathscr{H}]}$上的投影，则$(M,p)\to e_M(p)$ 是 $\mathscr{A}\times P$ 到P中的 Borel 映象，这里P是$\mathscr{H}$中投影算子的全体，依强算子拓扑，它是 Polish 空间。

证。只须证明$(M,p)\to\overline{[M'p\mathscr{H}]}$是 $\mathscr{A}\times P$ 到 $W(\mathscr{H})$ 中的 Borel 映象。依定理 10.2.3，只须指出有 Borel 映象列 $\eta_n(\cdot,\cdot)$：$\mathscr{A}\times P\to(\mathscr{H},w)$，这里$w$表示$\mathscr{H}$中的弱拓扑，使得 $\{\eta_n(M,p)|n\}$ 在 $\overline{[M'p\mathscr{H}]}$ 中稠，$\forall M\in\mathscr{A}$，$p\in P$。

依命题 10.3.3，有 Borel 映象列 $a_n(\cdot)$: $\mathscr{A} \to (S, \sigma)$，使得 $\{a_n(M)|n\}$在 $(M)_1$ 中 τ-稠，$\forall M \in \mathscr{A}$. 设 $\{\xi_k\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的可数稠集，命 $\zeta_{n,k}(M, p) = a_n(M')p\xi_k$，易见 $\zeta_{n,k}$ 是 $\mathscr{A} \times P$ 到$(\mathscr{H}, w)$中的 Borel 映象，$\forall n, k$，并且 $\{\zeta_{n,k}(M, p)|n, k\}$ 在 $\overline{[M'p\mathscr{H}]}$ 中的直交余为 $\{0\}$，因此，所要求的 $\{\eta_n(\cdot, \cdot)\}$ 即可找到． 证毕．

引理 10.4.6 $\mathscr{H}$中无限因子的全体 $\mathscr{F}_{if}$ 是$\mathscr{F}$ 的 Sousline 子集．

证．因子M是无限的，当且仅当，存在 $v \in M$，使得 $v^*v = 1$, $vv^* \neq 1$. 依命题 10.3.3，有 Borel 映象列 $a_n(\cdot)$: $\mathscr{A} \to (S, \sigma)$，使得 $\{a_n(M)|n\}$ 在 $(M)_1$ 中 τ-稠，$\forall M \in \mathscr{A}$. 注意

$$\begin{aligned} E &= \{(M, v)|v^*v = 1,\ vv^* \neq 1,\\ &\qquad a_n(M')v = va_n(M'),\ \forall n\}\\ &= \mathscr{F} \times \{v|v^*v = 1,\ vv^* \neq 1\} \bigcap \bigcap_n\\ &\qquad \{(M, v)|a_n(M')v = va_n(M')\}\\ &= \mathscr{F} \times \{v|v^*v = 1,\ vv^* \neq 1\} \bigcap \bigcap_{n,i,j}\\ &\qquad \{(M, v)|\langle (a_n(M')v - va_n(M'))\xi_i, \xi_j\rangle = 0\} \end{aligned}$$

是 $\mathscr{F} \times (S, \tau)$ 的 Borel 子集，这里 $\{\xi_i\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的可数稠子集．命 π 是 $\mathscr{F} \times (S, \tau)$ 到$\mathscr{F}$的投影映象，因此，$\mathscr{F}_{if} = \pi E$ 是$\mathscr{F}$ 的 Sousline 子集． 证毕．

命题 10.4.7 $\mathscr{H}$中(II_1)型因子的全体 $\mathscr{F}_{\mathrm{II}_1}$ 是$\mathscr{F}$的 Borel 子集．

证．依命题 10.4.4 及引理 10.4.6，只须证明$\mathscr{H}$中有限因子的全体 $\mathscr{F}_f$ 是$\mathscr{F}$的 Sousline 子集．

由于$\mathscr{H}$可分，$\mathscr{H}$中因子M是有限的，当且仅当，M 上存在忠实的正规迹，即有 $\{\xi_k\} \subset \mathscr{H}$，使得 $\sum_k \|\xi_k\|^2 < \infty$, $\sum_k \langle (ab - ba)\xi_k, \xi_k\rangle = 0$, $\forall a, b \in M$，以及 $[a'\xi_k|k, a' \in M']$ 在$\mathscr{H}$中稠．于是依引理 10.4.5，

$$E = \{(M, (\xi_k)) | (\xi_k) \text{ 对}M\text{具有上面所说的性质}\}$$
$$= \{(M, (\xi_k)) | c_M(p) = 1, \text{这里 } p \text{ 是}\mathscr{H}\text{到 } \overline{[\xi_k | k]} \text{上的投影}\}.$$

$$\bigcap \bigcap_{n,m} \Big\{(M, (\xi_k)) \Big| \sum_k \langle (a_n(M)a_m(M) - a_m(M)a_n(M))\xi_k, \xi_k\rangle = 0\Big\}$$

是 $\mathscr{F} \times \mathscr{H}_\infty$ 的 Borel 子集，这里 $a_n(\cdot)$: $\mathscr{A} \to (S, \sigma)$ 是 Borel 映象，使得 $\{a_n(M)|n\}$ 在 $(M)_1$ 中 τ-稠，$\forall M \in \mathscr{A}$（见命题 10.3.3）；而 $\mathscr{H}_\infty$ 是可数无穷多个 $\mathscr{H}$ 的 Hilbert 直和. 令 π 是 $\mathscr{F} \times \mathscr{H}_\infty$ 到 $\mathscr{F}$ 上的投影映象，则 $\mathscr{F}_f = \pi\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}$ 的 Sousline 子集. 证毕.

引理 10.4.8 $\mathscr{H}$ 中半有限因子的全体 $\mathscr{F}_{sf}$ 是 $\mathscr{F}$ 的 Sousline 子集.

证. M 是半有限的，当且仅当，存在 M 的有限投影 p，使得 $c(p) = 1$，即有 $\{\xi_k\} \subset p\mathscr{H}$，使得 $\sum_k \|\xi_k\|^2 < \infty$，$\sum_k \langle \cdot\xi_k, \xi_k\rangle$ 是 (pMp) 上忠实的正规迹，同时 $\overline{[Mp\mathscr{H}]} = \mathscr{H}$.

考虑 $\mathscr{F} \times P \times \mathscr{H}_\infty$ 的子集 E，$(M, p, (\xi_k)) \in E$ 指：$p\xi_k = \xi_k$，$\forall k$；$pa_n(M') = a_n(M')p$，$\forall n$；$\overline{[a'\xi_k | k, a' \in M']} = p\mathscr{H}$；$\overline{[Mp\mathscr{H}]} = \mathscr{H}$；以及对任意的 n, m

$$\sum_k \langle (pa_n(M)pa_m(M)p - pa_m(M)pa_n(M)p)\xi_k, \xi_k\rangle = 0,$$

这里 $a_n(\cdot)$ 是 $\mathscr{A}$ 到 (S, σ) 的 Borel 映象，使得 $\{a_n(M)\}_n$ 在 $(M)_1$ 中 τ-稠，$\forall M \in \mathscr{A}$（见命题 10.3.3）. 依引理 10.4.5，$(M, p) \to \overline{[Mp\mathscr{H}]}$ 是 Borel 映象，由此易见 E 是 Borel 子集. 令 π 是 $\mathscr{F} \times P \times \mathscr{H}_\infty$ 到 $\mathscr{F}$ 上的投影映象，则 $\mathscr{F}_{sf} = \pi E$ 是 $\mathscr{F}$ 的 Sousline 子集. 证毕.

引理 10.4.9 设 M 是 $\mathscr{H}$ 中的因子，Φ 是 M 的 $*$ 自同构. 如果有 M 的非零元 a，使得 $\Phi(b)a = ab$，$\forall b \in M$，则 Φ 是 M 的内 $*$

自同构，即有M的酉元u，使得 $\Phi(b) = ubu^*$, $\forall b \in M$.

证. 对任意的 $b \in M$, $\Phi(b)a = ab$, $a^*\Phi(b^*) = b^*a^*$. 特别地，b是M的酉元，则

$$b^*(a^*a)b = a^*\Phi(b^*) \cdot \Phi(b)a = a^*a,$$
$$\Phi(b)aa^*\Phi(b^*) = ab \cdot b^*a^* = aa^*.$$

因此，a^*a 及 $aa^* \in M \cap M' = \mathbb{C}1_{\mathscr{H}}$. 令 $u = \|a\|^{-1}a$，则u是M的酉元，并且 $\Phi(b) = ubu^*$, $\forall b \in M$. 证毕.

引理 10.4.10 设G是$\mathscr{H}$中酉算子的全体，则 $E = \{(M, u) | uMu^* = M$, 但$\cdot \longrightarrow u \cdot u^*$ 不是M的内$*$自同构$\}$是$\mathscr{F} \times G$ 的 Borel 子集.

证. 依命题 10.3.3，有 Borel 映象列 $a_n(\cdot)$: $\mathscr{A} \to (S, \sigma)$，使得 $\{a_n(M) | n\}$ 在$(M)_1$中τ-稠，$\forall M \in \mathscr{A}$. 由于 $(M, u) \to ua_n(M)u^*$ 是 $\mathscr{F} \times G$ 到(S, σ)中的 Borel 映象，$\forall n$，因此，

$$\{(M, u) | uMu^* = M\} = \bigcap_{n,m}$$
$$\{(M, u) | ua_n(M)u^* \cdot a_m(M') = a_m(M') \cdot ua_n(M)u^*\}$$

是 $\mathscr{F} \times G$ 的 Borel 子集. 设距离d使得(S, σ)成为完备可分的距离空间，命 $E(j, k, m, n)$ 是 $\mathscr{F} \times G$ 的子集，$(M, u) \in E(j, k, m, n)$ 指 $uMu^* = M$，并且满足下列之一:

1) $d(a_j(M), 0) < n^{-1}$;

2) $d(ua_k(M'), 0) < n^{-1}$;

3) $d(a_j(M), 0) \geq n^{-1}$, $d(ua_k(M'), 0) \geq n^{-1}$，以及 $d(a_j(M), ua_k(M')) \geq m^{-1}$.

注意 $(M, u) \to (a_j(M), ua_k(M'))$ 是 $\mathscr{F} \times G$ 到 $(S, \sigma) \times (S, \sigma)$ 中的 Borel 映象，因此，$E(j, k, m, n)$ 是 $\mathscr{F} \times G$ 的 Borel 子集. 今只须证明 $E = \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{j,k} E(j, k, m, n)$.

如果 $\cdot \longrightarrow u \cdot u^*$ 是M的内$*$自同构，即有M的酉元v，使得 $uau^* = vav^*$, $\forall a \in M$. 于是，$v \in uM'$. 设 $d(v, 0) \geq 2n^{-1}$，对任意的m，可选j, k，使得

$$d(a_j(M), v) < (2mn)^{-1}, \quad d(ua_k(M'), v) < (2mn)^{-1},$$
由三角形不等式，可见 $(M, u) \notin E(j, k, m, n)$。因此，$(M, u) \notin \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{j,k} E(j, k, m, n)$。

反之，设 $(M, u) \in \mathscr{F} \times G$，$uMu^* = M$，并且 $(M, u) \notin \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{j,k} E(j, k, m, n)$，于是存在 n，对任意的 m，有 $j(m)$，$k(m)$，使得 $(M, u) \notin E(j(m), k(m), m, n)$。因此，$d(a_{j(m)}(M), 0) \geqslant n^{-1}$，$d(ua_{k(m)}(M'), 0) \geqslant n^{-1}$，及 $d(a_{j(m)}(M), ua_{k(m)}(M')) < m^{-1}$，$\forall m$。由于 M，M' 的单位球是 σ-紧的，因此，$\{a_{j(m)}(M)\}_m$ 有 σ-极限点 a，$\{a_{k(m)}(M')\}_m$ 有 σ-极限点 a'，可见
$$a = ua', \quad d(a, 0) \geqslant n^{-1}, \quad d(ua', 0) \geqslant n^{-1}.$$
今对任意的 $b \in M$，由于 $u^*a \in M'$，$ubu^*a = ab$，依引理10.4.9，$\cdot \longrightarrow u \cdot u^*$ 是M的内$*$自同构，即 $(M, u) \notin E$。 证毕。

引理 10.4.11 设G是$\mathscr{H}$中酉算子的全体，依强算子拓扑，G是 Polish 拓扑群；令 $G_0 = \{u \in G \mid 1$ 不是 u 的本征值$\}$，则
$$G_0 = \bigcap_{n,k} \bigcup_m \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n} \{u \in G \mid \|f_m(u)\xi_j\| < k^{-1}\}$$
是G的 Borel 子集，这里$\{\xi_j\}$是$\mathscr{H}$单位球的可数稠集，$\{f_m\}$是复平面的单位圆周上的连续函数列，使得：1) $0 \leqslant f_m \leqslant 1$；2) 如果 $|1 - z| \leqslant 2^{-m}$，则 $f_m(z) = 1$；3) 如果 $|1 - z| \geqslant 2^{-m+1}$，则 $f_m(z) = 0$，$\forall m$。

证. 设 $u \in G$，及有$\mathscr{H}$的单位矢 ξ 使得 $u\xi = \xi$，于是 $f_m(u)\xi = \xi$，$\forall m$。由此，
$$\begin{aligned}|1 - \|f_m(u)\xi_j\|| &= |\|f_m(u)\xi\| - \|f_m(u)\xi_j\|| \\ &\leqslant \|\xi - \xi_j\|, \ \forall j,\end{aligned}$$
取 j_0，使得 $\|\xi_{j_0} - \xi\| \leqslant \frac{1}{4}$，于是 $\|f_m(u)\xi_{j_0}\| \geqslant \frac{3}{4}$，$\forall m$。当 $n \geqslant j_0$ 及 $k \geqslant 2$ 时，
$$u \notin \{v \in G \mid \|f_m(v)\xi_{j_0}\| < k^{-1}\}, \quad \forall m.$$
反之设 $u \in G$，且 1 不是 u 的本征值，$e(\cdot)$ 是定义于单位圆

周上相应于u的谱测度，令

$$p_m = e(\{z \mid |z| = 1, \quad |1 - z| \leqslant 2^{-m}\}),$$

则 $p_{m+1} \leqslant p_m$, $0 \leqslant f_{m+1}(u) \leqslant p_m \leqslant f_m(u)$, 并且由于1不是$u$的本征值，$p_m \xrightarrow{\text{强算子}} 0$. 对任意的$n$, k, 选m充分大，使得 $\sup\{\|p_m\xi_j\| \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} < k^{-1}$, 则

$$\|f_{m+1}(u)\xi_j\| = \|f_{m+1}(u)p_m\xi_j\| \leqslant \|p_m\xi_j\| < k^{-1},$$
$$1 \leqslant j \leqslant n.$$

证毕.

引理 10.4.12 设X, Z是 Polish 空间，Y是 Borel 空间，f是 $X \times Y$ 到Z中的映象，使得对每个 $y \in Y$, $f(\cdot, y)$ 是X到Z中的连续映象，同时对每个 $x \in X$, $f(x, \cdot)$ 是Y到Z中的 Borel 映象，则f是 Borel 映象.

证. 设d, δ是X, Z中相应的距离，并且$\{x_k\}$是X的可数稠集. 如果F是Z的闭子空间，则

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{(x, y) \mid f(x, y) \in F\} \\ &= \bigcap_n \bigcup_k \{(x, y) \mid d(x, x_k) < n^{-1}, \\ &\qquad \delta(f(x_k, y), F) < n^{-1}\} \\ &= \bigcap_n \bigcup_k (\{x \mid d(x, x_k) < n^{-1}\} \times Y \cap X \\ &\qquad \times f(x_k, \cdot)^{-1}(\{z \mid \delta(z, F) < n^{-1}\})) \end{aligned}$$

是 $X \times Y$ 的 Borel 子集，因此，f是 Borel 的. 证毕.

引理 10.4.13 设G是$\mathscr{H}$中酉算子的全体，$G_0 = \{u \in G \mid 1$不是u的本征值$\}$, $f(t, z) = \exp(-t(z+1)(z-1)^{-1})$, $\forall t \in \mathbf{R}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$, 则f是 $\mathbf{R} \times G_0$ 到G中的 Borel 映象，这里G, G_0的 Borel 构造由强算子拓扑产生.

证. 设 $u \in G_0$, 由于1不是u的本征值，因此，$t \to f(t, u)$是$\mathbf{R}$到G中的连续映象.

今任意固定 $t \in \mathbf{R}$. 记Γ为复平面的单位圆周，于是 $g(z) = it(z+1)(z-1)^{-1}$ 是 $(\Gamma\backslash\{1\})$ 上的实值连续函数. 自然可以

取Γ上的实值连续函数列$\{g_n\}$，使得$g_n(z)\to g(z)$，$\forall z\in(\Gamma\backslash\{1\})$。由此，依强算子拓扑，$\exp(ig_n(u))\to\exp(ig(u))=f(t,u)$，$\forall u\in G_0$。设$\delta$是 Polish 空间$G$上相应的距离，$F$是$G$的闭子集，由于$\delta(\exp(ig_n(u)),f(t,u))\to 0$，$\forall u\in G_0$，因此，

$$f(t,\cdot)^{-1}(F)=\{u\in G_0|f(t,u)\in F\}$$
$$=\bigcap_k\bigcup_{n\geqslant k}\{u\in G_0|\delta(\exp(ig_n(u)),F)<k^{-1}\},$$

但$\exp(ig_n(\cdot))$是G中的连续映象，$\forall n$，又G_0是G的 Borel 子集(引理 10.4.11)，因此，$f(t,\cdot)^{-1}(F)$是G_0的 Borel 子集。从而，$f(t,\cdot)$是G_0到G中的 Borel 映象。

依引理 10.4.12，f是$\mathbf{R}\times G_0$到G中的 Borel 映象。 证毕。

引理 10.4.14 设E是$\mathscr{F}$的 Sousline 子集，则$s(E)=\{uMu^*|M\in E,u\in G\}$也是$\mathscr{F}$的 Sousline 子集，这里$G$是$\mathscr{H}$中酉算子的全体。

证. 依命题 10.3.3，有 Borel 映象列$a_n(\cdot)$：$\mathscr{F}\to(S,\sigma)$，使得$\{a_n(M)|n\}$在$(M)_1$中τ-稠，$\forall M\in\mathscr{F}$。令$b_n(M,u)=ua_n(M)u^*$，则$\{b_n(\cdot,\cdot)\}$是$\mathscr{F}\times G$到(S,σ)中的 Borel 映象列，并且$\{b_n(M,u)\}_n$生成uMu^*，$\forall(M,u)\in\mathscr{F}\times G$。依命题 10.3.4，$\Psi$：$(M,u)\to uMu^*$是$\mathscr{F}\times G$到$\mathscr{F}$中的 Borel 映象。因此，依命题 9.3.5，$s(E)=\Psi(E\times G)$是$\mathscr{F}$的 Sousline 子集。 证毕。

今记$D=\{z\in\mathbf{C}|0\leqslant\operatorname{Im}z\leqslant 1\}$；

$A(D)=\{f|f$是D上连续有界的复值函数，且在$\mathring{D}$中解析$\}$；

$C_0^\infty(D)$是D上连续复值函数，且在∞处为 0 的全体，依极大模，它是 Banach 空间。

$f(z)\to\exp(-|\operatorname{Re}z|)f(z)$显然是$A(D)$到$C_0^\infty(D)$中的一一映象，并且把$\{f\in A(D)||f(z)|\leqslant r,\forall z\in D\}$映为$C_0^\infty(D)$的闭子集。因此，这个映象把$A(D)$一一地映为$C_0^\infty(D)$的一个 Borel 子集，于是由$C_0^\infty(D)$的 Borel 构造可诱导$A(D)$的标准

Borel 构造。

命题 10.4.15 $\mathscr{H}$ 中 (III) 型因子的全体 $\mathscr{F}_{\rm III}$ 是 $\mathscr{F}$ 的 Borel 子集。

证。依引理 10.4.8，只须证明 $\mathscr{F}_{\rm III}$ 是 Sousline 子集。设 ξ_0 是 $\mathscr{H}$ 的单位矢，考虑 $\mathscr{F}\times G_0\times \mathbf{R}$ 的子集 E，$(M, u, s)\in E$ 指：1) $\overline{M\xi_0}=\overline{M'\xi_0}=\mathscr{H}$；2) 对任意的 $t\in\mathbf{R}, f(t, u)\xi_0=\xi_0$；3) $f(t, u)Mf(-t, u)=M$，$\forall t\in\mathbf{R}$；4) $\cdot\to f(s, u)\cdot f(-s, u)$ 不是 M 的内 * 自同构，这里 G_0 与 f 如引理 10.4.13 所述。

由命题 10.3.3 及 10.2.3，条件 1) 决定 $\mathscr{F}$ 的 Borel 子集。对任意的有理数 r，依引理 10.4.13 的证明，$f_1(r,\cdot)$ 是 G_0 到 G 的 Borel 映象，因此，条件 2) 决定 G_0 的 Borel 子集。在引理 10.4.10 的证明中，已指出 $\{(M, v)\mid vMv^*=M\}$ 是 $\mathscr{F}\times G$ 的 Borel 子集。条件 3) 也只须对所有的有理数成立，因此，条件 3) 也决定 $\mathscr{F}\times G_0$ 的 Borel 子集。此外，依引理 10.4.10 及 10.4.13，条件 4) 决定 $\mathscr{F}\times G_0\times\mathbf{R}$ 的 Borel 子集。所以，E 是 $\mathscr{F}\times G_0\times\mathbf{R}$ 的 Borel 子集。

依命题 10.3.3，有 Borel 映象列 $a_n(\cdot)$: $\mathscr{F}\to(S, \sigma)$，使得对任意的 $M\in\mathscr{F}$，$\{a_n(M)\mid n\}$ 在 $(M)_1$ 中 τ-稠。对任意的正整数 j, k，考虑 $\mathscr{F}\times G_0\times\mathbf{R}\times A(D)$ 的子集 $E(j, k)$，$(M, u, s, g)\in E(j, k)$ 指：5) $(M, u, s)\in E$；6) $g(t)=\varphi(f(t, u)\times a_j(M)f(-t, u)a_k(M))$，$\forall t\in\mathbf{R}$；7) $g(t+i)=\varphi(a_k(M)f(t, u)\times a_j(M)f(-t, u))$，$\forall t\in\mathbf{R}$，这里 $\varphi(\cdot)=\langle\cdot\xi_0, \xi_0\rangle$。

条件 6) 只须对所有的有理数成立，因此决定 $\mathscr{F}\times G_0\times A(D)$ 的 Borel 子集。条件 7) 也相仿，所以，$E(j, k)$ 是 $\mathscr{F}\times G_0\times\mathbf{R}\times A(D)$ 的 Borel 子集。

命 π_1 是 $\mathscr{F}\times G_0\times\mathbf{R}\times A(D)$ 到 $\mathscr{F}\times G_0\times\mathbf{R}$ 上的投影映象，π_2 是 $\mathscr{F}\times G_0\times\mathbf{R}$ 到 $\mathscr{F}$ 上的投影映象，于是，

$$E_0=\pi_2\left(\bigcap_{j,k}\pi_1E(j, k)\right)$$

是 $\mathscr{F}$ 的 Sousline 子集。依引理 10.4.14，$s(E_0)$ 也是 $\mathscr{F}$ 的 Sousl-

Int 子集。

如果 $M\in\mathscr{F}_{\rm III}$，依命题 6.6.6，$M$ 在 $\mathscr{H}$ 中有循环且分离的单位矢 ξ。于是有 $u\in G$，使得 uMu^* 以 ξ_0 为循环且分离的矢。从而只须证明

$$E_0=\{M\in\mathscr{F}_{\rm III}|M\ \text{以}\ \xi_0\ \text{为循环且分离的矢}\}.$$

设 $M\in\mathscr{F}_{\rm III}$，并且以 ξ_0 为循环且分离的矢。于是，$\varphi(\cdot)=\langle\cdot\xi_0,\xi_0\rangle$ 是 M 上忠实的正规态。依定义 8.3.1，φ 引导 M 的模自同构群 $\{\sigma_t|t\in\mathbf{R}\}$。由于 $M\in\mathscr{F}_{\rm III}$，依定理 8.3.6，必有 $s\in\mathbf{R}$，使得 σ_s 不是 M 的内 * 自同构。由于 $\{\sigma_t\}$ 对 φ 是不变的，

$$a\xi_0\to\sigma_t(a)\xi_0,\qquad\forall a\in M$$

可扩张为 $\mathscr{H}$ 中的酉算子 u_t，$\forall t\in\mathbf{R}$。易见

$$u_t\xi_0=\xi_0,\quad u_tau_{-t}=\sigma_t(a),\quad\forall t\in\mathbf{R},\quad a\in M$$

以及 $t\to u_t$ 是强算子连续的。如果 u 是 $\{u_t\}$ 无穷小母元的 Caley 变换，则 $u\in G_0$，并且 $u_t=f(t,u)$，$\forall t\in\mathbf{R}$。设 g_{jk} 是相应于 $(\varphi,\sigma_t,a_j(M),a_k(M))$ 的 KMS 函数，则 $(M,u,s,g_{jk})\in E(j,k)$，$\forall j,k$。因此，$M\in E_0$。

反之，设 $M\in E_0$，则有 $u\in G_0$，$s\in\mathbf{R}$，使得

$$(M,u,s)\in\bigcap_{j,k}\pi_1E(j,k).$$

因此，$M\in\mathscr{F}$，以 ξ_0 为循环且分离的矢，$\{\sigma_t(\cdot)=f(t,u)\cdot f(-t,u)|t\in\mathbf{R}\}$ 是 M 的强算子连续的 * 自同构群，并且 $\sigma_s(\cdot)$ 不是 M 的内 * 自同构。对任意的 $a,b\in(M)_1$，依 $\{a_n(M)\}_n$ 的性质，有

$$a_{j(n)}(M)\xrightarrow{\tau}a,\qquad a_{k(n)}(M)\xrightarrow{\tau}b,$$

对每个 n，由于 $(M,u,s)\in\pi_1E(j(n),k(n))$，因此有 $g_n\in A(D)$，使得对任意的 $t\in\mathbf{R}$，

$$\begin{cases}g_n(t)=\varphi(\sigma_t(a_{j(n)}(M))a_{k(n)}(M))\\ g_n(t+i)=\varphi(a_{k(n)}(M)\sigma_t(a_{j(n)}(M))).\end{cases}$$

注意 $f(t,u)\xi_0=\xi_0$ 及 $f(t,u)\in G$，$\forall t\in\mathbf{R}$，由极大模原理，$|g_n(z)-g_m(z)|\to0$，对 $z\in D$ 一致。因此有 $g\in A(D)$，使得

$g_n(z) \to g(z)$, $\forall z \in D$. 特别地,

$$g(t) = \varphi(\sigma_t(a)b), \quad g(t+i) = \varphi(b\sigma_t(a)), \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

依定理 8.2.10, $\{\sigma_t(\cdot) = f(t, u) \cdot f(-t, u)\}$ 是 M 的相应于 $\varphi(\cdot) = \langle \cdot \xi_0, \xi_0 \rangle$ 的模自同构群. 由于 $\sigma_t(\cdot)$ 不是 M 的内 * 自同构,依定理 8.3.6, $M \in \mathscr{F}_{\text{III}}$. 证毕.

综上所述,我们有

定理 10.4.16 $\mathscr{F}_{\text{I}_n}(n = 1, 2, \cdots)$, $\mathscr{F}_{\text{I}_\infty}$, $\mathscr{F}_{\text{II}_1}$, $\mathscr{F}_{\text{II}_\infty}$ 及 $\mathscr{F}_{\text{III}}$ 都是 $\mathscr{F}$ 的 Borel 子集.

注 本节见参考文献 [84], [100].

第十一章 约化理论

约化理论是 F. J. Murray 与 J. von Neumann 所创立的。尽管已经有了许多发展，但理论的大部份仍未改变。此外，由于 E. G. Effros 引入了 vN 代数的 Borel 空间(见第十章)，因此，本章也将加入这个近代的观点。

§1—§3 在 Borel 空间(虽然还可以在更一般的局部化测度空间)上分别引入 Hilbert 空间可测场，算子可测场，vN 代表可测场的概念，并由此来定义它们的“积分”，及指出分解的算子、分解的 vN 代数与对角算子之间的关系(11.2.10，11.3.7)。§4 指出 vN 代数可以分解为因子的“积分”(11.4.2)，以及这样的分解在本质上是唯一的(11.4.5)。这曾经是约化理论的主要目的之一。§5 证明分解的 vN 代数与其积分的各分量的类型是相同的(11.5.10)。§6 指出如果算子可测场或者 vN 代数可测场能够点点空间 * 同构于定常的算子场或 vN 代数场，那么这个 * 同构场可以改取作可测的(11.6.3，11.6.5)。原先是在标准 Borel 空间上进行的，后来 M. Takesaki 免除了“标准”的要求。§7 是第十章 §4 的继续，指出如果 $\mathscr{A}$ 是可分 $\mathscr{H}$ 中 vN 代数的全体，那么 $\mathscr{H}$ 中各种类型 vN 代数的全体都是 $\mathscr{A}$ 的 Borel 子集(11.7.16)。基于这个结果，进而在 §8 中指出可分 c^*-代数态空间的各种类型态的集合也都是 Borel 子集(11.8.6)。这是 J. Feldman 与 O. Nielsen 等的工作。

§ 1. Hilbert 空间的可测场

设 $(E,\mathscr{B})$ 是 Borel 空间，E 上的复值函数 f 称为可测的，指它对 $\mathscr{B}$ 可测的。

$\mathscr{H}(\cdot)$ 称为 E 上的 Hilbert 空间场，指对每个 $t\in E$，$\mathscr{H}(t)$

是 Hilbert 空间，$\xi(\cdot)$ 称为 E 上(关于 $\mathscr{H}(\cdot)$)的矢场，指 $\xi(t)\in\mathscr{H}(t)$，$\forall t\in E$.

定义 11.1.1 Borel 空间$(E,\mathscr{B})$上的 Hilbert 空间场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 称为可测的，指存在 E 上的矢场列 $\{\xi_n(\cdot)\}_n$，使得：1) $\langle\xi_n(t),\xi_m(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数，$\forall n,m$，这里 $\langle,\rangle_t$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 中的内积；2) 对任意的 $t\in E$，$\{\xi_n(t)\}_n$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 的完全子集[1]（特别可见，每个 $\mathscr{H}(t)$ 都是可分的）.

这时，E 上的矢场 $\xi(\cdot)$ 称为可测的，指对任意的 n，$\langle\xi(t),\xi_n(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数. 可测矢场的全体将记以 Θ.

命题 11.1.2 设 $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 Borel 空间$(E,\mathscr{B})$上 Hilbert 空间的可测场，则

1) 对任意的 $n=\infty,0,1,\cdots$，

$$E_n=\{t\in E\mid \dim\mathscr{H}(t)=n\}\in\mathscr{B};$$

2) 存在 $\{\eta_n(\cdot)\}\subset\Theta$，使得对每个 $t\in E$，如果 $\dim\mathscr{H}(t)=\infty$，则 $\{\eta_n(t)\}$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 的直交规范基；如果 $\dim\mathscr{H}(t)=n<\infty$，则 $\{\eta_1(t),\cdots,\eta_n(t)\}$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 的直交规范基，并且 $\eta_k(t)=0$，$\forall k>n$；

3) E 上的矢场 $\xi(\cdot)\in\Theta$，当且仅当，$\langle\xi(t),\eta_n(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数，$\forall n$.

证. 设已构造出 $\{\eta_1(\cdot),\cdots,\eta_n(\cdot)\}\subset\Theta$，使得对每个 $t\in E$，如果 $\dim\mathscr{H}(t)>n$，则 $\{\eta_1(t),\cdots,\eta_n(t)\}$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 的直交规范系；如果 $\dim\mathscr{H}(t)=k\leqslant n$，则 $\{\eta_1(t),\cdots,\eta_k(t)\}$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 的直交规范基，及 $\eta_i(t)=0$，$k<i\leqslant n$；并且 $[\eta_i(t)|1\leqslant i\leqslant n]=[\xi_i(t)|1\leqslant i\leqslant n]$，这里 $\{\xi_i(\cdot)\}$ 如定义 11.1.1；以及如果 $\xi(\cdot)\in\Theta$，则$\langle\xi(t),\eta_i(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数，$1\leqslant i\leqslant n$.

对每个 $t\in E$，命 $p(t)$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 到 $[\eta_i(t)|1\leqslant i\leqslant n]$ 上的投影，则若 $\xi(\cdot)\in\Theta$

---

1) 即指它张成的线性子空间是稠的.

$$t \to p(t)\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \langle \xi(t), \eta_i(t) \rangle_t \eta_i(t)$$

仍然是 E 上的可测矢场。

对 $j \geqslant 1$，命

$$F_j = \{t \in E \mid (1 - p_n(t))\xi_{n+j}(t) \neq 0,$$
$$\text{但 } (1 - p_n(t))\xi_i(t) = 0,\ i < n + j\}$$

以及

$$F_\infty = \{t \in E \mid (1 - p_n(t))\xi_i(t) = 0,\ \forall i\}$$
$$= \{t \in E \mid \dim \mathscr{H}(t) \leqslant n\}.$$

由于 $\|(1 - p_n(t))\xi_i(t)\|_t$ 是 E 上的可测函数，$\forall i$，因此，$\{F_\infty, F_1, F_2, \cdots\}$ 是 E 的 Borel 分割(即每个都是 Borel 子集，彼此无交且并为 E)．命

$$\eta_{n+1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } t \in F_\infty; \\ \dfrac{(1 - p_n(t))\xi_{n+j}(t)}{\|(1 - p_n(t))\xi_{n+j}(t)\|}, & \text{如果 } t \in F_j. \end{cases}$$

显然 $\{\eta_1(\cdot), \cdots, \eta_{n+1}(\cdot)\}$ 将满足与 $\{\eta_1(\cdot), \cdots, \eta_n(\cdot)\}$ 相仿的性质．由此，我们得到满足 2) 的 $\{\eta_n(\cdot)\}$，并且如果 $\xi(\cdot) \in \Theta$，则 $\langle \xi(t), \eta_n(t) \rangle_t$ 是 E 上的可测函数，$\forall n$．特别地，$\|\eta_n(t)\|_t$ 是 E 上的可测函数，$\forall n$，因此，

$$E_n = \{t \in E \mid \eta_i(t) \neq 0,\ i \leqslant n;\ \eta_i(t) = 0,\ i > n\} \in \mathscr{B},\ \forall n.$$

最后，如果 E 上的矢场 $\xi(\cdot)$，使得 $\langle \xi(t), \eta_n(t) \rangle_t$ 是 E 上的可测函数，$\forall n$，则

$$\langle \xi(t), \xi_n(t) \rangle_t = \sum_i \langle \xi(t), \eta_i(t) \rangle_t \cdot \langle \eta_i(t), \xi_n(t) \rangle_t$$

也是 E 上的可测函数，$\forall n$，即 $\xi(\cdot) \in \Theta$．　证毕．

定义 11.1.3　命题 11.1.2 中的 $\{\eta_n(\cdot)\}$ 称为可测场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规范基．此外，我们称可测矢场列 $\{\zeta_n(\cdot)\}$ 为基本的，指 $\{\zeta_n(t) \mid n\}$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 的完全子集，$\forall t \in E$．

命题 11.1.4　设 $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上 Hilbert 空间的可

测场.

1) E 上的矢场 $\xi(\cdot)$ 是可测的,当且仅当,$\langle\xi(t),\zeta_n(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数,$\forall n$,这里$\{\zeta_n(\cdot)\}$是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的任意基本可测矢场列;

2) 设 $\xi(\cdot)$ 是可测矢场,则 $\|\xi(t)\|_t$是 E 上的可测函数;

3) 设 $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot)$ 是可测矢场,则$\langle\xi(t),\eta(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数;

4) 设 $\{\zeta_n(\cdot)\}\subset\Theta$, 并且对每个 $t\in E$, 有 $\zeta(t)\in\mathscr{H}(t)$,使得 $\langle\zeta_n(t)-\zeta(t),\ \xi\rangle_t\to 0$, $\forall\xi\in\mathscr{H}(t)$, 则 $\zeta(\cdot)$ 也是可测矢场.

证. 3) 设 $\{\eta_n(\cdot)\}$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规范基, 于是由 $\langle\xi(t),\eta(t)\rangle_t=\sum\limits_n\langle\xi(t),\eta_n(t)\rangle_t\cdot\langle\eta_n(t),\eta(t)\rangle_t$ 立见. 2) 是 3) 的特例.

4) 设 $\{\xi_n(\cdot)\}$ 如定义 11.1.1, 于是由 $\langle\zeta(t),\xi_n(t)\rangle_t=\lim\limits_m\langle\zeta_m(t),\ \xi_n(t)\rangle_t$ 立见.

1) 必要性是 3) 的特例. 反之设 $\langle\xi(t),\ \zeta_n(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数, $\forall n$, $\{\xi_n(\cdot)\}$ 与 Θ 如定义 11.1.1. 自然,$\{\zeta_n(\cdot)\}$也满足定义 11.1.1 的要求,用此可构造 $\Theta'=\{\eta(\cdot)\,|\,\langle\eta(t),\zeta_n(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数, $\forall n\}$,于是,$\xi(\cdot)\in\Theta'$, $\{\xi_n(\cdot)\}\subset\Theta'$. 用 3) 于 Θ', 则 $\langle\xi(t),\ \xi_n(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数, $\forall n$, 因此, $\xi(\cdot)\in\Theta$. 证毕.

例 1. 定常的 Hilbert 空间可测场.

设 $(E,\mathscr{B})$ 是 Borel 空间,$\mathscr{H}_0$ 是固定的可分 Hilbert 空间, $\{\xi_n\}$ 是 $\mathscr{H}_0$ 的完全子集,命

$$\mathscr{H}(t)=\mathscr{H}_0,\quad \xi_n(t)=\xi_n,\quad \forall t\in E,$$

$\Theta=\{\xi(\cdot)\,|\,\langle\xi(t),\ \xi_n(t)\rangle_t=\langle\xi(t),\ \xi_n\rangle_0$ 是 E 上的可测函数, $\forall n\}$. 这样得到的 Hilbert 空间可测场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 称为定常的. 显然, $\xi(\cdot)\in\Theta$, 当且仅当, $\langle\xi(t),\ \xi\rangle_0$ 是 E 上的可测函数, $\forall\xi\in\mathscr{H}_0$. 特别地,$\Theta$ 将不随完全子集$\{\xi_n\}$的选择而异.

例 2. 设 A 是可分的 c^*-代数，$\mathscr{S}$ 是 A 的态空间. 考虑 $(\mathscr{S}, \sigma(A^*, A))$ 为 Borel 空间，对每个 $\rho\in\mathscr{S}$，由 GNS 构造，可得到 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_\rho$. 如果 $\{a_n\}$ 是 A 的可数稠集，则 $\{(a_n)_\rho\}_n$ 在 $\mathscr{H}_\rho$ 中稠，并且 $\langle(a_n)_\rho,(a_m)_\rho\rangle_\rho=\rho(a_m^*a_n)$ 是 $\mathscr{S}$ 上的连续函数，$\forall n, m$. 从而，命 $\mathscr{H}(\rho)=\mathscr{H}_\rho$，$\forall\rho\in\mathscr{S}$，$\Theta=\{\xi(\cdot)|\langle\xi(\rho),(a_n)_\rho\rangle_\rho$ 是 $\mathscr{S}$ 上的可测函数，$\forall n\}$，则得到 $\mathscr{S}$ 上 Hilbert 空间可测场 $\mathscr{H}(\cdot)$. 显然，$\xi(\cdot)\in\Theta$，当且仅当，$\langle\xi(\rho), a_\rho\rangle_\rho$ 是 $\mathscr{S}$ 上的可测函数，$\forall a\in A$.

命题 11.1.5 设 $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上 Hilbert 空间的可测场，对 $n=\infty, 0, 1, \cdots$，命 $E_n=\{t\in E|\dim\mathscr{H}(t)=n\}$，及 $\mathscr{H}_n$ 是固定的 n 维 Hilbert 空间. 则存在 $u(\cdot)$，使得：1) 对任意的 $t\in E_n$，$u(t)$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 到 $\mathscr{H}_n$ 上的酉算子，$\forall n$；2) $\xi(\cdot)\in\Theta$，当且仅当，对任意的 n 及 $\eta\in\mathscr{H}_n$，$\langle u(t)\xi(t), \eta\rangle_n$ 是 E_n 上的可测函数，这里 $\langle\ ,\ \rangle_n$ 是 $\mathscr{H}_n$ 中的内积.

证. 设 $\{\eta_n(\cdot)\}$ 是场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规范基，又设 $\{\eta_k^{(n)}|1\leqslant k\leqslant n\}$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的直交规范基，$\forall n$，于是如命 $u(t)\eta_k(t)=\eta_k^{(n)}$，$\forall t\in E_n$ 及 $1\leqslant k\leqslant n$，则 $u(\cdot)$ 满足 1). 此外，$\xi(\cdot)\in\Theta$，当且仅当，$\langle\xi(t), \eta_n(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数，$\forall n$，由此即见 2). 证毕.

命题 11.1.6 设 $\mathscr{H}_0$ 是可数无穷维的 Hilbert 空间，$\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上 Hilbert 空间的可测场，则存在 $u(\cdot)$，使得对每个 $t\in E$，$u(t)$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 到 $\mathscr{H}_0$ 中的等距算子，并且 $t\to u(t)\mathscr{H}(t)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 到 $W(\mathscr{H}_0)$ 中的 Borel 映象，这里 $W(\mathscr{H}_0)$ 的 Borel 构造如命题 10.1.8. 此外，$\xi(\cdot)\in\Theta$，当且仅当，$\langle u(t)\xi(t), \eta\rangle_0$ 是 E 上的可测函数，$\forall\eta\in\mathscr{H}_0$. 反之，如果 $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 E 上的 Hilbert 空间场，对每个 $t\in E$，有 $\mathscr{H}(t)$ 到 $\mathscr{H}_0$ 中的等距算子 $u(t)$，使得 $t\to u(t)\mathscr{H}(t)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 到 $W(\mathscr{H}_0)$ 中的 Borel 映象，则场 $(\mathscr{H}(\cdot), \Theta)$ 是可测的，这里 $\Theta=\{\xi(\cdot)|\langle u(t)\xi(t), \eta\rangle_0$ 是 E 上的可测函数，$\forall\eta\in\mathscr{H}_0\}$.

证. 设 $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上的可测场，$\{\eta_n(\cdot)\}$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$

的直交规范基，$\{\eta_n\}$是 $\mathscr{H}_0$ 的直交规范基，对任意的 $t\in E$，命

$$u(t)\eta_n(t)=\eta_n,\quad \text{如果 } n\leqslant \dim\mathscr{H}(t);$$
$$u(t)\eta_n(t)=0,\quad \text{如果 } n>\dim\mathscr{H}(t)$$

即见 $u(t)$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 到 $\mathscr{H}_0$ 中的等距算子. 如果 p_n 是 $\mathscr{H}_0$ 到 $[\eta_1,\cdots,\eta_n]$ 上的投影，则对任意的 $\eta\in\mathscr{H}_0$，

$$\|\eta+u(t)\mathscr{H}(t)\|_0=\|(1-p_n)\eta\|_0,\quad \forall t\in E_n.$$

因此，$\|\eta+u(t)\mathscr{H}(t)\|_0$ 是 E 上的可测函数，依命题 10.1.8，$t\to u(t)\mathscr{H}(t)$ 是 E 到 $W(\mathscr{H}_0)$ 的 Borel 映象. 又由

$$\langle u(t)\xi(t),\eta\rangle_0=\sum_n\langle\xi(t),\eta_n(t)\rangle_t\cdot\langle u(t)\eta_n(t),\eta\rangle_0$$

及

$$\langle\xi(t),\eta_n(t)\rangle_t=\begin{cases}0, & \text{如果 } n>\dim\mathscr{H}(t);\\ \langle u(t)\xi(t),\eta_n\rangle_0, & \text{如果 } n\leqslant\dim\mathscr{H}(t),\end{cases}$$

可见 $\xi(\cdot)\in\Theta$，当且仅当，$\langle u(t)\xi(t),\eta\rangle_0$ 是 E 上的可测函数，$\forall\eta\in\mathscr{H}_0$。

反之，设对任意的 $t\in E$，$u(t)$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 到 $\mathscr{H}_0$ 中的等距算子，使得 $t\to u(t)\mathscr{H}(t)$ 是 E 到 $W(\mathscr{H}_0)$ 的 Borel 映象. 命 $p(t)$ 是 $\mathscr{H}_0$ 到 $u(t)\mathscr{H}(t)$ 上的投影，$\forall t\in E$，对任意的 $\xi\in\mathscr{H}_0$，由于 $\|\xi+u(t)\mathscr{H}(t)\|_0=\|(1-p(t))\xi\|_0$ 是 E 上的可测函数，再依极化公式，可见 $\langle p(t)\xi,\eta\rangle_0$ 是 E 的可测函数，$\forall\xi,\eta\in\mathscr{H}_0$.

设 $\{\xi_n\}$ 是 $\mathscr{H}_0$ 的可数稠集，令 $\xi_n(t)=u(t)^*p(t)\xi_n$，$\forall t\in E$ 及 n. 由于 $\langle\xi_n(t),\xi_m(t)\rangle_t=\langle p(t)\xi_n,\xi_m\rangle_0$ 是 E 上的可测函数，$\forall n,m$，从而用 $\{\xi_n(\cdot)\}$，$\mathscr{H}(\cdot)$是 E 上的可测场. 这时，$\xi(\cdot)\in\Theta$，当且仅当，$\langle\xi(t),\xi_n(t)\rangle_t=\langle u(t)\xi(t),\xi_n\rangle_0$ 是 E 上的可测函数，$\forall n$. 但 $\{\xi_n\}$ 在 $\mathscr{H}_0$ 中稠，因此，$\xi(\cdot)\in\Theta$，当且仅当，对任意的 $\eta\in\mathscr{H}_0$，$\langle u(t)\xi(t),\eta\rangle_0$ 是 E 上的可测函数. 证毕.

定义 11.1.7 设 $(E,\mathscr{B})$ 是 Borel 空间，ν 是 $\mathscr{B}$ 上的测度，$\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E,\mathscr{B})$ 上 Hilbert 空间的可测场，记

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \int_E^{\oplus} \mathscr{H}(t) d\nu(t) \\ &= \left\{ \xi(\cdot) \in \Theta \,\middle|\, \int_E \|\xi(t)\|_t^2 d\nu(t) < \infty \right\}.\end{aligned}$$

命题 11.1.8 在 $\mathscr{H}$ 中定义内积

$$\langle \xi(\cdot), \eta(\cdot) \rangle = \int_E \langle \xi(t), \eta(t) \rangle_t d\nu(t),$$

则 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间。此外，如果 $\xi_n(\cdot) \xrightarrow{\mathscr{H}} \xi(\cdot)$，则有子列 $\{n_k\}$，使得 $\|\xi_{n_k}(t) - \xi(t)\|_t \to 0$, $p.p.\ \nu$.

证. 设 $\{\xi_n(\cdot)\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的基本列，取子列 $\{n_k\}$，使得 $\sum_k \|\xi_{n_{k+1}}(\cdot) - \xi_{n_k}(\cdot)\| < \infty$. 记

$$\alpha_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \|\xi_{n_{k+1}}(t) - \xi_{n_k}(t)\|_t.$$

它自然是 E 上的非负可测函数，并且

$$\left(\int \alpha_N(t)^2 d\nu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \|\xi_{n_{k+1}}(\cdot) - \xi_{n_k}(\cdot)\|, \quad \forall N.$$

因此，$\alpha(t) = \sum_k \|\xi_{n_{k+1}}(t) - \xi_{n_k}(t)\|_t \in L^2(E, \mathscr{B}, \nu)$. 特别地，有 $F \in \mathscr{B}$, $\nu(F) = 0$, 而 $\alpha(t) < \infty$, $\forall t \notin F$. 命

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_{n_{k+1}}(t) - \xi_{n_k}(t)), & \text{如果 } t \notin F; \\ 0, & \text{如果 } t \in F. \end{cases}$$

于是，$\xi_{n_k}(t) \to \xi(t)$, $p.p.\nu$. 显然 $\xi(\cdot) \in \Theta$. 此外，

$$\begin{aligned}&\left(\int \|\xi(t)\|_t^2 d\nu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \|\xi_{n_1}(\cdot)\| + \sum_k \|\xi_{n_{k+1}}(\cdot) - \xi_{n_k}(\cdot)\| < \infty.\end{aligned}$$

因此，$\xi(\cdot) \in \mathscr{H}$. 又 $\|\xi_{n_k}(\cdot) - \xi(\cdot)\| \leqslant \sum_{j \geqslant k} \|\xi_{n_{j+1}}(\cdot) -$

$\xi_{n_j}(\cdot)\| \to 0$，从而，$\|\xi(\cdot)-\xi(\cdot)\| \to 0$．　证毕．

命题 11.1.9　设$(E, \mathscr{B})$，ν，$\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{H}$如前，并且$\{\eta_n(\cdot)\}$是场$\mathscr{H}(\cdot)$的直交规范基，则

1) $\xi(\cdot) \in \mathscr{H}$，当且仅当，$\sum_n \int_E |\langle \xi(t), \eta_n(t)\rangle_t|^2 d\nu(t) < \infty$；

2) 对任意的$\xi(\cdot)$，$\eta(\cdot) \in \mathscr{H}$，有

$$\langle \xi(\cdot), \eta(\cdot)\rangle = \sum_n \int \langle \xi(t), \eta_n(t)\rangle_t \cdot \langle \eta_n(t), \eta(t)\rangle_t d\nu(t);$$

3) 对任意的$\xi(\cdot) \in \mathscr{H}$，依$\mathscr{H}$中的范数，有$\xi(\cdot) = \sum_n \xi_n(\cdot)$

这里 $\xi_n(t) = \langle \xi(t), \eta_n(t)\rangle_t \eta_n(t)$，$\forall t \in E$ 及 n；

4) 如果$\mathfrak{M}$是 $L^2(E, \mathscr{B}, \nu)$ 的完全子集，则 $\{(f\eta_n)(\cdot) | f \in \mathfrak{M}, n\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的完全子集．

证明是显然的．

命题 11.1.10　设 $\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{K}(\cdot)$ 是$(E, \mathscr{B})$上 Hilbert 空间的可测场，则存在唯一的方式使得 $(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})(\cdot)$ 成为可测场，同时 $(\xi \otimes \eta)(\cdot) \in \Theta((\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})(\cdot))$，$\forall \xi(\cdot) \in \Theta(\mathscr{H}(\cdot))$，$\eta(\cdot) \in \Theta(\mathscr{K}(\cdot))$，这里 $(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})(t) = \mathscr{H}(t) \otimes \mathscr{K}(t)$，$(\xi \otimes \eta)(t) = \xi(t) \otimes \eta(t)$，　$\forall t \in E$．

证．设 $\{\xi_n(\cdot)\}$，$\{\eta_m(\cdot)\}$ 分别是 $\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{K}(\cdot)$ 的可测矢场基本列，如果用 $\{(\xi_n \otimes \eta_m)(\cdot)\}_{n,m}$ 作基本矢场列，$(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})(\cdot)$将成为可测场，并使得 $(\xi \otimes \eta)(\cdot) \in \Theta((\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})(\cdot))$，$\forall \xi(\cdot) \in \Theta(\mathscr{H}(\cdot))$，$\eta(\cdot) \in \Theta(\mathscr{K}(\cdot))$．反之，若 $(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})(\cdot)$ 是满足要求的可测场，则 $\{(\xi_n \otimes \eta_m)(\cdot)\}$ 将是可测矢场基本列，因此，方式是唯一的．　证毕．

命题 11.1.11　设 $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上的可测场，$\mathscr{H}_0$是可分的 Hilbert 空间，ν是$\mathscr{B}$上的测度，则有唯一的同构 Φ：$\int_E^\oplus \mathscr{H}(t) d\nu(t) \otimes \mathscr{H}_0 \to \int_E^\oplus (\mathscr{H}(t) \otimes \mathscr{H}_0) d\nu(t)$，使得$(\Phi(\xi(\cdot) \otimes$

$\eta))(t)=\xi(t)\otimes\eta$，$\forall t\in E$，这里 $\mathscr{H}(\cdot)\otimes\mathscr{H}_0$ 理解为 $\mathscr{H}(\cdot)$ 与定常场 $\mathscr{H}_0$ 的张量积(命题 11.1.10)。

证。自然地定义 Φ，只须证明其值域为整个的 $\int_E^\oplus(\mathscr{H}(t)\otimes\mathscr{H}_0)d\nu(t)$。设 $\{\xi_n(\cdot)\}$ 是场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规范基，$\{\eta_m\}$是 $\mathscr{H}_0$ 的直交规范基，易见 $\{t\to\xi_n(t)\otimes\eta_m\}$ 是场 $\mathscr{H}(\cdot)\otimes\mathscr{H}_0$ 的直交规范基。依命题 11.1.9，

$$\{t\to f(t)\xi_n(t)\otimes\eta_m\,|\,n,\ m,\ f\in L^2(E,\mathscr{B},\nu)\}$$

将是 $\int_E^\oplus(\mathscr{H}(t)\otimes\mathscr{H}_0)d\nu(t)$ 的完全子集，又显然它包含于 Φ 的值域之中，从而得证。

例。$L^2(E,\mathscr{B},\nu)\otimes\mathscr{H}_0=\int_E^\oplus\mathscr{H}_0d\nu(t)=L^2(E,\mathscr{B},\nu,\mathscr{H}_0)$，这里 $\mathscr{H}_0$ 是可分的 Hilbert 空间。事实上，$L^2(E,\mathscr{B},\nu)=\int_E^\oplus\mathbb{C}d\nu(t)$，再依命题 11.1.11 即见。

注 本节见参考文献 [21]，[27]，[83]。

§2. 算子的可测场

定义 11.2.1 设 $(E,\mathscr{B})$ 是 Borel 空间，$\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{K}(\cdot)$ 是 E 上 Hilbert 空间的可测场，由 $\mathscr{H}(\cdot)$ 到 $\mathscr{K}(\cdot)$ 的算子场 $a(\cdot)$ 称为可测的，指对每个 $t\in E$，$a(t)$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 到 $\mathscr{K}(t)$ 中的有界线性算子，并且对任意的 $\xi(\cdot)\in\Theta(\mathscr{H}(\cdot))$，$a(\cdot)\xi(\cdot)\in\Theta(\mathscr{K}(\cdot))$。

命题 11.2.2 由 $\mathscr{H}(\cdot)$ 到 $\mathscr{K}(\cdot)$ 的算子场 $a(\cdot)$ 是可测的，当且仅当，$\langle a(t)\xi_n(t),\eta_m(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数，$\forall n$，m，这里 $\{\xi_n(\cdot)\}$，$\{\eta_m(\cdot)\}$ 分别是 $\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{K}(\cdot)$ 的可测矢场基本列，此外，这时 $\|a(t)\|_t$ 是 E 上的可测函数。

证。必要性显然。反之，则 $a^*(\cdot)\eta_m(\cdot)\in\Theta(\mathscr{H}(\cdot))$，$\forall m$，于是对任意的 $\xi(\cdot)\in\Theta(\mathscr{H}(\cdot))$，$\langle a(t)\xi(t),\eta_m(t)\rangle_t=\langle\xi(t),$

$a^*(t)\eta_m(t)\rangle_t$ 是 E 上的可测函数，$\forall m$，从而，$a(\cdot)\xi(\cdot)\in\Theta(\mathscr{K}(\cdot))$，即场 $a(\cdot)$ 是可测的。

此外，如果 $\{\xi_n(\cdot)\}$，$\{\eta_m(\cdot)\}$ 分别是场 $\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{K}(\cdot)$ 的直交规范基，则

$$\|a(t)\|_t=\sup\left\{\left(\sum_n|\alpha_n|^2\cdot\sum_m|\beta_m|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.\times\left|\left\langle a(t)\sum_n\alpha_n\xi_n(t),\sum_m\beta_m\eta_m(t)\right\rangle_t\right|\right\},$$

这里 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_m\}$ 跑遍复有理数，因此，$\|a(t)\|_t$ 是 E 上的可测函数。 证毕。

命题 11.2.3 设 $a(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 到 $\mathscr{K}(\cdot)$ 的算子可测场，并且 $\|a(t)\|_t$ 关于 ν 是本质有界的，这里 ν 是 $\mathscr{B}$ 上的测度，则 $a=\int_E^{\oplus}a(t)d\nu(t)$ 是 $\mathscr{H}=\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 到 $\mathscr{K}=\int_E^{\oplus}\mathscr{K}(\cdot)d\nu(t)$ 中的有界线性算子，这里 $a\xi(\cdot)=a(\cdot)\xi(\cdot)$，$\forall\xi(\cdot)\in\mathscr{H}$。此外，如果 ν 是半有限的[1]，则 $\|a\|=\text{ess sup}\|a(t)\|_t$。

证。设 $\lambda=\text{ess sup}\|a(t)\|_t$，则对任意的 $\xi(\cdot)\in\mathscr{H}$，由于 $\|a(t)\xi(t)\|_t\leqslant\lambda\|\xi(t)\|_t$，$p.p.\nu$，因此，$\|a\|\leqslant\lambda$。

今若 ν 还是半有限的。对任意的 $\varepsilon>0$，则 $F=\{t\in E\times|\|a(t)\|_t\geqslant\lambda-\varepsilon\}$ 不是 ν-零集，于是有 $G\in\mathscr{B}$，$G\subset F$，$0<\nu(G)<\infty$。如果 $\{\xi_n(\cdot)\}$ 是场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规范基，α_n 是复有理数，$f\in L^\infty(E,\mathscr{B},\nu)$，则 $\sum_n(\alpha_nf\chi_G\xi_n)(\cdot)\in\mathscr{H}$，并且

$$\left\|a\sum_n(\alpha_nf\chi_G\xi_n)(\cdot)\right\|^2\leqslant\|a\|^2\cdot\left\|\sum_n(\alpha_nf\chi_G\xi_n)(\cdot)\right\|^2,$$ 由于 f 是任意的，可见

$$\left\|a(t)\sum_n\alpha_n\chi_G(t)\xi_n(t)\right\|_t$$
$$\leqslant\|a\|\cdot\left\|\sum_n\alpha_n\chi_G(t)\xi_n(t)\right\|_t,\quad p.p.\nu.$$

---

1) 指对任意的 $F\in\mathscr{B}$，如果 $\nu(F)>0$，则有 $G\in\mathscr{B}$，$G\subset F$，并且 $0<\nu(G)<\infty$。

于是 $\|a(t)\|_t \leqslant \|a\|$，$p.p.\nu$ 于 G。所以，$\|a\| \geqslant \lambda - \varepsilon$，但 ε 是任意的，因此，$\|a\| = \operatorname{ess\,sup}\|a(t)\|_t$。　证毕。

例. 设 $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上的可测场，$\mathscr{H}_0$ 是可数无穷维的 Hilbert 空间，依命题 11.1.6，有 $\mathscr{H}(\cdot)$ 到定常场 $\mathscr{H}_0$ 的等距算子可测场 $u(\cdot)$。如果 ν 是 $\mathscr{B}$ 上的测度，则 $u = \int_E^{\oplus} u(t)d\nu(t)$ 是 $\mathscr{H} = \int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 到 $\int_E^{\oplus}\mathscr{H}_0 d\nu = L^2(E, \mathscr{B}, \nu)\otimes\mathscr{H}_0$ 中的等距算子。

定义 11.2.4　$\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 到 $\int_E^{\oplus}\mathscr{K}(t)d\nu(t)$ 中的有界线性算子 a 称为分解的，指存在 $\mathscr{H}(\cdot)$ 到 $\mathscr{K}(\cdot)$ 的算子可测场 $a(\cdot)$，使得 $a = \int_E^{\oplus} a(t)d\nu(t)$。显然，场 $a(\cdot)$ 由 $a(p.p.\nu)$ 唯一地决定。

命题 11.2.5　设 ν 半有限，$a_n = \int_E^{\oplus} a_n(t)d\nu(t)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$。

1) 如果依强算子拓扑，$a_n \to a_0$，$F \in \mathscr{B}$，并且 $\nu(F) < \infty$，则存在子列 $\{n_k\}$，使得对于 $p.p.\nu$ 的 $t \in F$，有 $a_n(t) \xrightarrow{\text{强算子}} a_0(t)$；

2) 如果对于 $p.p.\nu$ 的 t，依强算子拓扑，$a_n(t) \to a_0(t)$，又若 $\sup\limits_n\|a_n\| < \infty$，则 $a_n \xrightarrow{\text{强算子}} a_0$。

证. 1) 设 $\{\xi_m(\cdot)\}$ 是场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规范基，于是 $(\chi_F\xi_m)(\cdot) \in \mathscr{H}$，$\|a_n(\chi_F\xi_m(\cdot) - a_0(\chi_F\xi_m)(\cdot)\| \to 0$，$\forall m$。依命题 11.1.8，有子列 $\{n_k\}$，使得

$$\|a_{n_k}(t)\xi_m(t) - a_0(t)\xi_m(t)\|_t \to 0, \quad p.p.\nu \text{ 的 } t \in F, \ \forall m,$$

但 $\{\xi_m(t)\}_m$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 的完全子集，且无妨设 $\|a_n(t)\|_t \leqslant \operatorname{spu}\limits_m\|a_m\|$，$\forall t \in E$ 及 n，因此，$a_{n_k}(t) \xrightarrow{\text{强算子}} a_0(t)$，$p.p.\nu$ 于 F。

2) 无妨设 $\sup\{\|a_n(t)\|_t, \|a_n\| \mid t \in E, n\} = K$。对任意的 $\xi(\cdot) \in \mathscr{H}$，由于 $f_n(t) = \|a_n(t)\xi(t) - a_0(t)\xi(t)\|_t^2 \to 0$，$p.p.\nu$，

$|f_n(t)|^2 \leqslant 4K^2\|\xi(t)\|_t^2 \in L^1(E, \mathscr{B}, \nu)$，依控制收敛定理，$\|a_n\xi(\cdot) - a_0\xi(\cdot)\|^2 = \int f_n(t)d\nu(t) \to 0$。 证毕。

命题 11.2.6 设 ν 半有限，则存在 $\mathscr{H} = \int_E^\oplus \mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 中的分解算子列 $\left\{a_n = \int_E^\oplus a_n(t)d\nu(t) \middle| n\right\}$，使得对每个 $t \in E$，$\{a_n(t)|n\}$ 生成 $B(\mathscr{H}(t))$。

证。设 $E_k = \{t \in E | \dim \mathscr{H}(t) = k\}$，$k = \infty, 0, 1, \cdots$，依命题 11.1.5，存在 $u(\cdot)$，使得对每个 $t \in E_k$，$u(t)$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 到 $\mathscr{H}_k$ 上的酉算子，这里 $\mathscr{H}_k$ 是 k 维的 Hilbert 空间，$\forall k$，并且矢场 $\xi(\cdot) \in \Theta$，当且仅当，$\langle u(t)\xi(t), \eta\rangle_k$ 是 E_k 上的可测函数，$\forall \eta \in \mathscr{H}_k$，$k$。

取 $\{b_n^{(k)}\}_n \subset B(\mathscr{H}_k)$，且 $\|b_n^{(k)}\| \leqslant 1$，$\forall n$，使得 $\{b_n^{(k)}\}_n$ 生成 $B(\mathscr{H}_k)$，$\forall k$. 定义

$$a_n(t) = u(t)^* b_n^{(k)} u(t), \quad \forall t \in E_k, k, n,$$

自然 $\|a_n(t)\| \leqslant 1$，并且 $\{a_n(t)\}_n$ 生成 $B(\mathscr{H}(t))$，$\forall t \in E$。今只须证明对每个 n，算子场 $a_n(\cdot)$ 是可测的。

设 $\{\xi_n(\cdot)\}$ 是场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规范基，同时对每个 $t \in E_k$，$\{u(t)\xi_n(t) = \xi_n^{(k)} | 1 \leqslant n \leqslant k\}$ 是 $\mathscr{H}_k$ 的直交规范基（见命题 11.1.5）。当然 $u(t)\xi_n(t) = 0, \forall t \in E_k, n > k$。于是，$\langle a_n(t)\xi_i(t), \xi_j(t)\rangle_t$ 在每个 E_k 上是常数，$\forall i, j$。这即说明场 $a_n(\cdot)$ 是可测的，$\forall n$。 证毕。

定义 11.2.7 设 $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上的可测场，ν 是 $\mathscr{B}$ 上的测度。于是对任意的 $f \in L^\infty(E, \mathscr{B}, \nu)$，可以决定 $\mathscr{H} = \int_E^\oplus \mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 中的分解算子

$$m_f = \int_E^\oplus f(t)d\nu(t),$$

即 $m_f\xi(\cdot) = f(\cdot)\xi(\cdot)$，$\forall \xi(\cdot) \in \mathscr{H}$，$m_f$ 称为相应于 f 的对角算子。全体对角算子 $Z = \{m_f | f \in L^\infty(E, \mathscr{B}, \nu)\}$，称为 $\mathscr{H}$ 中

的对角算子代数。

命题 11.2.8 设 ν 半有限，则 $f\to m_f$ 是一一的，当且仅当，$\nu(E_0)=0$，这里 $E_0=\{t\in E\mid \dim\mathscr{H}(t)=0\}$，即 $\mathscr{H}(t)\neq 0$, $p.p.\nu$。并且这时 $\|m_f\|=\|f\|$, $\forall f\in L^\infty(E,\mathscr{B},\nu)$。

由命题 11.2.3 立见。

命题 11.2.9 设 $(E,\mathscr{B},\nu)$ 是全 σ-有限的测度空间，$\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E,\mathscr{B})$ 上的可测场，则 $\mathscr{H}=\int_E^\oplus \mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 中的对角算子代数 Z 是交换的 vN 代数，Z' 是 σ-有限的，并且 $f\to m_f$ 是 w^*-代数 $L^\infty(E,\mathscr{B},\nu)$ 忠实的 w^*-表示。

证. 设网 $\{f_l\}_l$ $(\subset L^\infty(E,\mathscr{B},\nu))$ 依弱 * 拓扑收敛于 0，$\xi_n(\cdot)$, $\eta_n(\cdot)\in\mathscr{H}$，并且 $\sum\limits_n(\|\xi_n(\cdot)\|^2+\|\eta_n(\cdot)\|^2)<\infty$，于是

$$\left|\sum_n\langle\xi_n(t),\eta_n(t)\rangle_t\right|$$
$$\leqslant\sum_n\|\xi_n(t)\|_t\cdot\|\eta_n(t)\|_t\in L^1(E,\mathscr{B},\nu)$$

及

$$\left|\sum_n\langle m_{f_l}\xi_n(\cdot),\eta_n(\cdot)\rangle\right|$$
$$=\left|\int_E f_l(t)\cdot\sum_n\langle\xi_n(t),\ \eta_n(t)\rangle_t d\nu(t)\right|\to 0,$$

即 $\{m_{f_l}\}$ 依 $\sigma(B(\mathscr{H}),\ T(\mathscr{H}))$ 收敛于 0. 因此，$f\to m_f$ 是 $L^\infty(E,\mathscr{B},\nu)$ 忠实的 w^*-表示，特别地，Z 是 $\mathscr{H}$ 中交换的 vN 代数。

今设 $E=\bigcup\limits_n E_n$，这里 $\nu(E_n)<\infty$, $\forall n$，及 $\{\xi_n(\cdot)\}$ 是场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规范基. 依命题 11.1.9，

$$\{m_f\chi_{E_n}(\cdot)\xi_m(\cdot)\mid n,m,\ f\in L^\infty(E,\mathscr{B},\nu)\}$$

将是 $\mathscr{H}$ 的完全子集，因此，Z 在 $\mathscr{H}$ 中有循环矢列，即 Z' 是 σ-有

限的。证毕。

定理 11.2.10 设 $(E, \mathscr{B}, \nu)$ 是全 σ-有限的测度空间，$\mathscr{H}_i(\cdot)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上 Hilbert 空间的可测场，$i=1, 2$，则 $\mathscr{H}_1=\int_E^{\oplus}\mathscr{H}_1(t)d\nu(t)$ 到 $\mathscr{H}_2=\int_E^{\oplus}\mathscr{H}_2(t)d\nu(t)$ 中的有界线性算子 a 是分解的，必须且只须，$am_f^{(1)}=m_f^{(2)}a$，$\forall f\in L^\infty(E, \mathscr{B}, \nu)$，这里 $m_f^{(i)}$ 是 $\mathscr{H}_i$ 中相应于 f 的对角算子，$i=1, 2$。

证. 必要性显然. 今证充分性. 如命题 11.2.9 的证明中所指出的，存在 $\mathscr{H}_1(\cdot)$ 的可测矢场基本列 $\{\xi_n(\cdot)\}$，使得 $\xi_n(\cdot)\in\mathscr{H}_1$，$\forall n$。命 $\eta_n(\cdot)=a\xi_n(\cdot)\in\mathscr{H}_2$，$\forall n$。于是对任意的复有理数 α_n，$f\in L^\infty(E, \mathscr{B}, \nu)$，由 $am_f^{(1)}=m_f^{(2)}a$ 可见

$$\int_E |f(t)|^2\cdot\left\|\sum_n \alpha_n\eta_n(t)\right\|_t^2 d\nu(t)$$

$$\leqslant \|a\|^2\int_E |f(t)|^2\cdot\left\|\sum_n \alpha_n\xi_n(t)\right\|_t^2 d\nu(t)$$

f 是任意的，从而

$$\left\|\sum_n \alpha_n\eta_n(t)\right\|_t\leqslant\|a\|\cdot\left\|\sum_n \alpha_n\xi_n(t)\right\|_t, \quad \forall\alpha_n, \quad p.p.\nu.$$

因此，有 $F\in\mathscr{B}$，$\nu(F)=0$，对 $t\notin F$，我们可以定义 $\mathscr{H}_1(t)$ 到 $\mathscr{H}_2(t)$ 中的有界线性算子 $a(t)$，使得 $a(t)\xi_n(t)=\eta_n(t)$，$\forall n$。并命 $a(t)=0$，$\forall t\in F$，则 $a(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}_1(\cdot)$ 到 $\mathscr{H}_2(\cdot)$ 的算子可测场，$\|a(t)\|_t\leqslant\|a\|$，$\forall t\in E$。若命 $b=\int_E^{\oplus}a(t)d\nu(t)$，则 $bm_f^{(1)}\xi_n(\cdot)=m_f^{(2)}b\xi_n(\cdot)=m_f^{(2)}a\xi_n(\cdot)=am_f^{(1)}\xi_n(\cdot)$，$\forall n$，$f\in L^\infty(E, \mathscr{B}, \nu)$，但 $\{m_f^{(1)}\xi_n(\cdot)|n, f\in L^\infty(E, \mathscr{B}, \nu)\}$ 是 $\mathscr{H}_1$ 的完全子集，因此，$a=b=\int_E^{\oplus}a(t)d\nu(t)$。 证毕。

注 本节见参考文献 [21]，[83]，[105]。

§ 3. vN 代数的可测场

定义 11.3.1 设 $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上 Hilbert 空间的可

测场，$\mathscr{H}(\cdot)$ 中的 vN 代数场 $M(\cdot)$（即对每个 $t\in E$，$M(t)$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 中的 vN 代数）称为可测的，指存在 $\mathscr{H}(\cdot)$ 中的算子可测场列 $\{a_n(\cdot)\}_n$，使得对每个 $t\in E$，$M(t)$ 由 $\{a_n(t)\}_n$ 生成。

命题 11.3.2 $(E, \mathscr{B})$ 上定常场 $\mathscr{H}_0$ 中的 vN 代数场 $M(\cdot)$ 是可测的，当且仅当，$t\to M(t)$ 是 E 到 $\mathscr{A}$ 中的 Borel 映象，这里 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{H}_0$ 中 vN 代数的全体，而 $\mathscr{A}$ 中的 Borel 构造如定理 10.3.2.

证. 依定义 11.3.1 及命题 10.3.4 立见.

命题 11.3.3 设 $M(\cdot)$, $N(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 中 vN 代数的可测场，则 $M(\cdot)'$, $M(\cdot)\cap N(\cdot)$, $(M(\cdot)\cup N(\cdot))''$ 也都是可测场.

证. 命 $E_k=\{t\in E\,|\dim\mathscr{H}(t)=k\}$, $k=\infty, 0, 1, \cdots$. 于是在每个 E_k 上，$\mathscr{H}(\cdot)$ 可看作为定常场，再依命题 11.3.2，10.3.1，及 10.3.5 即得证.

命题 11.3.4 设 $(E, \mathscr{B}, \nu)$ 是全 σ-有限的测度空间，$\mathscr{H}=\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$, Z 是 $\mathscr{H}$ 中的对角算子代数，$\left\{a_n=\int_E^{\oplus}a_n(t)d\nu(t)\right\}_n$ 是 $\mathscr{H}$ 中一列分解的算子，M 是 $\mathscr{H}$ 中由 Z 与 $\{a_n\}_n$ 生成的 vN 代数，$a\in B(\mathscr{H})$，则 $a\in M$，当且仅当，$a=\int_E^{\oplus}a(t)d\nu(t)$ 是分解的，并且 $a(t)\in M(t)$, $p.p.\nu$，这里 $M(t)$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 中由 $\{a_n(t)\}_n$ 生成的 vN 代数，$\forall t\in E$.

证. 设 $a=\int_E^{\oplus}a(t)d\nu(t)$，并且 $a(t)\in M(t)$, $p.p.\nu$. 如果 $a'\in M'\subset Z'$，依定理 11.2.10，$a'=\int_E^{\oplus}a'(t)d\nu(t)$. 由于 a' 与 $\{a_n, a_n^*\}_n$ 交换，从而 $a'(t)\in M(t)'$, $p.p.\nu$. 由此，$a'(t)a(t)=a(t)a'(t)$, $p.p.\nu$，进而 $aa'=a'a$，即 $a\in M$.

反之设 $a\in M$. 显然 $M\subset Z'$，因此 $a=\int_E^{\oplus}a(t)d\nu(t)$. 无妨

设 $\|a(t)\|_t \leqslant \|a\|$，$\forall t\in E$。适当扩充 $\{a_n\}$，可以假定 $\{a_n\}$ 对于 $*$ 运算，算子的相加与相乘，及乘以复有理数都是封闭的，于是对每个 $t\in E$，$\{a_n(t)\}_n$ 的单位球在 $M(t)$ 的单位球中是弱算子稠的。如果 $\{\xi_k(\cdot)\}$ 是场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规范基，则易见

$$F = \{t\in E\,|\,a(t)\in M(t)\}$$

$$= \bigcap_{n,m}\bigcup_{k}\left\{t\in E\,\middle|\,\begin{array}{l}\|a_k(t)\|_t\leqslant\|a\|，\text{并且对 } 1\leqslant i, j\leqslant n \text{ 有}\\ |\langle(a(t)-a_k(t))\xi_i(t), \xi_j(t)\rangle_t| < m^{-1}\end{array}\right\}.$$

因此，$F\in\mathscr{B}$。今只须证明 $\nu(E\backslash F)=0$。若否，则有 $G\in\mathscr{B}$，$G\subset E\backslash F$，$0<\nu(G)<\infty$。命 z 是相应于 χ_G 的对角算子，它是 M 的非零中心投影。显然，$z\mathscr{H}=\int_G^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$，$Zz$ 是 $z\mathscr{H}$ 中的对角算子代数，及 Mz 由 Zz 与 $\left\{a_nz=\int_G^{\oplus}a_n(t)d\nu(t)\right\}_n$ 生成。由于 $az=\int_G^{\oplus}a(t)d\nu(t)\in Mz$，依命题 1.14.4，有列 $\left\{b_n=\int_E^{\oplus}b_n(t)d\nu(t)\right\}\subset Zz$ 与 $\{a_nz\}_n$ 生成的 $*$ 代表，依 $z\mathscr{H}$ 中强算子拓扑，$b_n\to az$。依命题 11.2.5，有子列 $\{n_k\}$，$b_{n_k}(t)\xrightarrow{\text{强算子}}a(t)$，$p.p.\nu$ 于 G。因此，$a(t)\in M(t)$，$p.p.\nu$ 于 G，矛盾。所以，$\nu(E\backslash F)=0$。　证毕。

命题 11.3.5　设 $(E, \mathscr{B}, \nu)$ 是全 σ-有限的测度空间，$M(\cdot)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上 ($\mathscr{H}(\cdot)$ 中的) vN 代数可测场，则

$$M=\left\{a=\int_E^{\oplus}a(t)d\nu(t)\in B(\mathscr{H})\,|\,a(t)\in M(t),\ p.p.\nu\right\}$$

是 $\mathscr{H}=\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 中 σ-有限的 vN 代数。

证。设 $\{a_n(\cdot)\}$ 是算子可测场列，使得 $M(t)$ 由 $\{a_n(t)\}_n$ 生成，$\forall t\in E$。无妨设 $\|a_n(t)\|\leqslant 1$，$\forall n, t$，依命题 11.3.4，M 即为 Z 与 $\{a_n\}$ 所生成之 vN 代数，这里 Z 是 $\mathscr{H}$ 中的对角算子代数，$a_n=\int_E^{\oplus}a_n(t)d\nu(t)$，$\forall n$。此外，$M\subset Z'$，依命题 11.2.9，$M$ 也是 σ-有限的。　证毕。

定义 11.3.6 设 $(E,\mathscr{B},\nu)$ 是全 σ-有限的测度空间，$\mathscr{H}(\cdot)$ 是 $(E,\mathscr{B})$ 上 Hilbert 空间可测场，$\mathscr{H}=\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 中的 vN 代数M称为分解的，指存在 $\mathscr{H}(\cdot)$ 中 vN 代数的可测场$M(\cdot)$，使得

$$M=\left\{a=\int_E^{\oplus}a(t)d\nu(t)\,|\,a(t)\in M(t),\ p.p.\nu\right\}.$$

这时，我们记 $M=\int_E^{\oplus}M(t)d\nu(t)$.

命题 11.3.7 $\mathscr{H}$中 vN 代数M是分解的，当且仅当，M由对角算子代数 Z 与一列分解算子 $\left\{a_n=\int_E^{\oplus}a_n(t)d\nu(t)\right\}_n$ 所生成. 这时相应的 $M(\cdot)$ 可取为：$M(t)$ 由 $\{a_n(t)\}_n$ 生成，$\forall t\in E$. 此外，分解的 vN 代数M所对应的 vN 代数可测场是 $(p.p.\nu)$ 唯一的，以及 $Z\subset M\subset Z'$.

证. 由命题 11.3.4，11.3.5 立见.

注. 依命题 11.2.6，$Z=\int_E^{\oplus}\mathbb{C}1_t d\nu(t)$，以及 $Z'=\int_E^{\oplus}B(\mathscr{H}(t))d\nu(t)$ 都是分解的 vN 代数.

命题 11.3.8 设 $M=\int_E^{\oplus}M(t)d\nu(t)$，$M_n=\int_E^{\oplus}M_n(t)d\nu(t)$，则 $M'=\int_E^{\oplus}M(t)'d\nu(t)$，$\left(\bigcup\limits_n M_n\right)''=\int_E^{\oplus}\left(\bigcup\limits_n M_n(t)\right)''d\nu(t)$，以及 $\bigcap\limits_n M_n=\int_E^{\oplus}\left(\bigcap\limits_n M_n(t)\right)d\nu(t)$.

证. 依命题 11.3.3，$M(\cdot)'$ 也是可测的，令 $N=\int_E^{\oplus}M(t)'d\nu(t)$，易见 $N\subset M'$. 又若 $a'\in M'$，由于 $Z\subset M\subset Z'$. 因此，$a'=\int_E^{\oplus}a'(t)d\nu(t)$. 设$M$由$Z$与$\left\{a_n=\int_E^{\oplus}a_n(t)d\nu(t)\right\}_n$生成，于是，$a'(t)$ 与 $\{a_n(t),\ a_n(t)^*\}_n$ 交换，$p.p.\nu$，即 $a'(t)\in M(t)'$，$p.p.\nu$，于是 $N=M'$.

今设 M_n 由 Z 与 $\left\{a_k^{(n)} = \int_E^{\oplus} a_k^{(n)}(t)d\nu(t)\right\}_k$ 生成，$M_n(t)$ 由 $\{a_k^{(n)}(t)\}_k$ 生成，$\forall t\in E$. 于是 $\left(\bigcup_n M_n\right)''$ 由 Z 与 $\{a_k^{(n)}\}_{n,k}$ 生成，且 $\left(\bigcup_n M_n(t)\right)''$ 由 $\{a_k^{(n)}(t)\}_{n,k}$ 生成，$\forall t\in E$，所以，$\left(\bigcup_n M_n\right)'' = \int_E^{\oplus}\left(\bigcup_n M_n(t)\right)'' d\nu(t)$. 进而，$\bigcap_n M_n =$ $\left(\bigcup_n M_n'\right)' = \int_E^{\oplus}\left(\bigcap_n M_n(t)\right)d\nu(t)$. 证毕.

命题 11.3.9 设 $M = \int_E^{\oplus} M(t)d\nu(t)$，则 $M\cap M' = Z$，当且仅当，$M(t)$ 是因子，$p.p.\nu$.

证. 由 $M\cap M' = \int_E^{\oplus}(M(t)\cap M(t)')d\nu(t)$ 及 $Z = \int_E^{\oplus}\mathbb{C}1_t d\nu(t)$ 立见.

命题 11.3.10 如果 $\mathscr{H} = \int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 是可分的，则 $\mathscr{H}$ 中的 vN 代数 M 是分解的，当且仅当，$Z\subset M\subset Z'$.

证. 只须证明充分性. 由于 $\mathscr{H}$ 可分，M 是可数生成的，因此，M 由 Z 与一列分解的算子所生成，即 M 是分解的. 证毕.

注. 如果 $(E, \mathscr{B})$ 是标准的 Borel 空间，ν 是 $\mathscr{B}$ 上 σ-有限的测度，则 $L^2(E, \mathscr{B}, \nu)$ 是可分的，再依命题 11.1.9，$\mathscr{H}$ 也是可分的.

定义 11.3.11 设 $(E, \mathscr{B})$ 是 Borel 空间，$\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{K}(\cdot)$ 是 E 上 Hilbert 空间的可测场，$M(\cdot)$，$N(\cdot)$ 分别是 $\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{K}(\cdot)$ 中的 vN 代数可测场. 设对每个 $t\in E$，$\Phi(t)$ 是 $M(t)$ 到 $N(t)$ 中的 * 同态. * 同态场 $\Phi(\cdot)$ 称为可测的，指对 $\mathscr{H}(\cdot)$ 中任意的算子可测场 $a(\cdot)$，并且 $a(t)\in M(t)$，$\forall t\in E$，则 $\Phi(\cdot)(a(\cdot))$ 是 $\mathscr{K}(\cdot)$ 中的算子可测场. 这时如果 ν 是 $\mathscr{B}$ 上的 σ-有限测度，则可定义 $M = \int_E^{\oplus} M(t)d\nu(t)$ 到 $N = \int_E^{\oplus} N(t)d\nu(t)$ 中的

$*$同态 $\Phi=\int_E^{\oplus}\Phi(t)d\nu(t)$，即若 $a=\int_E^{\oplus}a(t)d\nu(t)\in M$，$\Phi(a)=\int_E^{\oplus}\Phi(t)(a(t))d\nu(t)$.

命题 11.3.12 在定义 11.3.11 中，1) 如果 $\Phi(t)$ 是正规的，$\forall t\in E$，则 Φ 也是正规的；2)如果 $\Phi(t)$ 是 $M(t)$ 到 $N(t)$ 上的 $*$ 同构，$\forall t\in E$，则 Φ 也是 M 到 N 上的 $*$ 同构.

证. 1) 依命题 1.12.2，只须证明 Φ 是全可加的. 依命题 11.3.5，M 是 σ-有限的，因此只要对 M 的相互直交的投影列 $\{p_n\}$，证明 $\Phi(p)=\sum\limits_n\Phi(p_n)$，这里 $p=\sum\limits_n p_n$. 设 $p=\int_E^{\oplus}p(t)d\nu(t)$，$p_n=\int_E^{\oplus}p_n(t)d\nu(t)$，这里 $p(t)$，$p_n(t)\in M(t)$，$\forall t\in E$，n. 由于 $p_np_m=0$，$\forall n\neq m$，不妨认为 $p_n(t)p_m(t)=0$，$\forall t\in E$，n，m. 由于 ν 是 σ-有限的，依命题 11.2.5 及 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(t)\right\}_n$ 是递增的，因此，$\sum\limits_n p_n(t)=p(t)$，$p.p.\nu$. 再由 $\Phi(t)$ 是正规的及命题11.2.5，

$$\Phi(p)=\int_E^{\oplus}\sum_n\Phi(t)(p_n(t))d\nu(t)$$

$$=\sum_n\int_E^{\oplus}\Phi(t)(p_n(t))d\nu(t)=\sum_n\Phi(p_n);$$

2) 设 M 由 $\mathscr{H}$ 中的对角算子代数 $Z_{\mathscr{H}}$ 与分解算子列 $\left\{a_n=\int_E^{\oplus}a_n(t)d\nu(t)\right\}_n$ 生成，$M(t)$ 由 $\{a_n(t)\}_n$ 生成，$\forall t\in E$. 由于 Φ 把 $Z_{\mathscr{H}}$ 变成 $\mathscr{K}$ 中的对角算子代数 $Z_{\mathscr{K}}$，因此，$\Phi(M)$ 将由 $Z_{\mathscr{K}}$ 与 $\left\{\Phi(a_n)=\int_E^{\oplus}\Phi(t)(a_n(t))d\nu(t)\right\}_n$ 生成. 但 $\{\Phi(t)(a_n(t))\}_n$ 生成 $N(t)$，$\forall t\in E$. 因此，$\Phi(M)=N$. 此外，Φ 自然是一一的. 证毕.

注 本节见参考文献 [21]，[26]，[27]，[83]，[105].

§4. Hilbert 空间分解为 Hilbert 积分

命题 5.3.14 指出，如果 Z 是$\mathscr{H}$中的交换 vN 代数，并且有循环矢，则在 Z 的谱空间 Ω（紧 Hausdorff 空间）上有正则 Borel 测度 ν，及$\mathscr{H}$到 $L^2(\Omega, \nu)$ 上的酉算子 u，使得 $\mathrm{supp}\nu = \Omega$，$L^\infty(\Omega, \nu) = C(\Omega)$，$um_fu^* = \hat{m}_f$，$\forall f \in L^\infty(\Omega, \nu)$，这里 $f \to m_f$ 是 $C(\Omega)$ 到 Z 上的 * 同构，$\hat{m}_f$ 是 $L^2(\Omega, \nu)$ 中乘以 f 的算子。如果使用 Hilbert 积分的语言，$L^2(\Omega, \nu) = \int_\Omega^\oplus \mathbb{C} d\nu$，$\{\hat{m}_f | f \in L^\infty(\Omega, \nu)\}$ 正是 $\int_\Omega^\oplus \mathbb{C} d\nu$ 中的对角算子代数。

上面的情形当然不是我们所感兴趣的（因依命题 5.3.15，$Z' = Z$）。今设 Z 是 Hilbert 空间$\mathscr{H}$中交换的 vN 代数，并且有循环矢列 $\{\xi_n\}$（等价于 Z' σ-有限）。命

$$\eta_1 = \xi_1, \quad \mathscr{H}_1 = \overline{Z\eta_1}, \quad p_1: \mathscr{H} \to \mathscr{H}_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\eta_n = \xi_n - \sum_{k=1}^{n-1} p_k \xi_n, \quad \mathscr{H}_n = \overline{Z\eta_n}, \quad p_n: \mathscr{H} \to \mathscr{H}_n,$$

$$\cdots\cdots$$

易见 $p_i p_j = 0$，$\forall i \neq j$；$\sum_{i=1}^\infty p_i = 1$；$p_i \in Z'$，$\forall i$。

无妨设 $\|\xi_n\| \leqslant 1$，于是 $\|\eta_n\| \leqslant 1$，$\forall n$，令 $\eta_0 = \sum_{n=1}^\infty 2^{-\frac{n}{2}} \eta_n$，则 η_0 是 Z' 的循环矢。

设 Ω 是 Z 的谱空间，令 ν_n 是 Ω 上的正则 Borel 测度，使得

$$\langle m_f \eta_n, \eta_n \rangle = \int_\Omega f(t) d\nu_n(t), \quad \forall f \in C(\Omega).$$

这里 $f \to m_f$ 是 $C(\Omega)$ 到 Z 上的 * 同构，$n = 0, 1, 2, \cdots$。今记 $\nu = \nu_0$，显然 $\nu = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \nu_n$。于是存在 $h_n \in L^1(\Omega, \nu)$，$h_n \geqslant$

0，使得 $\nu_n = h_n \cdot \nu$，$n = 1, 2, \cdots$.

对任意的 $t \in \Omega$，定义 Hilbert 空间 $\mathscr{H}(t)$，它有直交规范基 $\{\zeta_n(t) | n$ 使得 $h_n(t) > 0\}$。为方便计，如果 n 使得 $h_n(t) = 0$，则认为 $\zeta_n(t)$ 是 $\mathscr{H}(t)$ 的零元。由于 $\langle \zeta_n(t), \zeta_m(t) \rangle_t = \delta_{nm} \chi_{\mathrm{supp} h_n}(t)$ 是 Ω 上的可测函数，$\forall n, m$，因此，$\mathscr{H}(\cdot)$ 是 Ω 上以 $\{\zeta_n(\cdot)\}_n$ 为可测矢场基本列的 Hilbert 空间可测场. 我们说 $\mathscr{H}(t) \neq \{0\}$，$p.p.\nu$. 事实上，若有 Ω 的 Borel 子集 E，使得 $\nu(E) > 0$，而 $\mathscr{H}(t) = 0$，$\forall t \in E$. 于是 $h_n(t) = 0$，$\forall t \in E$，及 n。由此，$\nu_n(E) = 0$，$\forall n$. 但 $\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \nu_n(E)$，这便发生矛盾. 所以，$\mathscr{H}(t) \neq \{0\}$，$p.p.\nu$.

记 $\hat{\mathscr{H}} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathscr{H}(t) d\nu(t)$，定义 u: $\mathscr{H} \to \hat{\mathscr{H}}$，

$$u m_f \eta_n = f(\cdot) h_n(\cdot)^{\frac{1}{2}} \zeta_n(\cdot), \quad \forall f \in C(\Omega) \text{ 及 } n.$$

易见 u 可扩张为 $\mathscr{H}$ 到 $\hat{\mathscr{H}}$ 中的等距算子. 如果 $\zeta(\cdot) \in \hat{\mathscr{H}}$，使得 $\langle f(\cdot) h_n(\cdot)^{\frac{1}{2}} \zeta_n(\cdot), \zeta(\cdot) \rangle = 0$，$\forall f$，$n$. 于是对 $p.p.\nu$ 及 n，$h_n(t)^{\frac{1}{2}} \langle \zeta_n(t), \zeta(t) \rangle_t = 0$. 依 $\{\zeta_n(\cdot)\}$ 的定义，$\zeta(t) = 0$，$p.p.\nu$. 从而 u 是 $\mathscr{H}$ 到 $\hat{\mathscr{H}}$ 上的酉算子. 同时易见 $u m_f u^* = \hat{m}_f$，这里 $\hat{m}_f$ 是 $\hat{\mathscr{H}}$ 中相应于 f 的对角算子，$\forall f \in C(\Omega)$. 此外，在定理 5.3.1 的证明中已指出，$\mathrm{supp}\nu = \Omega$，$C(\Omega) = L^\infty(\Omega, \nu)$. 因此，我们有

定理 11.4.1 设 Z 是 $\mathscr{H}$ 中交换的 vN 代数，并且 Z' 是 σ-有限的，如果 Ω 是 Z 的谱空间，则在 Ω 上有正则 Borel 测度 ν，Hilbert 空间的可测场 $\mathscr{H}(\cdot)$，及 $\mathscr{H}$ 到 $\hat{\mathscr{H}} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathscr{H}(t) d\nu(t)$ 上的酉算子 u，使得

$$\mathscr{H}(t) \neq \{0\}, \ p.p.\nu, \ \mathrm{supp}\nu = \Omega, \ L^\infty(\Omega, \nu) = C(\Omega),$$

$$u m_f u^* = \hat{m}_f, \quad \forall f \in L^\infty(\Omega, \nu).$$

这里 $f \to m_f$ 是 $C(\Omega)$ 到 Z 上的 $*$ 同构，$\hat{m}_f$ 是 $\hat{\mathscr{H}}$ 中相应于 f 的对角算子. 特别地，$uZu^* = \hat{Z}$，这里 $\hat{Z}$ 是 $\hat{\mathscr{H}}$ 中的对角算子代数.

定理 11.4.2 设$\mathscr{H}$是可分的 Hilbert 空间，M，Z是$\mathscr{H}$中的 vN 代数，并且 $Z \subset M \cap M'$，则在实轴$\mathbb{R}$上存在有限的 Borel 测度 ν，Hilbert 空间可测场 $\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{H}(\cdot)$ 中的 vN 代数可测场 $M(\cdot)$，及$\mathscr{H}$到 $\hat{\mathscr{H}} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 上的酉算子 u，使得

$$uZu^* = \hat{Z}, \quad uMu^* = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} M(t)d\nu(t).$$

这里 $\hat{Z}$ 是$\hat{\mathscr{H}}$中的对角算子代数. 此外，如果 $Z = M \cap M'$，则 $M(t)$ 是因子，$p.p.\nu$.

证. 依定理 5.3.7，Z 可以由一个自伴元 a 生成. 设A是由 $\{a, 1\}$ 生成的交换 c^*-代数，则A在Z中是弱算子稠，并且A的谱空间是 $\sigma(a)$. 仿照定理 11.4.1 的证明，只是代替那里的Ω为A的谱空间，同样有 ν，$\mathscr{H}(\cdot)$，及 u: $\mathscr{H} \to \hat{\mathscr{H}} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathscr{H}(t)\,d\nu(t)$，使得 $um_fu^* = \hat{m}_f$，$\forall f \in C(\Omega)$，这里 $f \to m_f$ 是 $C(\Omega)$ 到A上的$*$同构.

依定理 11.4.1 的证明，并注意引理 5.4.4，可见 $\nu \succ \nu_\xi$，$\forall \xi \in \mathscr{H}$，这里 ν_ξ 定义为

$$\langle m_f\xi, \xi \rangle = \int_{\Omega} f(t)d\nu_\xi(t), \ \forall f \in C(\Omega),$$

由于 $\operatorname{supp}\nu = \Omega$，可以把 $C(\Omega)$ 一一嵌入 $L^\infty(\Omega, \nu)$ 之中，并且由于 $\nu \succ \nu_\xi$，可见 $f \to m_f$ 也是 $C(\Omega)$ 到A上 $\sigma(L^\infty, L^1)$-弱算子连续的映象. 由此，$f \to m_f$ 可扩充为 $L^\infty(\Omega, \nu)$ 到Z上的$*$同构. 从而 $uZu^* = \hat{Z}$. 此外，由 $Z \subset M \cap M'$，$Z \subset M \subset Z'$，因此，$\hat{Z} \subset uMu^* \subset \hat{Z}'$. 又$\hat{\mathscr{H}}$是可分的，因此，$uMu^* = \int_{\Omega}^{\oplus} M(t)d\nu(t)$.

今注意 $\Omega = \sigma(a)$，再将 ν，$\mathscr{H}(\cdot)$，$M(\cdot)$ 平凡地扩张到$\mathbb{R}$上，即满足要求.

最后，如果 $Z = M \cap M'$，则 $\hat{Z} = (uMu^*) \cap (uMu^*)'$，依命题 11.3.9，$M(t)$ 是因子，$p.p.\nu$. 证毕.

定理 11.4.3 设Ω是局部紧 Hausdorff 空间，并且Ω是它紧子集的可数并，ν_i是Ω上正则 Borel 测度，$\mathscr{H}_i(\cdot)$ 是Ω上非零

的 Hilbert 空间可测场，$i=1,2$。如果有 $\mathscr{H}_1=\int_\Omega^\oplus \mathscr{H}_1(t)dv_1(t)$ 到 $\mathscr{H}_2=\int_\Omega^\oplus \mathscr{H}_2(t)dv_2(t)$ 上的酉算子 u，使得 $um_f^{(1)}u^*=m_f^{(2)}$，$\forall f\in C_0^\infty(\Omega)$，这里 $m_f^{(i)}$ 是 $\mathscr{H}_i$ 中相应于 f 的对角算子，$i=1,2$，则 $v_1\sim v_2$，并且存在 $\mathscr{H}_1(\cdot)$ 到 $\mathscr{H}_2(\cdot)$ 的算子可测场 $v(\cdot)$，使得 $v(t)$ 是 $\mathscr{H}_1(t)$ 到 $\mathscr{H}_2(t)$ 上的酉算子，$p.p.v_1$，以及 $u=wv$，这里 $v=\int_\Omega^\oplus v(t)dv_1(t)$，$w$ 是 $\int_\Omega^\oplus \mathscr{H}_2(t)dv_1(t)$ 到 $\mathscr{H}_2$ 上的正则同构，即若 $v_2=\rho\cdot v_1$，那么

$$w\xi(\cdot)=(\rho^{-\frac{1}{2}}\xi)(\cdot),\quad \forall \xi(\cdot)\in\int_\Omega^\oplus \mathscr{H}_2(t)dv_1(t).$$

证. 设 K 是 Ω 的紧子集，并且 $v_1(K)=0$。由于 $\mathscr{H}_2(\cdot)$ 非零，可取 $\mathscr{H}_2(\cdot)$ 的可测矢场 $\eta(\cdot)$，而 $\|\eta(t)\|_t=1$，$\forall t\in\Omega$。又命 U 是 K 的开邻域，且 $\overline{U}$ 紧，于是，$(\chi_U\eta)(\cdot)\in\mathscr{H}_2$。记 $\xi(\cdot)=u^*(\chi_U\eta)(\cdot)\ (\in\mathscr{H}_1)$。对任意的 $\varepsilon>0$，由于 $v_1(K)=0$，可取开集 V，使得

$$K\subset V\subset U,\quad \int_V \|\xi(t)\|_t^2dv_1<\varepsilon.$$

今作 $f\in C_0^\infty(\Omega)$，使得 $0\leqslant f\leqslant 1$，$f(t)=1$，$\forall t\in K$，$f(t)=0$，$\forall t\notin V$。于是

$$\begin{aligned}v_2(K)&\leqslant\int f^2(t)dv_2(t)=\int\|(f\eta)(\cdot)\|_t^2dv_2(t)\\&=\|u^*m_f^{(2)}(\chi_U\eta)(\cdot)\|_{\mathscr{H}_1}^2=\|m_f^{(1)}\xi(\cdot)\|_{\mathscr{H}_1}^2<\varepsilon.\end{aligned}$$

ε 是任意的，因此 $v_2(K)=0$，即 $v_2\prec v_1$。进而，$v_1\sim v_2$。

今记 $\tilde{\mathscr{H}}_2=\int_\Omega^\oplus \mathscr{H}_2(t)dv_1(t)$，则 $\tilde{m}_f=vm_f^{(1)}v^*$，这里 $v=w^*u$，$\tilde{m}_f$ 是 $\tilde{\mathscr{H}}_2$ 中相应于 f 的对角算子，$\forall f\in C_0^\infty(\Omega)$。由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^\infty(\Omega,v_1)$ 中是弱 * 稠的，依定理 11.2.10，$v=\int_\Omega^\oplus v(t)dv_1(t)$。又 v 是 $\mathscr{H}_1$ 到 $\tilde{\mathscr{H}}_2$ 上的酉算子，因此，$v(t)$ 是 $\mathscr{H}_1(t)$ 到 $\mathscr{H}_2(t)$ 上的酉算子，$p.p.v_1$。 证毕.

引理 11.4.4 设 $(E_i,\mathscr{B}_i)$ 是标准的 Borel 空间，v_i 是 $\mathscr{B}_i$

上 σ-有限的测度，$i=1,2$. 如果存在 $L^\infty(E_1, \mathscr{B}_1, \nu_1)$ 到 $L^\infty(E_2, \mathscr{B}_2, \nu_2)$ 上的 * 同构 π，则有 $F_i \in \mathscr{B}_i$，$i=1,2$，及 $(E_2 \backslash F_2)$ 到 $(E_1 \backslash F_1)$ 上的 Borel 同构 Φ，使得

$$\nu_1(F_1) = \nu_2(F_2) = 0, \quad \nu_1 \sim \nu_2 \circ \Phi^{-1},$$

并且对任意的 $g \in L^\infty(E_1, \mathscr{B}_1, \nu_1)$，$p.p.\nu_2$ 于 $(E_2 \backslash F_2)$ 上有

$$\pi(g)(t) = g(\Phi(t)).$$

证. 无妨设 ν_1, ν_2 是有限的，再依定理 9.3.16，除去平凡的情形外，又可设 $E_1 = E_2 = [0,1]$，而 $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$ 是 $[0,1]$ 的 Borel 子集全体，以及 ν_1, ν_2 是 $[0,1]$ 上的概率测度. 令 $f_1(t) = t \in L^\infty(E_1, \nu_1)$，$f_2 = \pi(f_1)$. 自然可设 $0 \leqslant f_2(t) \leqslant 1$，$\forall t \in E_2$. 于是，$\Phi(t) = f_2(t)$ 是 E_2 到 E_1 的 Borel 映象.

函数 $1\ (\in L^1(E_2, \nu_2))$ 决定 $L^\infty(E_2, \nu_2)$ 上忠实的正规态 ω_2，即 $\omega_2(g) = \int_0^1 g(t) d\nu_2(t)$，$\forall g \in L^\infty(E_2, \nu_2)$. 于是，$\omega_1 = \omega_2 \circ \pi$ 也是 $L^\infty(E_1, \nu_1)$ 上忠实的正规态. 因此有唯一的 $f \in L^1(E_1, \nu_1)$，使得 $\omega_1(g) = \int_0^1 f(t) g(t) d\nu_1(t)$，$\forall g \in L^\infty(E_1, \nu_1)$. 无妨设 $f(t) > 0$，$\forall t \in E_1$.

如果 $p(\cdot)$ 是多项式，则对 $t \in E_2$，

$$\pi(p(f_1))(t) = p(f_2)(t) = p(\Phi(t)).$$

如果 $g \in C[0,1]$，取多项式列 p_n，使得 $p_n(t) \to g(t)$，对 $t \in [0,1]$ 一致. 从而在 $L^\infty(E_2, \nu_2)$ 中，$\pi(p_n(f_1))(t) = p_n(\Phi(t)) \to \pi(g)(t)$. 又 $p_n(\Phi(t)) \to g(\Phi(t))$. 由此，$\pi(g)(t) = g(\Phi(t))$，$p.p.\nu_2$. 所以，对任意的 $g \in C[0,1]$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t) f(t) d\nu_1(t) &= \omega_1(g) = \omega_2(\pi(g)) \\ &= \int_0^1 g(\Phi(t)) d\nu_2(t),\end{aligned}$$

如果记 $\Phi(\nu_2) = \nu_2 \circ \Phi^{-1}$，则 $\Phi(\nu_2) = f \cdot \nu_1$.

今设 $g \in L^\infty(E_1, \nu_1)$，可取 $g_n \in C[0,1]$，使得 $g_n \xrightarrow{\tau} g$. 于是，$\int_0^1 |\pi(g_n)(t) - \pi(g)(t)|^2 d\nu_2(t) = \omega_2(\pi((g-g_n)^*(g-g_n))) =$

$\omega_1((g_n-g)^*(g_n-g))=\int_0^1 f(t)|g_n(t)-g(t)|^2 d\nu_1(t)\to 0$. 由于 $f(t)>0$, $\forall t$, 因此有子列 $\{n_k\}$,使得

$$g_{n_k}(t)\to g(t),\ p.p.\nu_1,\quad \pi(g_{n_k})(t)\to\pi(g)(t),\ p.p.\nu_2,$$

已指出 $\pi(g_{n_k})(t)=g_{n_k}(\Phi(t))$ $p.p.\nu_2$, $\forall k$, 因此, $g_{n_k}(\Phi(t))\to\pi(g)(t)$, $p.p.\nu_2$. 另一方面,由 $g_{n_k}(t)\to g(t)$, $p.p.\nu_1$, 及 $\Phi(\nu_2)=f\cdot\nu_1$, $g_{n_k}(\Phi(t))\to g(\Phi(t))$, $p.p.\nu_2$. 所以,

$$\pi(g)(t)=g(\Phi(t)),\quad p.p.\nu_2,\quad \forall g\in L^\infty(E_1,\nu_1).$$

同样讨论 π^{-1}: $L^\infty(E_2,\nu_2)\to L^\infty(E_1,\nu_1)$, 则有 E_1 到 E_2 的 Borel 映象 Ψ,使得 $\Psi(\nu_1)=\nu_1\circ\Psi^{-1}$ 关于 ν_2 是绝对连续的, 并且 $\pi^{-1}(h)(t)=h(\Psi(t))$, $p.p.\nu_1$, $\forall h\in L^\infty(E_2,\nu_2)$. 因此,

$$\begin{cases}(g\circ\Phi)(\Psi(t))=\pi^{-1}(\pi(g))(t)\\ \qquad\qquad\qquad=g(t),\quad p.p.\nu_1,\quad \forall g\in L^\infty(E_1,\nu_1);\\ (h\circ\Psi)(\Phi(t))=\pi(\pi^{-1}(h))(t)\\ \qquad\qquad\qquad=h(t),\quad p.p.\nu_2,\quad \forall h\in L^\infty(E_2,\nu_2).\end{cases}$$

特别地,由 $t\in L^\infty(E_1,\nu_1)\cap L^\infty(E_2,\nu_2)$, 可见

$$\Phi\circ\Psi(t)=t,\ p.p.\nu_1,\quad \Psi\circ\Phi(t)=t,\ p.p.\nu_2,$$

于是有 $F_2'\in\mathscr{B}_2$, $\nu_2(F_2')=0$, 使得 $\Psi\circ\Phi(t)=t$, $\forall t\in E_2\backslash F_2'$. 令 $F_1'=\Psi^{-1}(F_2')$,由于 $\nu_1\circ\Psi^{-1}$ 关于 ν_2 是绝对连续的,因此,$\nu_1(F_1')=0$. 易见

$$\Psi(E_1\backslash F_1')=E_2\backslash F_2',\quad \Phi(E_2\backslash F_2')\subset E_1\backslash F_1',\tag{1}$$

并且 Φ 在 $(E_2\backslash F_2')$ 上是一一的. 进而取 $F_1''\in\mathscr{B}_1$, $F_1''\subset E_1\backslash F_1'$, $\nu_1(F_1'')=0$, 使得

$$\Phi\circ\Psi(t)=t,\quad \forall t\in E_1\backslash F_1,\tag{2}$$

这里 $F_1=F_1'\cup F_1''$, 自然 $\nu_1(F_1)=0$. 令 $F_2''=\Phi^{-1}(F_1'')\cap(E_2\backslash F_2')$,由于 $\nu_2\circ\Phi^{-1}$ 关于 ν_1 是绝对连续的,因此, $\nu_2(F_2'')=0$. 进而 $\nu_2(F_2)=0$, 这里 $F_2=F_2'\cup F_2''=F_2'\cup\Phi^{-1}(F_1'')$. 于是, Φ 一一地把 $(E_2\backslash F_2)$ 映入 $(E_1\backslash F_1)$ 之中.

今若 $t\in E_1\backslash F_1$, 依(1), $\Psi(t)\in E_2\backslash F_2'$. 如果 $\Psi(t)\in F_2''\subset\Phi^{-1}(F_1'')$, 于是, $\Phi\circ\Psi(t)\in F_1''$. 但依(2), $\Phi\circ\Psi(t)=t\notin F_1$, 矛

盾．因此，$\Psi(t)\in E_2\backslash F_2$．进而依(2)，有 $\Phi(E_2\backslash F_2)=E_1\backslash F_1$．依定理9.3.12与命题9.3.15，$\Phi$ 是 $(E_2\backslash F_2)$ 到 $(E_1\backslash F_1)$ 上的 Borel 同构，其逆 Borel 同构是 Ψ．再由 $\nu_2\circ\Phi^{-1}\prec\nu_1$，$\nu_1\circ\Psi^{-1}\prec\nu_2$，可见在 $(E_1\backslash F_1)$ 上，$\nu_1\sim\nu_2\circ\Phi^{-1}$．　证毕．

定理 11.4.5　设 $(E_i,\mathscr{B}_i)$ 是标准的 Borel 空间，ν_i 是 $\mathscr{B}_i$ 上 σ-有限的测度，$\mathscr{H}_i(\cdot)$ 是 E_i 上非零的 Hilbert 空间可测场，$M_i(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}_i(\cdot)$ 中 vN 代数的可测场，Z_i 是 $\mathscr{H}_i=\int_{E_i}^{\oplus}\mathscr{H}_i(t)d\nu_i(t)$ 中的对角算子代数，$i=1,2$．如果有 $\mathscr{H}_1$ 到 $\mathscr{H}_2$ 上的酉算子 u，使得

$$uM_1u^*=M_2,\quad uZ_1u^*=Z_2,$$

这里 $M_i=\int_{E_i}^{\oplus}M_i(t)d\nu_i(t)$，$i=1,2$，则有 $F_i\in\mathscr{B}_i$，$\nu_i(F_i)=0$，$i=1,2$，$(E_2\backslash F_2)$ 到 $(E_1\backslash F_1)$ 上的 Borel 同构 Φ，及酉算子的可测场 $u(\cdot)$：$\mathscr{H}_1(\cdot)\to\mathscr{H}_2(\Phi^{-1}(\cdot))$，使得：

1) $u(t)M_1(t)u(t)^*=M_2(\Phi^{-1}(t))$，$\forall t\in E_1\backslash F_1$；

2) $\Phi(\nu_2)=\nu_2\circ\Phi^{-1}\sim\nu_1$；

3) $u=\int_{E_1\backslash F_1}^{\oplus}\sqrt{\frac{d\Phi(\nu_2)}{d\nu_1}(t)}\,u(t)d\nu_1(t)$．

证．依命题11.2.8，$uZ_1u^*=Z_2$ 产生一个由 $L^\infty(E_1,\mathscr{B}_1,\nu_1)$ 到 $L^\infty(E_2,\mathscr{B}_2,\nu_2)$ 上的 $*$ 同构 π．依引理11.4.4，有 $F_i\in\mathscr{B}_i$，$\nu_i(F_i)=0$，$i=1,2$，及 $(E_2\backslash F_2)$ 到 $(E_1\backslash F_1)$ 上的 Borel 同构 Φ，使得 $\Phi(\nu_2)\sim\nu_1$，$\pi(g)(t)=g(\Phi(t))$，$p.p.\nu_2$ 于 $(E_2\backslash F_2)$，$\forall g\in L^\infty(E_1,\mathscr{B}_1,\nu_1)$．略去 F_1，F_2 不计，并代替 ν_1 以 $\Phi(\nu_2)$，在 Borel 同构 Φ 之下，可以把 $(E_1,\mathscr{B}_1,\nu_1)$ 与 $(E_2,\mathscr{B}_2,\nu_2)$ 等同起来．从而情况变为：$(E,\mathscr{B})$ 是标准的 Borel 空间，ν 是 $\mathscr{B}$ 上 σ-有限的测度，$\mathscr{H}_i(\cdot)$ 是 $(E,\mathscr{B})$ 上 Hilbert 空间的可测场，$i=1,2$，u 是 $\mathscr{H}_1=\int_E^{\oplus}\mathscr{H}_1(t)d\nu(t)$ 到 $\mathscr{H}_2=\int_E^{\oplus}\mathscr{H}_2(t)d\nu(t)$ 上的酉算子，使得

$$uM_1u^* = M_2, \quad um_f^{(1)}u^* = m_f^{(2)}, \quad \forall f \in L^\infty(E, \mathscr{B}, \nu),$$

这里 $M_i = \int_E^\oplus M_i(t)d\nu(t)$，$m_f^{(i)}$ 是 $\mathscr{H}_i$ 中相应于 f 的对角算子，$i = 1, 2$。依定理 11.2.10，$u = \int_E^\oplus u(t)d\nu(t)$，其中 $u(t)$ 是 $\mathscr{H}_1(t)$ 到 $\mathscr{H}_2(t)$ 上的酉算子，$p.p.\nu$。依命题 11.3.7，有 $\mathscr{H}_1$ 中的分解算子列 $\left\{a_n = \int_E^\oplus a_n(t)d\nu(t)\right\}_n$，使得 M_1 由 Z_1 与 $\{a_n\}$ 生成，并且 $M_1(t)$ 由 $\{a_n(t)\}_n$ 生成，$p.p.\nu$。于是，M_2 由 Z_2 与 $\{ua_nu^*\}_n$ 生成，以及 $M_2(t)$ 将由 $\{u(t)a_n(t)u(t)^*\}_n$ 生成，$p.p.\nu$。因此，$M_2(t) = u(t)M_1(t)u(t)^*$，$p.p.\nu$。 证毕。

注 本节见参考文献 [21]，[84]，[105]。

§5. 分解 vN 代数与其分量的关系

设 $(E, \mathscr{B})$ 是标准的 Borel 空间，ν 是 $\mathscr{B}$ 上 σ-有限测度，$\mathscr{H}(\cdot)$ 是 Hilbert 空间可测场，$\mathscr{H} = \int_E^\oplus \mathscr{H}(t)d\nu(t)$，$M = \int_E^\oplus M(t)d\nu(t)$ 是 $\mathscr{H}$ 中分解的 vN 代数，我们来讨论 M 与 $\{M(t)\}$ 之间的类型关系。

命题 11.5.1 设 $p = \int_E^\oplus p(t)d\nu(t)$，$p' = \int_E^\oplus p'(t)d\nu(t)$ 分别是 M，M' 的投影，则

$$M_p = \int_E^\oplus M(t)_{p(t)}d\nu(t), \qquad M_{p'} = \int_E^\oplus M(t)_{p'(t)}d\nu(t),$$

$$c(p) = \int_E^\oplus c(p(t))d\nu(t).$$

证. M_p，$M_{p'}$ 的分解表式由命题 11.3.7 立见.

设 $\{\xi_n(\cdot)\}$ 是可测矢场的基本列，M 由 Z 与 $\left\{a_n = \int_E^\oplus a_n(t)d\nu(t)\right\}_n$ 生成，并且 $\{a_n(t)\}_n$ 生成 $M(t)$，$\forall t$。 经过适当处理，

可以认为 $\{a_n(t)\}_n$ 在 $M(t)$ 中是强算子稠的，于是 $\{a_n(t)p(t)\xi_m(t)|n, m\}$ 是 $c(p(t))\mathscr{H}(t)$ 的完全子集，$\forall t$. 用命题 11.1.2 的方法，从 $\{a_n(t)p(t)\xi_m(t)\}_{n,m}$ 可以构造出 $c(p(\cdot))\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规格基 $\{\eta_k(\cdot)\}$. 自然 $\{\eta_k(\cdot)\}$ 仍然是可测矢场列，从而

$$\langle c(p(t))\xi_n(t), \xi_m(t)\rangle_t = \sum_k \langle \xi_n(t), \eta_k(t)\rangle_t \cdot \langle \eta_k(t), \xi_m(t)\rangle_t$$

是 E 上的可测函数，$\forall n, m$，即算子场 $c(p(\cdot))$ 是可测的. 记 $z = \int_E^\oplus c(p(t))d\nu(t)$. 如果 $\xi(\cdot) \in \mathscr{H}$，显然

$$za_n p\xi(\cdot) = a_n p\xi(\cdot), \quad \forall n.$$

因此，$z \geq c(p)$. 今写 $c(p) = \int_E^\oplus q(t)d\nu(t)$，这里 $q(t)$ 是 $M(t)$ 的中心投影，$\forall t$. 由于 $c(p)a_n p = a_n p$，$\forall n$，因此，$q(t)a_n(t)p(t) = a_n(t)p(t)$，$p.p.\nu$，$\forall n$，即 $q(t) \geq c(p(t))$，$p.p.\nu$，从而 $c(p) \geq z$. 所以，$c(p) = \int_E^\oplus c(p(t))d\nu(t)$. 证毕.

命题 11.5.2 如果M是离散的，则 $M(t)$ 也是离散的，$p.p.\nu$.

证. 依定理 6.7.1，M 有交换投影 $p = \int_E^\oplus p(t)d\nu(t)$，使得 $c(p) = 1_{\mathscr{H}}$. 依命题 11.5.1，对 $p.p.\nu$ 的 t，$p(t)$ 也将是 $M(t)$ 的交换投影，并且中心复盖是 $1_{\mathscr{H}(t)}$. 所以，$M(t)$ 也是离散的. 证毕.

命题 11.5.3 如果M是真无限的，则 $M(t)$ 也是真无限的，$p.p.\nu$.

证. 由定理 6.4.4 立见.

命题 11.5.4 如果 $M(t)$ 是有限的，$p.p.\nu$，则M也是有限的.

证. 由有限 vN 代数的定义立见.

命题 11.5.5 如果M是连续的，则 $M(t)$ 也是连续的，$p.p.\nu$.

证. 设 $E_k = \{t \in E | \dim\mathscr{H}(t) = k\}$，$z_k$ 是相应于 χ_{E_k} 的对角算子，当然是M的中心投影，并且 Mz_k 是连续的，及 $Mz_k =$

$\int_{E_k}^{\oplus} M(t)d\nu(t)$, $\forall k$. 从而，无妨设 $\mathscr{H}(\cdot)=\mathscr{H}_0$ 是 E 上的定常场。

设 M，M' 分别由对角算子代数 Z 与 $\left\{a_n=\int_E^{\oplus} a_n(t)d\nu(t)\right\}_n$，$\left\{a'_n=\int_E^{\oplus} a'_n(t)d\nu(t)\right\}_n$ 生成，并且 $\|a_n\|$，$\|a_n(t)\|$，$\|a'_n(t)\|$ 都 $\leqslant 1$，$\forall t, n$，以及 $M(t)$ 由 $\{a_n(t)\}_n$ 生成，$M(t)'$ 由 $\{a'_n(t)\}_n$ 生成，$\{a_n(t)\}_n^* = \{a_n(t)\}_n$，$\{a'_n(t)\}_n^* = \{a'_n(t)\}_n$，$\forall t$。

设 S 是 $B(\mathscr{H}_0)$ 的单位球，依强算子拓扑，它是 Polish 空间。考虑 $S\times E$ 的子集 G，$(a, t)\in G$ 指：1) $aa'_n(t)=a'_n(t)a$，$\forall n$；2) a 是非零投影；3) 对任意的 m，n，$aa_n(t)aa_m(t)a = aa_m(t)aa_n(t)a$。注意命题 9.3.14，$G$ 将是 $S\times E$ 的 Borel 子集。令 π 是 $S\times E$ 到 E 上的投影映象，依定理 9.4.5，有 E 的 Borel 子集 $F\subset \pi G$，及 F 到 S 中的 Borel 映象 $p(\cdot)$，使得 $(\pi G\backslash F)$ 包含于某个 ν-零集之中，并且 $(p(t), t)\in G$，$\forall t\in F$。

如果命 $p(t)=0$，$\forall t\in E\backslash F$，$p=\int_E^{\oplus} p(t)d\nu(t)$，则 p 将是 M 的交换投影。但 M 是连续的，因此，$p=0$，$\nu(F)=0$。因此，$\pi(G)=\{t\in E \mid M(t)$ 不是连续的$\}$ 包含于某个 ν-零集之中，即 $M(t)$ 是连续的，$p.p.\nu$。　证毕。

命题 11.5.6　如果 M 是纯无限的，则 $M(t)$ 也是纯无限的，$p.p.\nu$。

证。与命题 11.5.5 一样，可设 $\mathscr{H}(\cdot)=\mathscr{H}_0$ 是定常场，$\{a_n, a_n(t), a'_n, a'_n(t)\}$，$S$ 等也与命题 11.5.5 一样。又命 $(\mathscr{H}_0)_\infty$ 是 $\mathscr{H}_0$ 的可数无穷的 Hilbert 直和，考虑 $S\times(\mathscr{H}_0)_\infty\times E$ 的子集 G，$(a, (\eta_k), t)\in G$ 指：1) $aa'_n(t)=a'_n(t)a$，$\forall n$；2) a 是非零投影；3) $a\eta_k=\eta_k$，$\forall k$；4) $\sum_k \|\eta_k\|^2=1$；5) 对任意的正整数有限集 Λ_1，Λ_2，

$$\sum_k \left\langle\left(a\prod_{n\in\Lambda_1} a_n(t)a\prod_{n\in\Lambda_2} a_n(t)a\right.\right.$$

$$- a \prod_{n \in \Lambda_2} a_n(t) a \prod_{n \in \Lambda_1} a_n(t) a \Big) \eta_k, \eta_k \Big\rangle = 0,$$

易见G是 Borel 子集。令π是 $S \times (\mathscr{H}_0)_\infty \times E$ 到E上的投影映象，依定理 9.4.5，有E的 Borel 子集 $F \subset \pi G$，及F到S，$(\mathscr{H}_0)_\infty$ 的 Borel 映象 $p(\cdot)$，$(\eta_k(\cdot))$，使得 $(\pi G \backslash F)$ 包含于某个 ν-零集之中，及对任意的 $t \in F$，

$$(p(t), (\eta_k(t)), t) \in G.$$

如果对 $t \notin F$，令 $p(t) = 0$，$\eta_k(t) = 0$，$\forall k$。于是，$p = \int_E^\oplus p(t) d\nu(t)$ 是M的投影。无妨设 $\nu(E) < \infty$，则 $\xi_k = \eta_k(\cdot) \in \mathscr{H}$，$p\xi_k = \xi_k$，$\forall k$，及 $\sum_k \|\xi_k\|^2 = \nu(F)$。依作法，$\sum_k \langle \cdot\, \xi_k, \xi_k \rangle$ 将是 M_p 上的正规迹。但M是纯无限的，因此，$\nu(F) = 0$，即 πG 包含于某个 ν-零集之中。此外，易见 $\pi G = \{t \in E \mid M(t)$ 不是纯无限的$\}$，所以，$M(t)$ 纯无限，$p.p.\nu.$ 证毕。

命题 11.5.7 如果M是有限的，则 $M(t)$ 也是有限的，$p.p.\nu.$

证。同样设 $\mathscr{H}(\cdot) = \mathscr{H}_0$，$a_n$，$a_n(t)$，$a_n'$，$a_n'(t)$，$S$ 等。考虑 $S \times E$ 的子集 G，$(v, t) \in G$ 指：1) $v a_n'(t) = a_n'(t) v, \forall n$；2) $v^* v = 1$，$v v^* \neq 1$。易见G是 Borel 子集。于是有E的 Borel 子集 $F \subset \pi G$，这里π是 $S \times E$ 到E上的投影映象，及 Borel 映象 $v(\cdot)$：$F \to S$，使得$(\pi G \backslash F)$包含于某个 ν-零集之中，$(v(t), t) \in G$，$\forall t \in F$。

命 $v(t) = 0$，$\forall t \notin F$，$v = \int_E^\oplus v(t) d\nu(t)$，则 $v^* v = p$ 是相应于 χ_F 的对角算子。由于 M_p 也是有限的，又 $v(t) v(t)^* \neq 1$，$\forall t \in F$，因此，$\nu(F) = 0$。进而可见 $M(t)$ 是有限的，$p.p.\nu.$ 证毕。

命题 11.5.8 如果M是半有限的，则 $M(t)$ 也是半有限的，$p.p.\nu.$

证。M包含有限投影 $p = \int_E^\oplus p(t) d\nu(t)$，并且 $c(p) = 1$。依命题 11.5.1 及 11.5.7，$p(t)$ 是 $M(t)$ 的有限投影，并且 $c(p(t)) =$

1_t, $p.p.\nu$. 因此，$M(t)$ 也是半有限的，$p.p.\nu$. 证毕.

定理 11.5.9 设(E, B)是标准的 Borel 空间，ν 是$\mathscr{B}$上 σ-有限测度，$\mathscr{H}(\cdot)$是 E 上 Hilbert 空间可测场，$\mathscr{H}=\int_E^\oplus \mathscr{H}(t)d\nu(t)$，$M=\int_E^\oplus M(t)d\nu(t)$ 是$\mathscr{H}$中分解的 vN 代数. 如果 $z=\int_E^\oplus z(t)d\nu(t)$ 是M的最大中心投影，使得 Mz 是有限的，或者半有限的，或者离散的，则 $z(t)$ 也是 $M(t)$ 的最大的中心投影，使得 $M(t)z(t)$ 是有限的，或者半有限的，或者离散的，$p.p.\nu$.

证. 由 $Mz=\int_E^\oplus M(t)z(t)d\nu(t)$，$M(1-z)=\int_E^\oplus M(t)\times(1-z(t))d\nu(t)$，命题 11.5.3，11.5.7，11.5.8，11.5.6，11.5.2，11.5.5 立见.

定理 11.5.10 设 $(E, \mathscr{B})$ 是标准的 Borel 空间，ν 是$\mathscr{B}$上 σ-有限测度，$\mathscr{H}(\cdot)$是E上 Hilbert 空间可测场，$\mathscr{H}=\int_E^\oplus \mathscr{H}(t)d\nu(t)$，$M=\int_E^\oplus M(t)d\nu(t)$ 是$\mathscr{H}$中分解的 vN 代数，则M是有限的、半有限的、真无限的、纯无限的、离散的、或者连续的，必须且只须，$M(t)$ 是有限的、半有限的、真无限的、纯无限的、离散的、或者连续的，$p.p.\nu$.

证. 由前面的讨论立见.

注 本节见参考文献 [15]，[21]，[83]，[100].

§6 算子的和 vN 代数的定常场

引理 11.6.1 设A是有单位元的可分 c^*-代数，$\mathscr{H}_0$是可分的 Hilbert 空间，令

$\mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0)=\{\pi \mid \pi$ 是A在$\mathscr{H}_0$中的非退化$*$表示$\}$ 赋予 $\mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0)$ 以这样的拓扑：$\pi_l\to\pi$ 指

$$\|\pi_l(a)\xi-\pi(a)\xi\|\to 0,\quad \forall a\in A,\ \xi\in\mathscr{H}_0,$$

则 $\mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0)$ 是 Polish 空间.

证. 设 $\{a_n\}$, $\{\xi_m\}$ 分别是 A, $\mathscr{H}_0$ 单位球的可数稠集, 对任意的 $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0)$,定义

$$d(\pi_1, \pi_2) = \sum_{n,m} 2^{-(n+m)}\|(\pi_1(a_n) - \pi_2(a_n))\xi_m\|.$$

今只须证明 $(\mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0), d)$ 是可分的. 命

$$J = \{(n, m) | n, m = 1, 2, \cdots\},$$

$$E = \left\{f: J \to \mathscr{H}_0 \,\middle|\, \sum_{n,m} 2^{-(n+m)}\|f(n, m)\| < \infty\right\},$$

对任意的 $f \in E$, 定义 $\|f\| = \sum_{n,m} 2^{-(n+m)}\|f(n,m)\|$,易见$(E,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间,并且由于 $\mathscr{H}_0$ 是可分的, 它也是可分的. 此外, 对任意的 $\pi \in \mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0)$, 令

$$f_\pi(n, m) = \pi(a_n)\xi_m, \quad \forall n, m,$$

则 $\pi \to f_\pi$ 是 $(\mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0), d)$ 到 $(E, \|\cdot\|)$ 中的等距映象, 因此, $(\mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0), d)$ 也是可分的. 证毕.

引理 11.6.2 设$(E, \mathscr{B})$是 Borel 空间,则映象 $\Phi:(E, \mathscr{B}) \to \mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0)$ 是 Borel 的, 当且仅当, $\langle \Phi(t)(a)\xi, \eta\rangle$ 是 E 上的可测函数, $\forall a \in A$, $\xi, \eta \in \mathscr{H}_0$, 这里 $\mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0)$, 如引理 11.6.1 所述.

证. 只须证明充分性. 依引理 11.6.1, $(\mathrm{Rep}(A, \mathscr{H}_0), d)$ 有可数稠集 $\{\pi_n\}$,从而只要对任意的 n, m,指出 $\Phi^{-1}(\{\pi | d(\pi, \pi_n) < m^{-1}\}) \in \mathscr{B}$. 但这由

$$\begin{aligned}
&\Phi^{-1}(\{\pi | d(\pi, \pi_n) < m^{-1}\}) \\
&= \left\{t \in E \,\middle|\, \sum_{i,j} 2^{-(i+j)}\|(\pi_n(a_i) - \Phi(t)(a_i))\xi_j\| < m^{-1}\right\} \\
&= \left\{t \in E \,\middle|\, \sum_{i,j} 2^{-(i+j)}\sup_k |\langle(\pi_n(a_i) - \Phi(t)(a_i))\xi_j, \xi_k\rangle| \right. \\
&\qquad \left. < m^{-1}\right\}
\end{aligned}$$

及充分性条件立见. 证毕.

定理 11.6.3 设 $(E, \mathscr{B})$ 是 Borel 空间, $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 E 上 Hilbert 空间可测场, Λ 是任意的指标集, 对每个 $l \in \Lambda$, $a_l(\cdot)$ 是

$\mathscr{H}(\cdot)$ 中算子的可测场. 又设 $\mathscr{H}_0$ 是可分的 Hilbert 空间, 以及对每个 $t\in E$, 有 $\mathscr{H}(t)$ 到 $\mathscr{H}_0$ 上的酉算子 $u(t)$, 使得 $u(t)a_l(t)u(t)^*=b_l$, 这里 $b_l\in B(\mathscr{H}_0)$, $\forall l\in\Lambda$, 则有 $\mathscr{H}(\cdot)$ 到定常场 $\mathscr{H}_0$ 的酉算子可测场 $v(\cdot)$, 使得 $v(t)a_l(t)v(t)^*=b_l$, $\forall t\in E$, $l\in\Lambda$.

证. 无妨设 $\mathscr{H}(\cdot)$ 就是定常场 $\mathscr{H}_0$. 于是对任意的 ξ, $\eta\in\mathscr{H}_0$, $l\in\Lambda$, $\langle u(t)^*b_lu(t)\xi,\eta\rangle$ 是 E 上的可测函数. 命 M 是 $\{b_l\}_{l\in\Lambda}$ 生成的 vN 代数, 对任意的 $b\in M$, 由于 $\mathscr{H}_0$ 可分, 有 $b_n\xrightarrow{\text{强算子}}b$, 这里 b_n 是 $\{b_l,b_l^*\}$ 有限积的复有理系数的线性组合, 因此, 对任意的 $\xi,\eta\in\mathscr{H}_0$, $\langle u(t)^*bu(t)\xi,\eta\rangle$ 是 E 上的可测函数.

自然 M 是可数生成的, 因此有包含 $\mathscr{H}_0$ 中恒等算子的可分 c^*-代数 A, 它在 M 中强算子稠. 记 G 是 $\mathscr{H}_0$ 中酉算子的全体, 依强算子拓扑, 它是 Polish 空间(引理 10.4.1). 又命

$$H=\{u\in G|u^*au=a,\ \forall a\in A\},$$

它是 G 的闭子群. 依定理 9.4.2, 有 G 的 Borel 子集 F, 使得 F 与 Hu 的交由一个元组成, $\forall u\in G$. 对任意的 $u\in G$, 定义 A 在 $\mathscr{H}_0$ 中非退化的 * 表示 π_u: $\pi_u(a)=u^*au$, $\forall a\in A$. 显然, $u\to\pi_u$ 是 G 到 $\mathrm{Rep}(A,\mathscr{H}_0)$ 中的连续映象, 记此映象为 Ψ. 又显然 Ψ 限于 F 是一一的, 依引理 11.6.1, Ψ 将是 F 到 $\Psi(F)=\Psi(G)$ 上的 Borel 同构, 记它的逆映象为 Φ. 对任意的 $t\in E$, 令 $v(t)=\Phi\circ\Psi(u(t))$, 我们得到

$$E\xrightarrow{v(\cdot)}F\xrightarrow{\Psi(\cdot)}\Psi(F)=\Psi(G)\xrightarrow{\Phi(\cdot)}F.$$

由于对任意的 $a\in A(\subset M)$, $\xi,\eta\in\mathscr{H}_0$,

$$\begin{aligned}\langle(\Psi\circ v(t))(a)\xi,\eta\rangle&=\langle v(t)^*av(t)\xi,\eta\rangle\\&=\langle u(t)^*au(t)\xi,\eta\rangle\end{aligned}$$

是 E 上的可测函数, 依引理 11.6.2, $\Psi\circ v(\cdot)$ 是 E 到 $\mathrm{Rep}(A,\mathscr{H}_0)$ 的 Borel 映象. 从而, $v(\cdot)=\Phi\circ\Psi\circ v(\cdot)$ 是 E 到 G 中的 Borel 映象. 特别地, $v(\cdot)$ 是酉算子的可测场, 并且

$$v(t)^* a v(t) = u(t)^* a u(t),\ \forall a \in \mathcal{A},\ t \in E.$$

$\mathcal{A}$在M中是强算子稠的，因此，$v(t)^* b_l v(t) = u(t)^* b_l u(t) = a_l(t)$，$\forall t \in E,\ l \in \Lambda$. 证毕.

系 11.6.4 在定理 11.6.3 的假定下，如果还有$\mathscr{B}$上的测度 ν，则有 $\mathscr{H} = \int_E^{\oplus} \mathscr{H}(t) d\nu(t)$ 到 $L^2(E, \mathscr{B}, \nu) \otimes \mathscr{H}_0$ 上的酉算子 v，使得 $v a_l v^* = 1 \otimes b_l$，$\forall l \in \Lambda$，这里 $a_l = \int_E^{\oplus} a_l(t) d\nu(t)$，而 1 表示 $L^2(E, \mathscr{B}, \nu)$ 中的恒等算子.

定理 11.6.5 设 $(E, \mathscr{B})$ 是 Borel 空间，$\mathscr{H}(\cdot)$ 是 E 上 Hilbert 空间的可测场，$M(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 中的 vN 代数的可测场. 又设 $\mathscr{H}_0$ 是可分的 Hilbert 空间，并对每个 $t \in E$，有 $\mathscr{H}(t)$ 到 $\mathscr{H}_0$ 上的酉算子 $u(t)$，使得 $u(t) M(t) u(t)^* = M_0$，这里 M_0 是 $\mathscr{H}_0$ 中的 vN 代数，则有 $\mathscr{H}(\cdot)$ 到定常场 $\mathscr{H}_0$ 的酉算子可测场 $v(\cdot)$，使得 $v(t) M(t) v(t)^* = M_0$，$\forall t \in E$.

证. 无妨设 $\mathscr{H}(\cdot) = \mathscr{H}_0$，并设$G$是 $\mathscr{H}_0$ 中酉算子的全体，依强算子拓扑，它是 Polish 空间. 令 $H = \{u \in G | u^* M_0 u = M_0\}$，同样有$G$的 Borel 子集 F，使得 F 与 Hu 的交由一个元组成，$\forall u \in G$. 定义映象 Ψ: $G \to \mathscr{A}$，$\Psi(u) = u^* M_0 u$，$\forall u \in G$，这里 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{H}_0$ 中 vN 代数的全体. 依命题 10.4.2 的证明，Ψ是 Borel 映象. Ψ限于F是一一的，从而Ψ是F到 $\Psi(F) = \Psi(G)$ 上的 Borel 同构，记它的逆映象为Φ. 对任意的 $t \in E$，令 $v(t) = \Phi \circ \Psi(u(t))$，我们得到

$$E \xrightarrow{v(\cdot)} F \xrightarrow{\Psi(\cdot)} \Psi(F) = \Psi(G) \xrightarrow{\Phi(\cdot)} F.$$

注意 $\Psi \circ v(\cdot) = \Psi(u(\cdot)) = u(\cdot)^* M_0 u(\cdot) = M(\cdot)$ 是E到$\mathscr{A}$中的 Borel 映象（命题 11.3.2），从而，$v(\cdot) = \Phi \circ \Psi \circ v(\cdot)$ 是酉算子的可测场，并且 $v(t) M(t) v(t)^* = M_0$，$\forall t \in E$. 证毕.

系 11.6.6 在定理 11.6.5 的假定下，如果还有$\mathscr{B}$上 σ-有限的测度 ν，则有 $\mathscr{H} = \int_E^{\oplus} \mathscr{H}(t) d\nu(t)$ 到 $L^2(E, \mathscr{B}, \nu) \otimes \mathscr{H}_0$ 上的酉算子 v，使得 $v M v^* = \mathscr{Z} \overline{\otimes} M_0$，这里 $M = \int_E^{\oplus} M(t) d\nu(t)$，$\mathscr{Z}$ 是

$L^2(E,\mathscr{B},\nu)$ 中的乘法代数。

事实上，取定理 11.6.5 的 $v(\cdot)$，令 $v=\int_E^{\oplus} v(t)d\nu(t)$，则 $vMv^*=\int_E^{\oplus}M_0d\nu(t)=\hat{Z}\overline{\otimes}M_0$.

注 本节见参考文献 [21]，[26]，[84]，[116].

§7. vN代数 Borel 空间的 Borel 子集

设$\mathscr{H}$是可分的 Hilbert 空间，$\mathscr{A}$，$\mathscr{F}$ 分别表示$\mathscr{H}$中 vN 代数的全体，因子的全体，依定理 10.3.2，10.3.6，它们是标准的 Borel 空间.

命题 11.7.1 $\mathscr{H}$中 (I_n) 型 vN 代数的全体 $\mathscr{A}_{I_n}$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Borel 子集，$n=\infty,1,2,\cdots$.

证. 依命题 6.7.8，任何 (I_n) 型 vN 代数必空间＊同构于 $Z\overline{\otimes}B(\mathscr{H}_n)$，其中 Z 是交换的 vN 代数. 又依系 5.3.9 可见，$\mathscr{H}$中相互不＊同构的 (I_n) 型 vN 代数至多可数个. 再依命题 10.4.3，即见 $\mathscr{A}_{I_n}$ 是$\mathscr{A}$的 Borel 子集. 证毕.

命题 11.7.2 $\mathscr{H}$中 (I) 型 vN 代数的全体 $\mathscr{A}_I$ 是$\mathscr{A}$的 Borel 子集.

证. 如命题 10.4.3 的证明，定义 $\mathscr{A}=\mathscr{A}(\mathscr{H})$ 到 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 中的 Borel 同构 Φ: $\Phi(M)=M\overline{\otimes}C1_{\mathscr{H}}$，$\forall M\in\mathscr{A}(\mathscr{H})$. $M\in\mathscr{A}_I$，当且仅当，$\Phi(M)'=M'\overline{\otimes}B(\mathscr{H})$ 是(I_∞)型的（这里设 $\dim\mathscr{H}=\infty$；如果 $\dim\mathscr{H}<\infty$，$\mathscr{A}_I=\mathscr{A}$ 不待证）. 令 E 是 $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}$ 中 (I_∞) 型 vN 代数的全体，依命题 11.7.1，E 是 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 的 Borel 子集. 依命题 10.3.1，$E'=\{N'|N\in E\}$ 也是 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 的 Borel 子集. 由此，$\mathscr{A}_I=\Phi^{-1}(E')$ 是$\mathscr{A}$的 Borel 子集. 证毕.

命题 11.7.3 $\mathscr{H}$中有限的 vN 代数全体 $\mathscr{A}_f$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Borel 子集.

证. 首先如引理 10.4.6 证明 $(\mathscr{A}\backslash\mathscr{A}_f)$ 是 Sousline 子集，

再如命题 10.4.7 证明 $\mathscr{A}_f$ 也是 Sousline 子集，所以，$\mathscr{A}_f$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Borel 子集。 证毕。

引理 11.7.4 $\mathscr{H}$ 中半有限 vN 代数的全体 $\mathscr{A}_{sf}$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Sousline 子集。

证明与引理 10.4.8 一样。

引理 11.7.5 设 $\mathscr{A}_{\text{III}}$ 是 $\mathscr{H}$ 中 (III) 型 vN 代数的全体，则 $(\mathscr{A}\backslash\mathscr{A}_{\text{III}})$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Sousline 子集。

证. $M\not\in\mathscr{A}_{\text{III}}$，当且仅当，$M$ 包含非零有限投影. 考虑 $\mathscr{A}\times P\times\mathscr{H}_\infty$ 的子集 E，$(M, p, (\xi_k))\in E$ 指：p 是 M 的非零投影；$p\xi_k=\xi_k$，$\forall k$；$\sum_k\langle\cdot\xi_k, \xi_k\rangle$ 是 pMp 上的迹；$\{a'\xi_k|a'\in M', k\}$ 是 $p\mathscr{H}$ 的完全子集. 即 E 的定义与引理 10.4.8 证明中的 E 相仿，但不要求 $c(p)=1$. 相仿于引理 10.4.8，E 是 Borel 子集，因此，$(\mathscr{A}\backslash\mathscr{A}_{\text{III}})$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Sousline 子集. 证毕。

引理 11.7.6 设 $(E, \mathscr{B})$ 是标准的 Borel 空间，$\mathfrak{M}(E)$ 是 $(E, \mathscr{B})$ 上非零有限测度的全体. 赋予 $\mathfrak{M}(E)$ 以如下最小的 Borel 构造，使得对于 E 上任意的有界可测函数 f，$\nu\to\nu(f)=\int_E fd\nu$ 是 $\mathfrak{M}(E)$ 上的可测函数. 则 $\mathfrak{M}(E)$ 也是标准的 Borel 空间，并且这个 Borel 构造由形如 $\{\nu\in\mathfrak{M}(E)|\nu(F)<\lambda\}$ $(\forall F\in\mathscr{B}, \lambda>0)$ 的子集生成。

证. 依定理 9.3.16，无妨设 $E=[0,1]$. 于是，$\mathfrak{M}(E)=C(E)^*_+\backslash\{0\}$，这里 $C(E)^*_+$ 是 $C(E)$ 上连续正泛函的全体。

如果赋予 $\mathfrak{M}(E)$ 以这样的 Borel 构造，它由形如 $\{\nu\in\mathfrak{M}(E)|\nu(F)<\lambda\}$ $(\forall F\in\mathscr{B}, \lambda>0)$ 的子集生成. 由于 E 上有界可测函数 f 可以为简单函数列一致逼近，因此，$\nu\to\nu(f)$ 将是 $\mathfrak{M}(E)$ 上的可测函数. 同时易见这个 Borel 构造是使得 $\nu\to\nu(f)$ 可测的最小 Borel 构造。

由于 $C(E)$ 是可分的 Banach 空间，因此 $(C(E)^*, w^*)$ 是标准的 Borel 空间，这里 w^* 表示 $C(E)^*$ 中的弱 * 拓扑，从而，$\mathfrak{M}(E)=C(E)^*_+\backslash\{0\}$ 依弱 * 拓扑也是标准的 Borel 空间. 对任

意的 $f\in C(E)$，$\nu\to\nu(f)$ 是 $\mathfrak{M}(E)$ 上弱＊连续的函数，由此，$\nu\to\nu(F)$ 是 $(\mathfrak{M}(E), w^*)$ 上的可测函数，$\forall F\in\mathscr{B}$. 因此，由 $\{\nu\in\mathfrak{M}(E)|\nu(F)<\lambda\}$ $(\forall F\in\mathscr{B}, \lambda>0)$ 产生的 Borel 构造 $\mathscr{P}$ 包含于由弱＊拓扑所产生的标准 Borel 构造.

依定理 9.3.13，今只须证明 $\mathscr{P}$ 包含分离的可数族. 设 $\{r_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中有理数的全体，$\{t_k\}$ 是 $(0, +\infty)$ 中有理数的全体，令 $Q_{ijk}=\{\nu\in\mathfrak{M}(E)|\nu([r_i, r_j])<t_k\}$，易见 $\{Q_{ijk}\}$ 将分离 $\mathfrak{M}(E)$. 证毕.

引理 11.7.7 设 $(E, \mathscr{B})$ 是标准的 Borel 空间，$\mathfrak{M}(E)$ 如前一引理所述. 又设 $\mathscr{H}(\cdot)$ 是 E 上 Hilbert 空间的可测场，$\xi(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的有界可测矢场，$a(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 中一致有界的算子可测场，$M(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 中 vN 代数的可测场，则

1) $\nu\to\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 是 $\mathfrak{M}(E)$ 上 Hilbert 空间的可测场，它有可测矢场的基本族为 $\nu\to\int_E^{\oplus}\eta(t)d\nu(t)$，这里 $\eta(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的任意有界可测矢场，而 $\int_E^{\oplus}\eta(t)d\nu(t)$ 表示 $\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 的元 $\eta(\cdot)$；

2) $\nu\to\int_E^{\oplus}\xi(t)d\nu(t)$ 是 $\nu\to\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 的可测矢场，并且在 $\mathfrak{M}(E)_1$ 上有界，这里 $\mathfrak{M}(E)_1=\{\nu\in\mathfrak{M}(E)|\nu(E)=1\}$；

3) $\nu\to\int_E^{\oplus}a(t)d\nu(t)$ 是 $\nu\to\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 中的一致有界的算子可测场；

4) $\nu\to\int_E^{\oplus}M(t)d\nu(t)$ 是 $\nu\to\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 中的 vN 代数可测场.

证. 1)设$\{\xi_n(\cdot)\}$是场 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的直交规范基，无妨认为 $E=[0, 1]$，$\{f_n\}$ 是 $C(E)$ 的可数稠集，于是，依命题 11.1.9，对每个 $\nu\in\mathfrak{M}(E)$，$\left\{\int_E^{\oplus}(f_n\xi_m)(t)d\nu(t)\right\}_{n,m}$ 是 $\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 的完全子集. 由引理 11.7.6，$\nu\to\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 是 $\mathfrak{M}(E)$ 上 Hilbert 空

间的可测场. 若 $\eta(\cdot)$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的有界可测矢场，则 $\langle\eta(t),$ $f_n(t)\xi_m(t)\rangle_t$ 是 E 上的有界可测函数，从而，$\left\langle\int_E^{\oplus}\eta(t)dv(t),\int_F^{\oplus}(f_n\xi_m)(t)dv(t)\right\rangle=\int_E^{\oplus}\langle\eta(t),f_n(t)\xi_m(t)\rangle_t dv(t)$ 是 $\mathfrak{M}(E)$ 上的可测函数，$\forall n,m$. 所以，$v\to\int_E^{\oplus}\eta(t)dv(t)$ 是场 $v\to\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)dv(t)$ 的可测矢场.

2) 由 1) 显见.

3) 由于 $a(\cdot)f_n(\cdot)\xi_m(\cdot)$ 仍然是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 的有界可测矢场，$\forall n,m$，因此，算子场 $v\to\int_E^{\oplus}a(t)dv(t)$ 是可测的. 此外，依命题 11.2.3，$\left\|\int_E^{\oplus}a(t)dv(t)\right\|\leqslant\sup_t\|a(t)\|_t$，$\forall v\in\mathfrak{M}(E)$.

4) 设 $\{a_n(\cdot)\}_n$ 是 $\mathscr{H}(\cdot)$ 中的算子可测场列，使得对每个 $t\in E$，$\{a_n(t)\}_n$ 生成 $M(t)$. 无妨设 $\|a_n(t)\|_t\leqslant 1$，$\forall t\in E$ 及 n. 于是对每个 $v\in\mathfrak{M}(E)$，$\int_E^{\oplus}M(t)dv(t)$ 将由 $\left\{\int_E^{\oplus}f_n(t)1_t dv(t),\int_E^{\oplus}a_m(t)dv(t)\right\}_{n,m}$ 生成. 再依 3)，可见 $v\to\int_E^{\oplus}M(t)dv(t)$ 是 $v\to\int_E^{\oplus}\mathscr{H}(t)dv(t)$ 中 vN 代数的可测场. 证毕.

引理 11.7.8 记 $\mathfrak{M}=\{v\mid v$ 是 $\mathscr{F}_{\text{III}}\times\mathbf{N}$ 上非零的有限测度$\}$(依定理 10.4.16 及引理 11.7.6，$\mathfrak{M}$ 是标准的 Borel 空间，其中 $\mathscr{F}_{\text{III}}$ 是 $\mathscr{H}$ 中(III)型因子的全体)，又设 $\{Z_n\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中相互不 * 同构的交换 vN 代数列，使得 $\mathscr{H}$ 中任意的交换 vN 代数，必 * 同构于某个 Z_n (系 5.3.9)，则存在 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathscr{A}$ 中的 Borel 映象 $B(\cdot)$，使得对每个 $v\in\mathfrak{M}$，$B(v)$ 空间 * 同构于 $\int_{\mathscr{F}_{\text{III}}\times\mathbf{N}}^{\oplus}(A\bar{\otimes}Z_n)dv(A,n)$.

证. 依命题 10.4.3 的证明，$A\to A\bar{\otimes}\mathbf{C}1_{\mathscr{H}}$ 是 $\mathscr{A}=\mathscr{A}(\mathscr{H})$ 到 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 中的 Borel 映象. 自然 $n\to\mathbf{C}1_{\mathscr{H}}\bar{\otimes}Z_n$ 是 $\mathbf{N}$ 到 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 中的 Borel 映象. 于是依命题 10.3.5，$(A,n)\to A\bar{\otimes}Z_n$ 是 $\mathscr{F}_{\text{III}}\times\mathbf{N}$ 到 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 中的 Borel 映象.

依引理 11.7.7，$\nu \to \int_{\mathscr{F}_{III}\times N}^{\oplus}(A\bar{\otimes}Z_n)d\nu(A,n)$ 是 $\mathfrak{M}$ 上 $\nu\to$ $\int_{\mathscr{F}_{III}\times N}^{\oplus}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})d\nu(A,n)=\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}\otimes L^2(\mathscr{F}_{III}\times N,\nu)$ 中的 vN 代数可测场. 但 $\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}\otimes L^2(\mathscr{F}_{III}\otimes N,\nu)$ 与 $\mathscr{H}$ 有同样的可数无穷维，依命题 11.3.2，有 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathscr{A}$ 中的 Borel 映象 $B(\cdot)$，使得 $B(\nu)$ 空间 * 同构于 $\int_{\mathscr{F}_{III}\times N}^{\oplus}(A\otimes Z_n)d\nu$，$\forall\nu\in\mathfrak{M}$. 证毕.

今设 M 是 $\mathscr{H}$ 中任意固定的(III)型 vN 代数. 依定理 11.4.2，将有实轴 R 上的有限 Borel 测度 ν，Hilbert 空间可测场 $\mathscr{H}(\cdot)$，及 $\mathscr{H}(\cdot)$ 中 vN 代数的可测场 $M(\cdot)$，使得 M 空间 * 同构于 $\int_{\mathbf{R}}^{\oplus}M(t)d\nu(t)$，这 * 同构同时把 $M\cap M'$ 变成 $\int_{\mathbf{R}}^{\oplus}\mathscr{H}(t)d\nu(t)$ 中的对角算子代数以及 $M(t)$ 是因子，$\forall t\in\mathbf{R}$. 由定理 11.5.10，可以认为 $M(t)$ 是 (III) 型的，特别 $\mathscr{H}(t)$ 是可数无穷维的，$\forall t\in\mathbf{R}$. 于是，可以认为 $\mathscr{H}(\cdot)$ 即 R 上的定常场 $\mathscr{H}$，$M(\cdot)$ 是 R 到 $\mathscr{A}$ 中的 Borel 映象(命题 11.3.2).

引理 11.7.9 可以认为 $M(\mathbf{R})$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Borel 子集.

证. 显然 $M(\mathbf{R})$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Sousline 子集. 令 $\mu=\nu\circ M^{-1}$，它是 $\mathscr{A}$ 上的有限测度. 依系 9.2.11，有 $\mathscr{A}$ 的 Borel 子集 E,F，使得 $E\subset M(\mathbf{R})$，$(M(\mathbf{R})\backslash E)\subset F$，并且 $\mu(F)=0$. 记 $\mathbf{R}_0=M^{-1}(\mathscr{A}\backslash E)$. 易见 $\nu(\mathbf{R}_0)=0$，$M(\mathbf{R}\backslash\mathbf{R}_0)=E$. 现在重新定义 $\mathbf{R}_0$ 上的 $M(t)$，使之恒等于 $\mathscr{H}$ 中某个 (III) 型因子，即见 $M(\mathbf{R})$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Borel 子集. 证毕.

引理 11.7.10 设 $M(\mathbf{R})$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Borel 子集，在 R 中定义等价关系～：$t_1\sim t_2$ 指 $M(t_1)=M(t_2)$，并赋予 $\mathbf{R}/\sim$ 以商 Borel 构造，则 $\mathbf{R}/\sim$ 也是标准的 Borel 空间，并且 Φ 是 $\mathbf{R}/\sim$ 到 $M(\mathbf{R})$ 上的 Borel 同构，这里 $\Phi(\tilde{t})=M(t)$，$\pi(t)=\tilde{t}$ 是 R 到 $\mathbf{R}/\sim$ 上的正则映象. 此外，我们可以在 R 的一个饱和的 (在～的意义下) ν-零集上重新定义 $M(t)$，使得 π 有 Borel 截面，即可以认为有 Borel 映象 σ: $\mathbf{R}/\sim\ \to\mathbf{R}$，使得 $\pi\circ\sigma(\tilde{t})=\tilde{t}$，$\forall\tilde{t}\in\mathbf{R}/\sim$.

证. 如果 F 是 $M(\mathrm{R})$ 的 Borel 子集, $\Phi^{-1}(F)=\pi\circ M^{-1}(F)$, 但 $M^{-1}(F)$ 是 R 的饱和的 Borel 子集, 因此, $\Phi^{-1}(F)$ 是 $\mathrm{R}/\sim$ 的 Borel 子集,即 Φ 是 Borel 映象. Φ 当然是一一的. 今证 Φ^{-1} 也是 Borel 的. 设 $\tilde{E}$ 是 $\mathrm{R}/\sim$的 Borel 子集, 于是 $E=\pi^{-1}(\tilde{E})$ 是 R 的饱和的 Borel 子集. 因此, $\Phi(\tilde{E})=M(E)$, $\Phi((\mathrm{R}/\sim)\backslash\tilde{E})=M(\mathrm{R}\backslash E)=M(\mathrm{R})\backslash M(E)$ 都是 $M(\mathrm{R})$ 的 Sousline 子集, 所以,$\Phi(\tilde{E})$ 是 $M(\mathrm{R})$ 的 Borel 子集. 这样,Φ 是 $\mathrm{R}/\sim$ 到 $M(\mathrm{R})$ 上的 Borel 同构, 特别, $\mathrm{R}/\sim$ 也是标准的 Borel 空间. 再依命题 9.4.7,即可得证.

引理 11.7.11 设 $M(\mathrm{R})$ 是$\mathscr{A}$的 Borel 子集, 则存在 $\mathrm{R}/\sim$ (见引理 11.7.10)到 $\mathfrak{M}(\mathrm{R})_1$ 中的 Borel 映象 $\tilde{t}\to\nu_t$,使得对 R 上任意的有界可测函数 f, $\mathrm{R}/\sim$ 上任意的 $\tilde{\nu}$-可积函数 h, 这里 $\tilde{\nu}=\nu\circ\pi^{-1}$, 有

$$\int_{\mathrm{R}}(h\circ\pi)(t)f(t)d\nu(t)$$

$$=\int_{\mathrm{R}/\sim}h(\tilde{t})d\tilde{\nu}(\tilde{t})\int_{\mathrm{R}}f(s)d\nu_t(s),$$

并且对于 $p.p.\tilde{\nu}$ 的 $\tilde{t}$, ν_t 集中于 $\pi^{-1}(\{\tilde{t}\})$.

证. 依定理 9.3.16, R 能够 Borel 同构于 Cantor 集 C. C 有由可数个既闭又开子集组成的拓扑基,用这拓扑基生成的 Bool 代数 Σ_c 也由可数个既闭又开的子集组成. 这样, 我们可以取 R 的可数个 Borel 子集组成的 Bool 代数 Σ, 使得 Σ 生成 R 的 Borel 子集全体,同时 Σ 的任意元如果表成 Σ 其它元的不交并只能是有限并的形式. 于是, Σ 上每个有限可加的有限测度,也必是可数可加的,从而能够唯一地扩张成 R 上的有限 Borel 测度.

对于每个 $E\in\Sigma$, $\nu(E\cap\pi^{-1}(\cdot))$ 是 $\mathrm{R}/\sim$上的有限测度,并且关于 $\tilde{\nu}=\nu\circ\pi^{-1}$ 是绝对连续的,因此有 $0\leqslant g_E\in L^1(\mathrm{R}/\sim,\tilde{\nu})$, 使得 $\nu(E\cap\pi^{-1}(\cdot))=g_E\cdot\tilde{\nu}(\cdot)$. 由于 Σ 可数, 于是有 $\mathrm{R}/\sim$的 $\tilde{\nu}$-零子集 $\tilde{E}_0$, 使得对于每个 $\tilde{t}\in(\mathrm{R}/\sim\backslash\tilde{E}_0)$, $g_0(\tilde{t})$ 是 Σ 上的有限可加的概率测度, 进而 $g_0(\tilde{t})$ 可扩张为 R 上的概率测度. 因

此，我们得到 R/～到 $\mathfrak{M}(\mathbf{R})_1$ 中的映象：$\tilde{t}\to\nu_t$，使得 $\nu_t(E)=g_E(\tilde{t})$，$\forall\tilde{t}\in(\mathbf{R}/\sim\backslash\tilde{E}_0)$，$E\in\Sigma$；$\nu_t=\mathbf{R}$ 上某个固定的概率测度，$\forall\tilde{t}\in\tilde{E}_0$。由于$\Sigma$生成 R 的 Borel 子集全体，并依引理 11.7.6，可见 $\tilde{t}\to\nu_t$ 是 R/～到 $\mathfrak{M}(\mathbf{R})_1$ 中的 Borel 映象，并且对 R 的任意 Borel 子集 E，R/～的任意 Borel 子集 $\tilde{F}$，

$$\nu(E\cap\pi^{-1}(\tilde{F}))=\int_{\tilde{F}}\nu_t(E)d\tilde{\nu}(\tilde{t}).\tag{1}$$

进而对 R 上任意的有界可测函数 f，R/～上任意的 $\tilde{\nu}$-可积函数 h，有

$$\int_{\mathbf{R}}(h\circ\pi)(t)f(t)d\nu(t)$$
$$=\int_{\mathbf{R}/\sim}h(\tilde{t})d\tilde{\nu}(\tilde{t})\int_{\mathbf{R}}f(s)d\nu_t(s).$$

对 R/～的任意 Borel 子集 $\tilde{E}$，$\tilde{F}$，依(1)，

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{F}}\chi_{\tilde{E}}(\tilde{t})d\tilde{\nu}(\tilde{t})&=\tilde{\nu}(\tilde{E}\cap\tilde{F})\\&=\nu(\pi^{-1}(\tilde{E})\cap\pi^{-1}(\tilde{F}))\\&=\int_{\tilde{F}}\nu_t(\pi^{-1}(\tilde{E}))d\tilde{\nu}(\tilde{t})\end{aligned}$$

因此，对任意固定的 $\tilde{E}$，

$$\chi_{\tilde{E}}(\tilde{t})=\nu_t(\pi^{-1}(\tilde{E})),\ p.p.\tilde{\nu}.\tag{2}$$

由于 R/～是标准的 Borel 空间，我们可以取 R/～的 Borel 子集可数族 $\tilde{\Sigma}$，使得对任意的 $\tilde{t}\in\mathbf{R}/\sim$，有 $\{\tilde{E}_n\}\subset\tilde{\Sigma}$，$\tilde{E}_1\supset\cdots\supset\tilde{E}_n\supset\cdots$，且 $\bigcap\limits_n\tilde{E}_n=\{\tilde{t}\}$。依(2)，对 $p.p.\tilde{\nu}$ 的 $\tilde{t}$，有 $\chi_{\tilde{E}}(\tilde{t})=\nu_t(\pi^{-1}(\tilde{E}))$，$\forall\tilde{E}\in\tilde{\Sigma}$。特别地，取上面的 $\{\tilde{E}_n\}$，则 $1=\chi_{\tilde{E}_n}(\tilde{t})=\nu_t(\pi^{-1}(\tilde{E}_n))\to\nu_t(\pi^{-1}(\{\tilde{t}\}))$。这表明对 $p.p.\tilde{\nu}$ 的 $\tilde{t}$，ν_t 集中于 $\pi^{-1}(\{\tilde{t}\})$。证毕。

引理 11.7.12 设 $\tilde{t}\to\nu_t$ 如引理11.7.11，则 $\tilde{t}\to\int_{\mathbf{R}}^{\oplus}M(s)d\nu_t(s)$ 是 R/～ 上 $\left(\tilde{t}\to\int_{\mathbf{R}}^{\oplus}\mathscr{H}d\nu_t(s)=\mathscr{H}\otimes L^2(\mathbf{R},\nu_t)\right)$ 中的 vN 代数可测场，并且M空间＊同构于

$$\int_{R/\sim}^{\oplus} d\tilde{\nu}(\tilde{t})\int_{R}^{\oplus} M(s)d\nu_t(s).$$

证. 取 R 上的有界可测函数列 $\{f_n\}$, 使得对每 $\mu\in\mathfrak{M}(R)$, $\{f_n\}$ 在 $L^2(R,\mu)$ 中稠, 且在 $L^\infty(R,\mu)$ 中弱 * 稠 (仿照引理 11.7.7 的证明). 又设 $\{\xi_n\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的直交规范基及 $\{a_n(\cdot)\}$ 是 R 上定常场 $\mathscr{H}$ 中的算子可测场列, 使得 $\{a_n(t)\}_n$ 生成 $M(t)$, $\forall t\in R$. 由于 $\tilde{t}\to\nu_t$ 是 Borel 的, 依引理 11.7.7, 11.7.6, $\left\{\tilde{t}\to\int_{R}^{\oplus}(f_n\xi_m)(s)d\nu_t(s)\right\}_{n,m}$ 是 $\left(\tilde{t}\to\int_{R}^{\oplus}\mathscr{H}d\nu_t=\mathscr{H}\otimes L^2(R,\nu_t)\right)$ 的可测矢场基本列, 并且

$$\tilde{t}\to\int_{R}^{\oplus}a_n(s)d\nu_t(s),\quad \tilde{t}\to\int_{R}^{\oplus}f_m(s)1_{\mathscr{H}}d\nu_t(s)$$

都是 $\left(\tilde{t}\to\int_{R}^{\oplus}\mathscr{H}d\nu_t\right)$ 中的算子可测场, $\forall n, m$ (这里不妨设 $\|a_n(t)\|\leqslant 1$, $\forall t\in R$, 及 n), 以及对每个 $\tilde{t}\in R/\sim$, $\left\{\int_{R}^{\oplus}a_n(s)d\nu_t(s),\int_{R}^{\oplus}f_m(s)1_{\mathscr{H}}d\nu_t(s)\right\}_{n,m}$ 生成 $\int_{R}^{\oplus}M(s)d\nu_t(s)$. 因此, $\tilde{t}\to\int_{R}^{\oplus}M(s)d\nu_t(s)$ 是 $\left(\tilde{t}\to\int_{R}^{\oplus}\mathscr{H}d\nu_t\right)$ 中 vN 代数的可测场. 依命题 11.1.9.,

$$\left\{\tilde{t}\to h(\tilde{t})\int_{R}^{\oplus}(f_n\xi_m)(s)d\nu_t(s)\,\middle|\, n, m,\right.$$
$$\left. h\text{ 是 } R/\sim\text{ 上有界可测函数}\right\}$$

是 $\int_{R/\sim}^{\oplus}d\tilde{\nu}(\tilde{t})\int_{R}^{\oplus}\mathscr{H}d\nu_t=\int_{R/\sim}^{\oplus}(\mathscr{H}\otimes L^2(R,\nu_t))d\tilde{\nu}(\tilde{t})$ 的完全子集. 定义

$$u\left(\tilde{t}\to h(\tilde{t})\int_{R}^{\oplus}(f_n\xi_m)(s)d\nu_t(s)\right)$$
$$=(t\to h(\pi(t))f_n(t)\xi_m(t))$$

由引理 11.7.11, 易见 u 是 $\int_{R/\sim}^{\oplus}(\mathscr{H}\otimes L^2(R,\nu_t))d\tilde{\nu}(\tilde{t})$ 到 $\int_{R}^{\oplus}\mathscr{H}$

$d\nu = \mathscr{H} \otimes L^2(\mathrm{R}, \nu)$上的酉算子．它显然把算子$\int_{\mathrm{R}/\sim}^{\oplus} h(\tilde{t}) 1_{\mathscr{H}} d\tilde{\nu}(\tilde{t})$,
$\int_{\mathrm{R}/\sim}^{\oplus} d\tilde{\nu}(\tilde{t}) \int_{\mathrm{R}}^{\oplus} a_n(s) d\nu_{\tilde{t}}(s)$, $\int_{\mathrm{R}/\sim}^{\oplus} d\tilde{\nu}(\tilde{t}) \int_{\mathrm{R}}^{\oplus} f_m(s) 1_{\mathscr{H}} d\nu_{\tilde{t}}(s)$ 分别变成 $\int_{\mathrm{R}}^{\oplus} h(\pi(t)) 1_{\mathscr{H}} d\nu(t)$, $\int_{\mathrm{R}}^{\oplus} a_n(t) d\nu(t)$, $\int_{\mathrm{R}}^{\oplus} f_m(t) 1_{\mathscr{H}} d\nu(t)$. 因此，

$$u \int_{\mathrm{R}/\sim}^{\oplus} d\tilde{\nu}(\tilde{t}) \int_{\mathrm{R}}^{\oplus} M(s) d\nu_{\tilde{t}}(s) u^* = \int_{\mathrm{R}}^{\oplus} M(t) d\nu(t).$$ 证毕.

引理 11.7.13 存在 $\mu \in \mathfrak{M}$，使得M *同构于 $B(\mu)$，这里 $\mathfrak{M}$，$B(\cdot)$ 见引理 11.7.8.

证. 设 $\tilde{t} \to \nu_{\tilde{t}}$ 如引理 11.7.11，$\{f_n\}$ 如引理 11.7.12 证明中所取的. 于是，以 $\left\{\tilde{t} \to \int_{\mathrm{R}}^{\oplus} f_n(s) d\nu_{\tilde{t}}(s)\right\}_n$ 为可测矢场基本列，$\tilde{t} \to L^2(\mathrm{R}, \nu_{\tilde{t}})$ 是 $\mathrm{R}/\sim$上 Hilbert 空间的可测场，并且 $\tilde{t} \to Z_{\tilde{t}}$ 是 $(\tilde{t} \to L^2(\mathrm{R}, \nu_{\tilde{t}}))$ 中 vN 代数的可测场，这里 $Z_{\tilde{t}}$ 是 $L^2(\mathrm{R}, \nu_{\tilde{t}})$ 中的乘法代数，$\forall \tilde{t} \in \mathrm{R}/\sim$.

由于 $L^2(\mathrm{R}, \nu_{\tilde{t}})$ 是可分的，从而存在唯一的正整数 $n(\tilde{t})$，使得 $Z_{\tilde{t}}$ *同构于 $Z_{n(\tilde{t})}$，$\forall \tilde{t} \in \mathrm{R}/\sim$，这里$\{Z_n\}$如引理 11.7 8. 我们说 $\tilde{t} \to n(\tilde{t})$ 是 $\mathrm{R}/\sim$ 到 N 的 Borel 映象. 依命题 11.1.2，使得 $L^2(\mathrm{R}, \nu_{\tilde{t}})$ 有相同维数的 $\tilde{t}$ 是 Borel 集. 于是无妨设所有的 $L^2(\mathrm{R}, \nu_{\tilde{t}})$ 有相同的维数，从而 $\tilde{t} \to L^2(\mathrm{R}, \nu_{\tilde{t}})$ 酉同构于某定常场 $\mathscr{H}$，相应 $\tilde{t} \to Z_{\tilde{t}}$ 空间*同构于 $\tilde{t} \to N(\tilde{t})$，这里 $\tilde{t} \to N(\tilde{t})$ 是 $\mathrm{R}/\sim$ 到$\mathscr{A}(\mathscr{H})$ 中的 Borel 映象. 对任意固定的 $N_0 \in \mathscr{A}(\mathscr{H})$，$a(N_0)$ 是 $\mathscr{A}(\mathscr{H})$的 Borel 子集(命题 10.4.3)，因此，$N^{-1}(a(N_0))$ 是 $\mathrm{R}/\sim$ 的 Borel 子集. 由此即见 $\tilde{t} \to n(\tilde{t})$ 是Borel 映象.

我们也可以建立*同构的可测场 $\varphi(\cdot)$，使得 $\varphi(\tilde{t})$ 是 $Z_{\tilde{t}}$ 到 $Z_{n(\tilde{t})}$ 上的*同构，$\forall \tilde{t} \in \mathrm{R}/\sim$. 与前段一样，可设 $\tilde{t} \to Z_{\tilde{t}}$ 空间*同构于 $\tilde{t} \to N(\tilde{t})$，这里 $\tilde{t} \to N(\tilde{t})$ 是 $\mathrm{R}/\sim$ 到 $\mathscr{A}(\mathscr{H})$ 中的 Borel 映象，$Z_{\tilde{t}}$ 在 $L^2(\mathrm{R}, \nu_{\tilde{t}})$ 中有循环且分离矢(函数 1)，于是 $N(\tilde{t})$ 在$\mathscr{H}$中也有循环且分离矢，$\mathscr{H}$中不*同构的交换 vN 代数至多可数个，因此又可假定 $N(\tilde{t})$* 同构于 $N(\tilde{t}_0)$，$\forall \tilde{t} \in \mathrm{R}/\sim$，

$\tilde{t}_0$ 是 $\mathbf{R}/\sim$ 的任意固定点。依定理 1.13.5 $N(\tilde{t})$ 空间 * 同构于 $N(\tilde{t}_0)$，$\forall\tilde{t}$. 再依定理 11.6.5，便可建立所要求的 $\psi(\cdot)$.

依引理 11.7.10，Φ 是 $\mathbf{R}/\sim$ 到 $M(\mathbf{R})$ 上的 Borel 同构，命 $k(A)=n\circ\Phi^{-1}(A)$，$\forall A\in M(\mathbf{R})$，及 $k(A)=1$，$\forall A\in(\mathscr{A}\setminus M(\mathbf{R}))$，则 $k(\cdot)$ 是 $\mathscr{A}$ 到 N 中的 Borel 映象.

令 $\hat{\nu}=\tilde{\nu}\circ\Phi^{-1}=\nu\circ M^{-1}$，它是 $\mathscr{A}$ 上集中于 $M(\mathbf{R})$ 的有限测度. 我们以符号"$\simeq$"表示 vN 代数之间的 * 同构，由于 Φ 是 Borel 同构，依命题 11.3.12 及引理 11.7.10，有

$$\int_{\mathscr{A}}^{\oplus}(A\overline{\otimes}Z_{k(A)})d\hat{\nu}(A)=\int_{M(\mathbf{R})}^{\oplus}(A\overline{\otimes}Z_{k(A)})d\hat{\nu}(A)$$

$$=\int_{M(\mathbf{R})}^{\oplus}\Phi\circ\Phi^{-1}(A)\overline{\otimes}Z_{k\circ\Phi\circ\Phi^{-1}(A)}d\tilde{\nu}\circ\Phi^{-1}(A)$$

$$\simeq\int_{\mathbf{R}/\sim}^{\oplus}\Phi(\tilde{t})\overline{\otimes}Z_{n(\tilde{t})}d\tilde{\nu}(\tilde{t})\simeq\int_{\mathbf{R}/\sim}^{\oplus}M(\sigma(\tilde{t}))\overline{\otimes}Z_{\tilde{t}}d\tilde{\nu}(\tilde{t})$$

依引理 11.7.11，对 $p.p.\tilde{\nu}$ 的 $\tilde{t}$，$\nu_{\tilde{t}}$ 集中于 $\pi^{-1}(\{\tilde{t}\})$. 又 $M(t)=M(\sigma(\tilde{t}))$，$\forall t\in\pi^{-1}(\{\tilde{t}\})$，因此，对 $p.p.\tilde{\nu}$ 的 $\tilde{t}$，

$$\int_{\mathbf{R}}^{\oplus}M(s)d\nu_{\tilde{t}}(s)=\int_{\pi^{-1}(\{\tilde{t}\})}^{\oplus}M(\sigma(\tilde{t}))d\nu_{\tilde{t}}(s)$$

$$=M(\sigma(\tilde{t}))\overline{\otimes}Z_{\tilde{t}},$$

今依引理 11.7.12，可见 M * 同构于 $\int_{\mathscr{A}}^{\oplus}(A\overline{\otimes}Z_{k(A)})d\hat{\nu}(A)$.

注意 $\hat{\nu}$ 集中于 $M(\mathbf{R})\subset\mathscr{F}_{\mathrm{III}}$，于是

$$\int_{\mathscr{A}}^{\oplus}(A\overline{\otimes}Z_{k(A)})d\hat{\nu}(A)=\sum_j\oplus\int_{\mathscr{A}_j}^{\oplus}(A\overline{\otimes}Z_j)d\hat{\nu}(A)$$

$$=\sum_j\oplus\int_{\mathscr{A}_j\cap\mathscr{F}_{\mathrm{III}}}^{\oplus}(A\overline{\otimes}Z_j)d\hat{\nu}(A).$$

这里，$\mathscr{A}_j=\{A\in\mathscr{A}\mid k(A)=j\}$，$\forall j$. 进而取 $\mu\in\mathfrak{M}$，使得 μ 在 $(\mathscr{A}_j\cap\mathscr{F}_{\mathrm{III}})\times\{j\}$ 上等于 $\hat{\nu}$，$\forall j$. 从而，M * 同构于 $\int_{\mathscr{F}_{\mathrm{III}}\times\mathbf{N}}^{\oplus}(A\overline{\otimes}Z_n)d\mu(A,n)$. 再依引理 11.7.8，$M$ * 同构于 $B(\mu)$. 证毕.

引理 11.7.14 设 E 是 $\mathscr{A}$ 的 Sousline 子集，则 $a(E)=\{N\in$

$\mathscr{A}\{N *$同构于某个属于E的 vN 代数$\}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的 Sousline 子集.

证. 令 $\Phi(N)=N\bar{\otimes}C1_{\mathscr{H}}$, 则 Φ 是 $\mathscr{A}=\mathscr{A}(\mathscr{H})$ 到 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 中的 Borel 同构,依命题 10.4.3 所证明

$$a(E)=\Phi^{-1}(s(\Phi(E)))=\Phi^{-1}(s(\Phi(E))\cap\Phi(\mathscr{A})),$$

依引理 10.4.14., $s(\Phi(E))$ 是 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 的 Sousline 子集. 于是有 Polish 空间P及P到 $\mathscr{A}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H})$ 中的 Borel 映象f, 使得 $f(P)=s(\Phi(E))\cap\Phi(\mathscr{A})$. 不难见 $\Phi^{-1}\circ f$ 是P到$\mathscr{A}$中的 Borel 映象,依命题 9.35, $a(E)=\Phi^{-1}\circ f(P)$ 是$\mathscr{A}$的 Sousline 子集. 证毕.

命题 11.7.15 $\mathscr{A}_{\text{III}}$ 是$\mathscr{A}$的 Borel 子集.

证. 依引理 11.7.5, 只须证明 $\mathscr{A}_{\text{III}}$ 是 Sousline 子集. 依引理 11.7.8, $B(\mathfrak{M})$ 是$\mathscr{A}$的 Sousline 子集, 并依定理 11.5.10, $B(\mathfrak{M})\subset\mathscr{A}_{\text{III}}$. 再由引理 11.7.13, $\mathscr{A}_{\text{III}}=a(B(\mathfrak{M}))$. 从而由引理 11.7.14, $\mathscr{A}_{\text{III}}$ 是$\mathscr{A}$的 Sousline 子集. 证毕.

定理 11.7.16 $\mathscr{A}_f$ ($\mathscr{H}$ 中有限 vN 代数的全体), $\mathscr{A}_{sf}$ ($\mathscr{H}$ 中半有限 vN 代数的全体), $\mathscr{A}_{pi}$ ($\mathscr{H}$ 中真无限 vN 代数的全体), $\mathscr{A}_{\text{I}_k}$ ($\mathscr{H}$ 中 (I_k) 型 vN 代数的全体), $k=\infty, 1, 2, \cdots$, $\mathscr{A}_{\text{I}}$ ($\mathscr{H}$ 中 (I) 型 vN 代数的全体), $\mathscr{A}_c$ ($\mathscr{H}$ 中连续的 vN 代数的全体), $\mathscr{A}_{\text{II}_1}$ ($\mathscr{H}$ 中 (II_1) 型 vN 代数的全体), $\mathscr{A}_{\text{II}_\infty}$ ($\mathscr{H}$ 中 (II_∞) 型 vN 代数的全体), $\mathscr{A}_{\text{II}}$ ($\mathscr{H}$ 中 (II) 型 vN 代数的全体), $\mathscr{A}_{\text{III}}$ ($\mathscr{H}$ 中 (III) 型 vN 代数的全体), 都是$\mathscr{A}$的 Borel 子集.

证. 对于 $\mathscr{A}_{\text{I}_k}$, $\mathscr{A}_{\text{I}}$, $\mathscr{A}_f$, 及 $\mathscr{A}_{\text{III}}$ 已分别在命题 11.7.1, 11.7.2, 11.7.3 及 11.7.15 中所证明.

为证明 $\mathscr{A}_{sf}$, 依引理 11.7.4, 只须证明 $(\mathscr{A}\backslash\mathscr{A}_{sf})$ 是 Sousline 子集. 注意 $M\in(\mathscr{A}\backslash\mathscr{A}_{sf})$, 当且仅当, $M=M_1\oplus M_2$, 其中 M_2 是 (III) 型的. 换言之, M 能够 $*$ 同构于 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{H}$ 中的 vN 代数 $\begin{pmatrix} M_1 & \\ & M_2\end{pmatrix}$, 这里 $M_1, M_2\in\mathscr{A}$, 并且 M_2 是 (III) 型的.

依命题 10.3.3，10.3.4，$(M_1, M_2) \to \begin{pmatrix} M_1 & \\ & M_2 \end{pmatrix}$ 是 $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{H})$ 中的 Borel 映象，并且显然是一一的。于是由命题 11.7.15，

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & \\ & M_2 \end{pmatrix} \middle| M_1, M_2 \in \mathscr{A}, M_1 \text{是 (III) 型的} \right\}$$

是 $\mathscr{A}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{H})$ 的 Borel 子集。令 v 是 $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 上的酉算子，同样由命题 10.3.3，10.3.4，$v \cdot v^*$ 是 $\mathscr{A}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{H})$ 到 $\mathscr{A}$ 上的 Borel 同构。于是依引理 11.7.14，$(\mathscr{A} \backslash \mathscr{A}_{sf}) = a(vEv^*)$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Sousline 子集。

$M \bar{\in} \mathscr{A}_{pi}$，当且仅当，$M = M_1 \oplus M_2$，其中 M_1 是有限的。从而使用与上面同样的方法，可见 $(\mathscr{A} \backslash \mathscr{A}_{pi})$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Sousline 子集。$M \in \mathscr{A}_{pi}$，当且仅当，M 有投影 p，使得 $1 \sim p \sim (1-p)$。设 S 是 $B(\mathscr{H})$ 的单位球，考虑 $\mathscr{A} \times S \times S$ 的满足如下条件的元 (M, v_1, v_2)：1) $a_n(M')v_j = v_j a_n(M')$，$\forall n$，$j = 1, 2$；2) $v_j v_j^* = 1$，$j = 1, 2$；3) $v_1^* v_1 \cdot v_2^* v_2 = 0$；4) $v_1^* v_1 + v_2^* v_2 = 1$，这里 $a_n(\cdot)$：$\mathscr{A} \to S$ 如命题 10.3.3。易见这是 Borel 子集，因此，$\mathscr{A}_{pi}$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Sousline 子集。进而，$\mathscr{A}_{pi}$ 是 Borel 子集。

依定理 6.8.4 及相似的方法，可证 $\mathscr{A}_{\rm II}$ 是 Sousline 子集。此外，$M \bar{\in} \mathscr{A}_{\rm II}$，当且仅当，$M = M_1 \oplus M_2$，其中 M_1 是 (I) 型或 (III) 型的。因此，又可以证明 $(\mathscr{A} \backslash \mathscr{A}_{\rm II})$ 是 Sousline 子集。所以，$\mathscr{A}_{\rm II}$ 是 Borel 子集。

由此，$\mathscr{A}_{{\rm II}_1} = \mathscr{A}_{\rm II} \cap \mathscr{A}_f$，$\mathscr{A}_{{\rm II}_\infty} = \mathscr{A}_{\rm II} \cap \mathscr{A}_{pi}$ 也都是 Borel 子集。

最后，

$\mathscr{A}_c = \mathscr{A}_{\rm II} \cup \mathscr{A}_{\rm III} \cup \{M \in \mathscr{A} \mid M = M_2 \oplus M_3, M_2, M_3$ 分别是 (II)，(III) 型的$\}$。因此 $\mathscr{A}_c$ 是 Sousline 子集，又 $M \bar{\in} \mathscr{A}_c$，当且仅当，$M = M_1 \oplus M_2$，其中 M_1 是离散的。因此，$(\mathscr{A} \backslash \mathscr{A}_c)$ 也是 Sousline 子集。所以，$\mathscr{A}_c$ 是 Borel 子集。证毕。

注 本节见参考文献 [27]，[84]，[100]，[119]。

§8. 可分 c^*-代数态空间的 Borel 子集

设 A 为有单位元的可分 c^*-代数，$\mathscr{S}$ 是 A 的态空间. 依 $\sigma(A^*, A)$，$\mathscr{S}$ 是紧 Polish 空间. 事实上，设 $\{a_n\}$ 是 A 单位球的可数稠集，对任意的 φ，$\psi \in \mathscr{S}$，定义 $d(\varphi, \psi) = \sum\limits_n 2^{-n}|(\varphi-\psi)(a_n)|$. 由此即见 $\mathscr{S}$ 是紧 Polish 空间.

对任意的 $n=\infty, 1, 2, \cdots$，$\mathscr{H}_n$ 是 n 维 Hilbert 空间，R_n 是 A 在 $\mathscr{H}_n$ 中非退化 * 表示的全体. 在 R_n 中，$\pi_l \to \pi$ 指 $\|(\pi_l(a)-\pi(a))\xi\| \to 0$，$\forall a \in A, \xi \in \mathscr{H}_n$. 依引理 11.6.1，$R_n$ 是 Polish 空间.

引理 11.8.1 Φ: $\pi \to \pi(A)''$ 是 R_n 到 $\mathscr{A}_n$ 中的 Borel 映象，这里 $\mathscr{A}_n$ 是 $\mathscr{H}_n$ 中 vN 代数的全体.

证. 设 $\{a_k\}$ 是 A 单位球的可数稠集，定义 $a_k(\cdot)$: $R_n \to (B(\mathscr{H}_n), \sigma)$，即 $a_k(\pi) = \pi(a_k)$，$\forall \pi \in R_n$. 对任意的 $\xi, \eta \in \mathscr{H}_n$，$\langle a_k(\cdot)\xi, \eta\rangle$ 显然是 R_n 上的连续函数. 因此，$\{a_k(\cdot)\}$ 是 R_n 到 $(B(\mathscr{H}_n), \sigma)$ 中的 Borel 映象列，并且对每个 $\pi \in R_n$，$\{a_k(\pi)\}_k$ 生成 $\pi(A)''$. 依命题 10.3.4，Φ 是 R_n 到 $\mathscr{A}_n$ 中的 Borel 映象. 证毕.

命题 11.8.2 $R_n^{(t)} = \{\pi \in R_n | \pi(A)''$ 是 (t) 型 vN 代数$\}$ 是 R_n 的 Borel 子集，这里 (t) 可以是因子，有限，半有限，真无限，(I_k) $(k=\infty, 1, 2, \cdots)$，(I)，(II_1)，(II_∞)，(II)，(III)，(c)（指连续）及 (I_{rr})（指不可约）.

证. 除 (I_{rr}) 外，由定理 10.3.6，11.7.16 及引理 11.8.1 立见. $\pi \in R_n^{(\mathrm{I}_{rr})}$，当且仅当，$\pi(A)'' = B(\mathscr{H}_n)$，即 $\pi(A)$ 的单位球在 $(S$，强算子$)$ 中稠，这里 S 是 $B(\mathscr{H}_n)$ 的单位球. $(S$，强算子$)$ 是 Polish 空间，设 d 为相应的距离，其可数稠集为 $\{b_k\}$. 又设 $\{a_k\}$ 是 A 单位球的可数稠集，则

$$R_n^{(\mathrm{I}_{rr})} = \bigcap_{k,p} \bigcup_m \{\pi \in R_n | d(\pi(a_m), b_k) < p^{-1}\}.$$

所以，$R_n^{(\psi)}$ 是 R_n 的 G_δ 子集。 证毕。

今对 $n=\infty,1,2,\cdots$，又命

$E_n=\{(\pi,\xi)|\pi\in R_n,\ \xi\in\Gamma_n$，且 ξ 是 $\pi(A)$ 的循环矢$\}$。这里 $\Gamma_n=\{\xi\in\mathscr{H}_n|\|\xi\|=1\}$。

引理 11.8.3 E_n 是 $R_n\times\Gamma_n$ 的 G_δ 子集，从而依诱导拓扑，E_n 是 Polish 空间。

证．设 $\{a_k\}$ 是 A 的可数稠集，$\{\xi_k\}$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的可数稠集，则 $E_n=\bigcap\limits_{i,j}\bigcup\limits_k\{(\pi,\xi)\in R_n\times\Gamma_n|\|\pi(a_k)\xi-\xi_j\|<i^{-1}\}$。所以，$E_n$ 是 $R_n\times\Gamma_n$ 的 G_δ 子集。 证毕。

今命 $E=\bigcup\{E_n|n=\infty,1,2,\cdots\}$，它也是 Polish 空间，且每个 E_n 是 E 的既闭又开子集。并定义映象 $\varPsi:E\to\mathscr{S}$，即 $\varPsi(\pi,\xi)(a)=\langle\pi(a)\xi,\xi\rangle$，$\forall a\in A$。

引理 11.8.4 $\varPsi$ 是 E 到 $\mathscr{S}$ 上的连续映象。

证．连续性显然．今设 $\varphi\in\mathscr{S}$，相应有 A 的循环 $*$ 表示 $\{\pi_\varphi,\mathscr{H}_\varphi,1_\varphi\}$。设 $\dim\mathscr{H}_\varphi=n$，$u$ 是 $\mathscr{H}_\varphi$ 到 $\mathscr{H}_n$ 上的酉算子，并命 $\pi=u\pi_\varphi u^*\in R_n$，则

$$\varphi(a)=\langle\pi_\varphi(a)1_\varphi,1_\varphi\rangle=\langle\pi(a)\xi,\xi\rangle=\varPsi(\pi,\xi)(a)$$
$$\forall a\in A,$$

这里 $\xi=u1_\varphi\in\Gamma_n$。因此，$\varPsi(E)=\mathscr{S}$。证毕。

引理 11.8.5 设 $\Lambda\subset\mathscr{S}$，如果 $\varPsi^{-1}(\Lambda)$ 是 E 的 Sousline 或 Borel 子集，则 Λ 也是 $\mathscr{S}$ 的 Sousline 或 Borel 子集。

证．依引理 11.8.4，$\varPsi$ 把 E 的 Sousline 子集变成 $\mathscr{S}$ 的 Sousline 子集。从而，如果 $\varPsi^{-1}(\Lambda)$ 是 E 的 Sousline 子集，则 $\Lambda=\varPsi(\varPsi^{-1}(\Lambda))$ 是 $\mathscr{S}$ 的 Sousline 子集。

如果 $\varPsi^{-1}(\Lambda)$ 是 E 的 Borel 子集，则 $(E\backslash\varPsi^{-1}(\Lambda))$ 也是 E 的 Borel 子集。依前段，Λ 及 $\varPsi(E\backslash\varPsi^{-1}(\Lambda))=(\mathscr{S}\backslash\Lambda)$ 都是 $\mathscr{S}$ 的 Sousline 子集。因此，Λ 是 $\mathscr{S}$ 的 Borel 子集。 证毕。

定理 11.8.6 设 $\varphi(\in\varphi)$ 产生 A 的 $*$ 表示是 $\{\pi_\varphi,\mathscr{H}_\varphi\}$，则 $\mathscr{S}(t)=\{\varphi\in\mathscr{S}|\pi_\varphi(A)''$ 是(t)型的 vN 代数$\}$是 $\mathscr{S}$ 的 Borel 子集，

这里 (t) 可以是因子，有限，半有限，真无限，$(\mathrm{I}_k)(k=\infty, 1, 2, \cdots)$，$(\mathrm{I})$，$(\mathrm{II}_1)$，$(\mathrm{II}_\infty)$，$(\mathrm{II})$，$(\mathrm{III})(c)$ 及 (I_{tr})。

证．对 $n=\infty, 1, 2, \cdots$，依命题 11.8.2，$(R_n^{(t)}\times \Gamma_n)$ 是 $(R_n\times \Gamma_n)$ 的 Borel 子集．因此，$\bigcup_n((R_n^{(t)}\times\Gamma_n)\cap E_n)$ 是 E 的 Borel 子集。

如果 $(\pi, \xi)\in(R_n^{(t)}\times\Gamma_n)\cap E_n$，则 π 是 A 在 $\mathscr{H}_n$ 中的 (t) 型 $*$ 表示，并且有循环矢 ξ．显然 A 的循环 $*$ 表示 $\{\pi, \mathscr{H}_n, \xi\}$ 酉等价 $\varphi=\Psi(\pi, \xi)$ 产生的 $*$ 表示，因此，$\Psi(\pi, \xi)\in\mathscr{S}^{(t)}$．反之，如果 $\varphi\in\mathscr{S}^{(t)}$，依引理 11.8.4，有 $(\pi, \xi)\in E_n$，使得 $\Psi(\pi, \xi)=\varphi$．由于 $\langle\pi(a)\xi, \xi\rangle=\langle\pi_\varphi(a)1_\varphi, 1_\varphi\rangle$，$\forall a\in A$，因此，循环 $*$ 表示 $\{\pi, \mathscr{H}_n, \xi\}$ 与 $\{\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi, 1_\varphi\}$ 酉等价．从而，π 是 A 在 $\mathscr{H}_n$ 中的 (t) 型 $*$ 表示，且以 ξ 为循环矢，即说明 $(\pi, \xi)\in(R_n^{(t)}\times\Gamma_n)\cap E_n$．所以，

$$\Psi^{-1}\mathscr{S}^{(t)}=\bigcup_n((R_n^{(t)}\times\Gamma_n)\cap E_n)$$

是 E 的 Borel 子集．再依引理 11.8.5，$\mathscr{S}^{(t)}$ 是 $\mathscr{S}$ 的 Borel 子集．证毕。

注　本节见参考文献 [34]，[84]，[95]。

第十二章 (AF) 代数

本章考察一类特殊而又重要的 c^*-代数——逼近有限维的 c^*-代数，简称为 (AF) 代数，它是 (UHF) 代数(3.8.2)的直接推广.

§1 讨论(AF)代数定义的等价说法(12.1.11)，这是 J. Glimm 结果的直接推广. §2 对于(AF)代数，G. A. Elliott 引进维数的概念，这作法与 F. J. Murray 和 J. von Neumann 的维数理论相似，并且指出维数值域的不变量将完全刻划 (AF) 代数 (12.2.8, 12.2.9)，由此给出 (AF) 代数的同构定理(12.2.10). (AF) 代数是有限维 c^*-代数递增列的闭包，§3 指出，(AF)代数不仅与这递增列的每个有限维 c^*-代数的构造有关，而且与这递增列嵌入方式有关. 为此，O. Bratteli 引进 (AF) 代数的图 (12.3.3)，能够清楚地表达上述关系. §4 利用图来讨论 (AF) 代数的理想与素理想，指出它们与图的某类子集有着一一对应的关系 (12.4.5, 12.4.8). §5 由 (AF) 代数引进维数群(一种序交换群)，这是很为重要的概念 (12.5.1)，并且还讨论了维数群的序理想与素序理想 (12.5.6, 12.5.9). §6 指出维数群的(序同构)分类，将导致 (AF) 代数的"稳定"分类(12.6.7).

§1. (AF) 代数的定义

定义 12.1.1 c^*-代数 A 称为逼近有限维的，简称为 (AF) 的，指存在递增的有限维 * 子代数列 $\{A_n\}$，使得 $\bigcup_n A_n$ 在 A 中稠，即

$$\overline{\bigcup_n A_n} = A.$$

命题 12.1.2 设 $A = \bigcup_n A_n$ 是(AF)代数，则 A 有单位元 1，当且仅当，存在 n_0，使得 $1_n = 1$，$\forall n \geqslant n_0$，这里 1_n 是 A_n 的单位元。

证．充分性显然．今设 A 有单位元 1，如果有子列 $\{n_k\}$，使得 $1_{n_k} \neq 1$，$\forall k$，由于 $\{A_n\}$ 是递增的，因此，$1_n \neq 1$，$\forall n$．取 $x \in A_{n_0}$，使得 $\|x - 1\| < 1$． 无妨设 $A \subset B(\mathscr{H})$，及 1 是 $\mathscr{H}$ 中的恒等算子，于是可取 $\xi \in (1 - 1_{n_0})\mathscr{H}$，$\|\xi\| = 1$．但

$$1 > \|1 - x\| \geqslant \|\xi - x\xi\| = \|\xi - x1_{n_0}\xi\| = \|\xi\| = 1$$

矛盾． 证毕．

引理 12.1.3 对任意的 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$，存在 $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ 具有下面的性质：如果 A 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 c^*-代数，p 是 $\mathscr{H}$ 中的投影，又设有 $a \in A$，而 $\|a - p\| < \gamma$，则有 A 的投影 q，使得 $\|p - q\| < \varepsilon$．

证．无妨认为 $a^* = a$．设 $\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$，及函数 $|\lambda^2 - \lambda|$ 在 $([-2, 2]\backslash\{(-\delta, \delta) \cup (1 - \delta, 1 + \delta)\})$ 中的极小值为 $m(> 0)$．今取 $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$，使得 $\gamma^2 + 3\gamma \leqslant \min\left\{\frac{3\varepsilon}{2}, \frac{m}{2}\right\}$． 考察

$$\begin{aligned}\|a^2 - a\| &= \max\{|\lambda^2 - \lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}\\ &\leqslant \|a^2 - ap - pa + p\| + \|p(a - p)\|\\ &\quad + \|(a - p)p\| + \|p - a\|\\ &\leqslant \|(a - p)^2\| + 3\|a - p\| < \gamma^2 + 3\gamma,\end{aligned}$$

当 $|\lambda| > 2$ 时，$|\lambda^2 - \lambda| > 1$，因此，$\sigma(a) \subset [-2, 2]$． 又当 $\lambda \in ([-2, 2]\backslash\{(-\delta, \delta) \cup (1 - \delta, 1 + \delta)\})$ 时，$|\lambda^2 - \lambda| \geqslant m$，因此，

$$\sigma(a) \subset (-\delta, \delta) \cup (1 - \delta, 1 + \delta).$$

作连续函数 f，使得： 当 $\lambda \in (-\delta, \delta)$时，$f(\lambda) = 0$； 当 $\lambda \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ 时，$f(\lambda) = 1$． 于是，$q = f(a)$ 是 A 的投影，

并且 $\|p-q\| \leqslant \|p-a\|+\|a-q\|<\gamma+\delta<\varepsilon$。　证毕。

引理 12.1.4　设 $\varepsilon>0$，n 是正整数，存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon, n)>0$ 具有下面的性质：如果 A 是 c^*-代数，$p_1, \cdots, p_n$ 是 A 的投影，满足 $\|p_i p_j\|<\delta_1, \forall i \neq j$，则有 A 的相互直交的投影 $q_1, \cdots, q_n$，使得 $\|p_i-q_i\|<\varepsilon$，$1 \leqslant i \leqslant n$。

证．对 n 使用归纳法．当 $n=1$ 时显然，这时 $\delta_1(\varepsilon, 1)$ 可以是任意的正数．今设对 n 有上面所说的 $\delta_1(\varepsilon, n)$．对 $(n+1)$ 及 $\varepsilon>0$，令

$$\delta_1(\varepsilon, n+1)=\min \left\{\frac{\gamma(\varepsilon)}{6 n}, \delta_1\left(\frac{\gamma(\varepsilon)}{6 n}, n\right)\right\}.$$

这里 $\gamma(\varepsilon)$ 如引理 12.1.3，并无妨设 $\varepsilon \in\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 及 $\gamma(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$。如果 $p_1, \cdots, p_{n+1}$ 是 A 的投影，并且 $\|p_i p_j\|<\delta_1(\varepsilon, n+1)$，$1 \leqslant i \neq j \leqslant n+1$，于是，$\|p_i p_j\|<\delta_1\left(\frac{\gamma(\varepsilon)}{6 n}, n\right)$，$1 \leqslant i \neq j \leqslant n$．依归纳假定，有 A 的相互直交的投影 $q_1, \cdots, q_n$，使得 $\|p_i-q_i\|<\frac{\gamma(\varepsilon)}{6 n}$，$1 \leqslant i \leqslant n$．　令 $q=\sum_{i=1}^n q_i$，则

$$\|p_{n+1}-(1-q) p_{n+1}(1-q)\| \leqslant 3\|p_{n+1} q\| \leqslant 3 \sum_{i=1}^n\|p_{n+1} q_i\|$$

$$<3\left\{\sum_{i=1}^n\|p_{n+1} p_i\|+\frac{\gamma(\varepsilon)}{6}\right\}<3 n \delta_1(\varepsilon, n+1)+\frac{\gamma(\varepsilon)}{2}$$

$\leqslant \gamma(\varepsilon)$．

设 B 是由 $\{q_1, \cdots, q_n, (1-q) p_{n+1}(1-q)\}$ 生成的 A 的交换 c^*-子代数，用引理 12.1.3 于 B，$\varepsilon>0$ 及 p_{n+1}，则有 B 的投影 q_{n+1}，使得 $\|p_{n+1}-q_{n+1}\|<\varepsilon$．由于 B 是交换的，$q_{n+1} q_i$ 仍然是投影，并且

$$\|q_{n+1} q_i\|<\|p_{n+1} q_i\|+\varepsilon<\|p_{n+1} p_i\|+2 \varepsilon<1.$$

因此，$q_{n+1} q_i=0$，$1 \leqslant i \leqslant n$．所以，$q_1, \cdots, q_{n+1}$ 满足要求．证毕。

引理 12.1.5 设 A 是 c^*-代数，$\{p_1,\cdots,p_n\}$，$\{q_1,\cdots,q_n\}$ 是 A 的相互直交投影族，并且 $\|p_i-q_i\|<1$，$1\leqslant i\leqslant n$，则存在 A 的部分等距元 w，使得

$$(p_iwq_i)^*\cdot(p_iwq_i)=q_i,\ (p_iwq_i)\cdot(p_iwq_i)^*=p_i,$$
$$1\leqslant i\leqslant n$$
$$w^*w=\sum_{i=1}^n q_i,\ ww^*=\sum_{i=1}^n p_i.$$

证．取 $\delta\in(0,1)$，使得 $\|p_i-q_i\|<\delta$，$1\leqslant i\leqslant n$．作实轴上的连续函数 f：当 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}(1-\delta)$ 时，$f(\lambda)=0$；当 $\lambda\geqslant 1-\delta$ 时，$f(\lambda)=\lambda^{-1}$；当 $\lambda\in\left(\frac{1-\delta}{2},1-\delta\right)$ 时，$f(\lambda)$ 呈线状，又命 B_i 是由 $\{p_i,p_iq_ip_i\}$ 生成的 A 的交换 c^*-子代数，Ω_i 是局部紧 Hausdorff 空间，使得 $B_i\cong C_0^\infty(\Omega_i)$，$1\leqslant i\leqslant n$．

对任意的 $\rho\in\Omega_i$，$\rho(p_i)$ 只取 0 或 1 的值．当 $\rho(p_i)=0$ 时，由于 $0\leqslant p_iq_ip_i\leqslant p_i$，因此，$\rho(p_iq_ip_i)=0$；当 $\rho(p_i)=1$ 时，由于 $\|p_iq_ip_i-p_i\|\leqslant\|q_i-p_i\|<\delta$，因此，$\rho(p_iq_ip_i)\in(1-\delta,1]$．于是，依 f 的定义，

$$f(\rho(p_iq_ip_i))\cdot\rho(p_iq_ip_i)=\rho(p_i),\ \forall\rho\in\Omega_i,$$

所以，$p_i=f(p_iq_ip_i)\cdot p_iq_ip_i$．记 $x_i=f(p_iq_ip_i)^{\frac{1}{2}}$，由于 B_i 是交换的，$p_i=p_iq_ip_ix_i^2=x_ip_iq_ip_ix_i=p_ix_iq_ix_ip_i$．

交换 p_i 与 q_i 的位置，如命 $y_i=f(q_ip_iq_i)^{\frac{1}{2}}$，则 $q_i=y_i^2q_ip_iq_i$．进而命 $w_i=p_ix_iq_i$，则 $w_iw_i^*=p_ix_iq_ix_ip_i=p_i$，$w_i^*w_i=q_ix_ip_ix_iq_i=y_i^2q_ip_iq_i\cdot p_ix_i^2q_i=y_i^2q_i(p_iq_ip_ix_i^2)q_i=y_i^2q_ip_iq_i=q_i$，$1\leqslant i\leqslant n$．最后令 $w=\sum_{i=1}^n w_i$ 即满足要求．　证毕．

引理 12.1.6 对任意的 $\varepsilon\in(0,1]$，正整数 n，存在 $\delta_2=\delta_2(\varepsilon,n)>0$ 具有下面的性质：如果 $\{p_1,\cdots,p_n\}$，$\{q_1,\cdots,q_n\}$ 是 c^*-代数 A 的相互直交的投影族，满足 $\|p_i-q_i\|<\delta_2$，$1\leqslant i\leqslant n$，则有 A 的部分等距元 w，使得

$$\left.\begin{array}{l}(p_iwq_i)^*\cdot(p_iwq_i)=q_i,\\(p_iwq_i)\cdot(p_iwq_i)^*=p_i\\\|p_i-p_iwq_i\|<\varepsilon\end{array}\right\}1\leqslant i\leqslant n.$$

以及 $w^*w=\sum_{i=1}^{n}q_i$，$ww^*=\sum_{i=1}^{n}p_i$。此外，如果 A 有单位元 1，并且 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，则 w 又能满足 $\|1-w\|<\varepsilon$。

证。令 $\delta_2(\varepsilon,n)=\frac{\varepsilon}{4n}$，如果 $\|p_i-q_i\|<\delta_2$，$1\leqslant i\leqslant n$，在引理 12.1.5 的证明中，取那里的 $\delta=\delta_2$，并保持所有的符号，则

$$\begin{aligned}\|p_i-w_i\|&=\|p_i(p_i-x_iq_i)\|\\&\leqslant\|x_iq_i-x_ip_i\|+\|(p_i-x_i)p_i\|\\&\leqslant\|x_i\|\cdot\|q_i-p_i\|+\|x_i-p_i\|.\end{aligned}$$

注意对任意的 $\rho\in\Omega_i$，如果 $\rho(p_i)=0$，则 $\rho(x_i)=0$；如果 $\rho(p_i)=1$，则 $\rho(x_i)\in[1,(1-\delta_2)^{-\frac{1}{2}})$。于是，$\|x_i\|<(1-\delta_2)^{-1}$，$\|p_i-x_i\|<(1-\delta_2)^{-1}-1=(1-\delta_2)^{-1}\delta_2$。因此，

$$\|p_i-p_iwq_i\|=\|p_i-w_i\|<2\delta_2(1-\delta_2)^{-1}<\varepsilon,$$
$$1\leqslant i\leqslant n.$$

如果还有 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，则如上所证，$\|1-w\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|p_i-w_i\|<2n\delta_2(1-\delta_2)^{-1}<\varepsilon$。　证毕。

引理 12.1.7　对任意的 $\varepsilon\in(0,1]$，存在 $\delta_3=\delta_3(\varepsilon)>0$ 具有下面的性质：如果 A 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 c^*-代数，p_1，p_2 是 A 的投影，q_1，q_2 是 $\mathscr{H}$ 中的投影，$a\in A$，$v\in B(\mathscr{H})$，满足

$$\|p_i-q_i\|<\delta_3,\ i=1,2,\ v^*v=q_1,$$
$$vv^*=q_2,\ \|v-a\|<\delta_3,$$

则有 $u\in A$，使得 $u^*u=p_1$，$uu^*=p_2$，$\|u-v\|<\varepsilon$。

证。令 $\delta_3=\delta_3(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{128}$，并设 B 是由 $\{p_2,\ p_2aa^*p_2\}$ 生成的 A 的交换 c^*-子代数，Ω 是局部紧 Hausdorff 空间，使得 $B\cong$

$C_0^\infty(\Omega)$. 又设

$$\Omega_1 = \{\rho \in \Omega \mid \rho(p_2) = 1\},$$
$$\Omega_2 = \{\rho \in \Omega \mid \rho(p_2) = 0\}.$$

于是，$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$，$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$，$\Omega_1$ 是Ω的既闭又开的紧子集。注意 $\|p_2 - p_2aa^*p_2\| \leqslant \|p_2 - aa^*\| \leqslant \|p_2 - q_2\| + \|q_2 - aa^*\| \leqslant \|p_2 - q_2\| + \|vv^* - va^*\| + \|va^* - aa^*\| < 4\delta_3 < 1$，于是

$$|\rho(p_2 - p_2aa^*p_2)| < 4\delta_3 < 1, \ \forall \rho \in \Omega. \tag{1}$$

从而可取 $x \in B_+$，使得

$$\rho(x^2) = \begin{cases} \rho(p_2aa^*p_2)^{-1}, & \text{如果 } \rho \in \Omega_1; \\ 0 & \text{, 如果 } \rho \in \Omega_2. \end{cases} \tag{2}$$

因此，

$$x^2p_2aa^*p_2 = p_2 \tag{3}$$

由于(1)，当 $\rho \in \Omega_1$ 时，

$$\rho(x^2) = [1 - \rho(p_2 - p_2aa^*p_2)]^{-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \rho(p_2 - p_2aa^*p_2)^n.$$

于是，依(1)，(2)，

$$\|x^2 - p_2\| = \max_{\rho \in \Omega_1} [1 - \rho(x^2)]$$
$$\leqslant \max_{\rho \in \Omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} |\rho(p_2 - p_2aa^*p_2)|^n$$
$$< \frac{4\delta_3}{1 - 4\delta_3} < 8\delta_3. \tag{4}$$

$$\|x\| \leqslant (1 - 4\delta_3)^{-\frac{1}{2}} \leqslant 2, \ \|x^2\| \leqslant (1 - 4\delta_3)^{-1} \leqslant 2, \tag{5}$$

$$\|x - p_2\| = \max_{\rho \in \Omega_1} \rho(x + p_2)^{-1} |\rho(x^2 - p_2)|$$
$$\leqslant \|x^2 - p_2\| < 8\delta_3, \tag{6}$$

令 $w = xp_2a$，依(3)，$ww^* = p_2$. 由此，w^*w 必为A的投影，并且依 $q_1 = v^*q_2v$，(4)，(5)，

$$\|w^*w - p_1\| \leqslant \|a^*p_2x^2p_2a - v^*p_2x^2p_2a\|$$
$$+ \|v^*p_2x^2p_2a - v^*p_2x^2p_2v\|$$

$$+\|v^*p_2x^2p_2v-q_1\|+\|q_1-p_1\|$$
$$\leqslant\|a-v\|\cdot\|a\|\cdot\|x^2\|+\|x^2\|\cdot\|a-v\|$$
$$+\|p_2x^2p_2-p_2\|+\|p_2-q_2\|+\|p_1-q_1\|$$
$$<2(1+\delta_3)\delta_3+2\delta_3+8\delta_3+2\delta_3$$
$$<16\delta_3=\delta_2\left(\frac{\varepsilon}{2},1\right).$$

这里 $\delta_2\left(\frac{\varepsilon}{2},1\right)=\frac{\varepsilon}{8}$（见引理 12.1.6 的证明）. 用引理 12.1.6 于 w^*w, p_1, $\frac{\varepsilon}{2}$ 及 $n=1$，便有 A 的部分等距元 w_1，使得

$$w_1^*w_1=p_1,\quad w_1w_1^*=w^*w,$$
$$\|w_1-w^*w\|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

令 $u=ww_1$，则 $u^*u=p_1$，$uu^*=p_2$，并且由 $w=xp_2a$，$w=ww^*w$，$v=q_2v$，(5)，(6)，(7)，

$$\|u-v\|\leqslant\|ww_1-w\|+\|w-v\|$$
$$\leqslant\|w_1-w^*w\|+\|v-p_2v\|$$
$$+\|p_2v-xp_2v\|+\|xp_2v-xp_2a\|$$
$$\leqslant\|w_1-w^*w\|+\|q_2-p_2\|$$
$$+\|p_2-x\|+\|x\|\cdot\|v-a\|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\delta_3+8\delta_3+2\delta_3<\varepsilon.$$

证毕.

引理 12.1.8 对任意的 $\varepsilon>0$，正整数 n，存在 $\delta_4=\delta_4(\varepsilon,n)>0$ 具有下面的性质：如果 A 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的 c^*-代数，$\{e_{ij}^{(k)}\mid 1\leqslant i,j\leqslant n_k,1\leqslant k\leqslant m\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的矩阵单位，即

$$(e_{ij}^{(k)})^*=e_{ji}^{(k)},\quad e_{ij}^{(k)}e_{i'j'}^{(k')}=\delta_{kk'}\delta_{ji'}e_{ij'}^{(k)},\quad\forall i,j,k,i',j',k'.$$

这里 $n=n_1+\cdots+n_m$，并且如果有 A 的元族 $\{a_{ij}^{(k)}\}$，使得 $\|e_{ij}^{(k)}-a_{ij}^{(k)}\|<\delta_4$，$\forall i,j,k$，则有 A 的矩阵单位 $\{q_{ij}^{(k)}\}$，使得 $\|e_{ij}^{(k)}-q_{ij}^{(k)}\|<\varepsilon$，$1\leqslant i,j\leqslant n_k$，$1\leqslant k\leqslant m$. 此外，如果 $\sum\limits_{i,k}e_{ii}^{(k)}=1$

($\mathscr{H}$ 中的恒等算子)，则也有 $1\in A$，及 $\sum_{i,k} q_{ii}^{(k)}=1$。

证. 首先设 $\delta_4\leqslant\gamma(\varepsilon_1)$，这里 $\gamma(\cdot)$ 定义如引理 12.1.3，而 ε_1 待定，则有 A 的投影 $p_{ii}^{(k)}$，使得 $\|e_{ii}^{(k)}-p_{ii}^{(k)}\|<\varepsilon_1$，$\forall i,k$. 于是 $\|p_{ii}^{(k)}p_{jj}^{(l)}\|<2\varepsilon_1$，$\forall(i,k)\neq(j,l)$. 再设 $\varepsilon_1<\delta_1(\varepsilon_2,n)$，这里 $\delta_1(\cdot,\cdot)$ 定义如引理 12.1.4，而 ε_2 待定，则有 A 的相互直交的投影 $\{q_{ii}^{(k)}\}_{i,k}$，使得 $\|q_{ii}^{(k)}-p_{ii}^{(k)}\|<\varepsilon_2$，$\forall i,k$. 由此，$\|q_{ii}^{(k)}-e_{ii}^{(k)}\|<\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\forall i,k$. 注意

$$e_{1i}^{(k)*}e_{1i}^{(k)}=e_{ii}^{(k)},\quad e_{1i}^{(k)}e_{1i}^{(k)*}=e_{11}^{(k)},$$

$$\|q_{ii}^{(k)}-e_{ii}^{(k)}\|<\varepsilon_1+\varepsilon_2,\quad \|q_{11}^{(k)}-e_{11}^{(k)}\|<\varepsilon_1+\varepsilon_2,$$

$$\|a_{1i}^{(k)}-e_{1i}^{(k)}\|<\delta_4\leqslant\gamma(\varepsilon_1)<\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

今取 $\varepsilon_1+\varepsilon_2<\delta_3(\varepsilon_3)$，这里 $\delta_3(\cdot)$ 如引理 12.1.7，而 ε_3 待定，则存在 $q_{1i}^{(k)}\in A$，使得

$$q_{1i}^{(k)*}q_{1i}^{(k)}=q_{ii}^{(k)},\quad q_{1i}^{(k)}q_{1i}^{(k)*}=q_{11}^{(k)},\quad \|q_{1i}^{(k)}-e_{1i}^{(k)}\|<\varepsilon_3.$$

命 $q_{ij}^{(k)}=q_{1i}^{(k)*}q_{1j}^{(k)}$，即见 $\{q_{ij}^{(k)}\}$ 是 A 的矩阵单位，且当 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ 充分小时，即有 $\|q_{ij}^{(k)}-e_{ij}^{(k)}\|<\varepsilon$，$\forall i,j,k$.

此外，如果 $\sum_{i,k} e_{ii}^{(k)}=1$，无妨设 $n\varepsilon<1$，则 $\left\|\sum_{i,k} q_{ii}^{(k)}-1\right\|<n\varepsilon<1$，因此，$\sum_{i,k} q_{ii}^{(k)}=1$. 证毕.

引理 12.1.9 设 A 是有单位元的 c^*-代数，则 A 是 (AF) 的，当且仅当，满足：1) A 是可分的；2) 对 A 的任意有限个元 $a_1,\cdots,a_n$，及 $\varepsilon>0$，有 A 的有限维 * 子代数 B 及 B 的元 $b_1,\cdots,b_n$，使得

$$\|b_i-a_i\|<\varepsilon,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

这时并可从 A 的任意有限维 * 子代数 A_1 出发，找到 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots\subset A$，每个 A_n 都是有限维 * 子代数，且 $1\in A_n$，$\forall n\geqslant 2$，使得 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$.

证. 必要性显然. 今证充分性. 设 $\{x_n\}$ 是 A 的以 0 为中心，

$\frac{1}{2}$ 为半径开球的可数稠集，且 $x_1 = 0$。设 A_1 是 A 的有限维 * 子代数(例 $A_1 = [1]$，或者 A_1 为已给定的)，及 $a_1^{(1)} = 0 (\in A_1)$，则 $\|a_1^{(1)} - x_1\| < 2^{-1}$。今假定已找到 $A_1 \subset \cdots \subset A_n$，$A_1, \cdots, A_n$ 都是 A 的有限维 * 子代数，且 $1 \in A_k$，$2 \leqslant k \leqslant n$，并有 $a_1^{(k)}, \cdots, a_k^{(k)} \in A_k$，使得 $\|a_i^{(k)} - x_i\| < 2^{-k}$，$1 \leqslant i \leqslant k$，$1 \leqslant k \leqslant n$。设 $\{e_{ij}^{(k)}\}$ 是 A_n 的矩阵单位元，且为 A_n 的基，自然 $\sum\limits_{i,k} e_{ii}^{(k)} = 1$ (见命题 6.7.4)。用充分性条件于 $\{x_1, \cdots, x_{n+1}, e_{ij}^{(k)}, \forall i, j, k\}$，并由引理 12.1.8，将有 A 的有限维 * 子代数 B，B 的矩阵单位 $\{f_{ij}^{(k)}\}$，B 的元 $b_1, \cdots, b_{n+1}$，使得 $\sum\limits_{i,k} f_{ii}^{(k)} = 1$，$\|f_{ij}^{(k)} - e_{ij}^{(k)}\| < \delta$，$\forall i, j, k$，$\|x_i - b_i\| < \varepsilon$，$1 \leqslant i \leqslant n+1$，这里 δ, ε 待定。当 δ 足够小时，依引理 12.1.6，将有 A 的部分等距元 w，使得

$$(e_{11}^{(k)} w f_{11}^{(k)})^* \cdot (e_{11}^{(k)} w f_{11}^{(k)}) = f_{11}^{(k)},$$

$$(e_{11}^{(k)} w f_{11}^{(k)}) \cdot (e_{11}^{(k)} w f_{11}^{(k)})^* = e_{11}^{(k)}$$

$$\|e_{11}^{(k)} - e_{11}^{(k)} w f_{11}^{(k)}\| < \varepsilon, \quad \forall k. \tag{1}$$

命 $u = \sum\limits_{j,k} e_{j1}^{(k)} w f_{1j}^{(k)}$，易见它是 A 的酉元，并且 $u f_{ij}^{(k)} u^* = e_{ij}^{(k)}$，$\forall i, j, k$。命 $A_{n+1} = uBu^*$，则 $1 \in A_{n+1}$，$A_n \subset A_{n+1}$。又令 $a_i^{(n+1)} = ub_iu^*$，则

$$\begin{aligned}
\|a_i^{(n+1)} - x_i\| &\leqslant \|b_i - x_i\| + \|a_i^{(n+1)} - b_i\| \\
&< \varepsilon + \|ub_iu^* - b_i\| \\
&= \varepsilon + \Big\| \sum_{i,k,l,m} [f_{ii}^{(k)} b_i f_{ll}^{(m)} \\
&\qquad - e_{i1}^{(k)} w f_{1i}^{(k)} b_i f_{l1}^{(m)} w^* e_{1l}^{(m)}] \Big\| \\
&\leqslant \varepsilon + (\dim A_n)^2 \sup_{i,k,l,m} \|f_{ii}^{(k)} b_i f_{ll}^{(m)} - e_{i1}^{(k)} w f_{1i}^{(k)} b_i \\
&\qquad f_{l1}^{(m)} w^* e_{1l}^{(m)}\|.
\end{aligned}$$

无妨设 $\varepsilon < 1/2$，由于 $\|x_i\| < 1/2$，$\|b_i - x_i\| < \varepsilon$，于是 $\|b_i\| < 1$。由此

$$\|f_{j1}^{(k)}b_i f_{1l}^{(m)} - e_{j1}^{(k)} w f_{1j}^{(k)} b_i f_{1l}^{(m)} w^* e_{1l}^{(m)}\|$$
$$\leqslant \|f_{j1}^{(k)}b_i f_{1l}^{(m)} - f_{j1}^{(k)} b_i f_{11}^{(m)} w^* e_{1l}^{(m)}\|$$
$$+ \|(f_{j1}^{(k)} - e_{j1}^{(k)} w f_{11}^{(k)}) b_i f_{11}^{(m)} w^* e_{1l}^{(m)}\|$$
$$\leqslant 2\sup_{s,t}\|f_{s1}^{(t)} - e_{s1}^{(t)} w f_{1s}^{(t)}\|,\quad \forall j, k, l, m.$$

依 $\|f_{s1}^{(t)} - e_{s1}^{(t)}\| < \delta$，$\|e_{1s}^{(t)} - f_{1s}^{(t)}\| < \delta$，及 (1)

$$\|f_{s1}^{(t)} - e_{s1}^{(t)} w f_{1s}^{(t)}\|$$
$$< \delta + \|e_{s1}^{(t)} e_{11}^{(t)} e_{1s}^{(t)} - e_{s1}^{(t)} e_{11}^{(t)} w f_{11}^{(t)} f_{1s}^{(t)}\|$$
$$< 2\delta + \|e_{11}^{(t)} f_{1s}^{(t)} - e_{11}^{(t)} w f_{11}^{(t)} f_{1s}^{(t)}\|$$
$$< 2\delta + \varepsilon,\quad \forall s, t.$$

因此，当 δ，ε 充分小，就有 $\|a_i^{(n+1)} - x_i\| < 2^{-n-1}$，$1 \leqslant i \leqslant n+1$. 递推之，我们便得到 A 的有限维 * 子代数递增列 $\{A_n\}$，并且 $1 \in A_n$，$\forall n \geqslant 2$，使得 $A = \overline{\bigcup_n A_n}$. 证毕.

引理 12.1.10 设 A 是 C^*-代数，则 A 是 (AF) 的，当且仅当，$(A \dotplus \mathbb{C})$ 是 (AF) 的.

证. 必要性显然. 反之，设 $(A \dotplus \mathbb{C})$ 是 (AF) 的，于是有 $(A \dotplus \mathbb{C})$ 的有限维 * 子代数递增列 $\{B_n\}$，使得 $A \dotplus \mathbb{C} = \overline{\bigcup_n B_n}$，且 $1 \in B_n$，$\forall n$. 命 $A_n = B_n \cap A$，自然 $\{A_n\}$ 是 A 的有限维 * 子代数的递增列. 对任意的 $a \in A$，有 $b_n \in B_n$，$b_n \to a$. 由于 $B_n = A_n \dotplus \mathbb{C}$，可写 $b_n = a_n + \lambda_n$，其中 $a_n \in A_n$，$\lambda_n \in \mathbb{C}$，$\forall n$. 但 A 是 $(A \dotplus \mathbb{C})$ 的亏维数为 1 的闭子空间，因此，$a_n \to a$. 即 $A = \overline{\bigcup_n A_n}$. 证毕.

定理 12.1.11 设 A 是 C^*-代数，则 A 是 (AF) 的，必须且只须，满足:

1) A 是可分的;

2) 对 A 的任意有限个元 $a_1, \cdots, a_n$ 及 $\varepsilon > 0$，存在 A 的有限维 * 子代数 B 及 B 的元 $b_1, \cdots, b_n$，使得

$$\|a_i - b_i\| < \varepsilon,\quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

这时若任意给定 A 的有限维 * 子代数 A_1，则可找到 A 的有限维 *

子代数列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$，使得 $A = \overline{\bigcup_n A_n}$。

证。由引理 12.1.9，12.1.10 立见。

命题 12.1.12 设 A 是(AF)代数，p 是 A 的投影，则 pAp 也是(AF)代数，且有单位元 p。

证。对任意的 $x_1, \cdots, x_n \in pAp$，及 $\varepsilon > 0$，依定理 12.1.11，有 A 的有限维 * 子代数 B 及 B 的元 $y_1, \cdots, y_n, a$，使得

$$\|x_i - y_i\| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$
$$\|p - a\| < r(\delta_2(\varepsilon, 1)).$$

这里 $r(\cdot)$ 如引理 12.1.3，$\delta_2(\cdot,\cdot)$ 如引理 12.1.6。于是有 B 的投影 q，使得 $\|p - q\| < \delta_2(\varepsilon, 1)$。进而又有 A 的部分等距元 w，使得

$$ww^* = q, \quad w^*w = p, \quad \|p - w\| < \varepsilon.$$

令 $C = w^*Bw$，由于 $ww^* = q \in B$，$pw^* = w^*$，$wp = w$，因此，C 是 pAp 的有限维 * 子代数，并且

$$\begin{aligned}\|x_i - w^*y_iw\| &\leqslant \|x_i - py_ip\| + \|py_ip - w^*y_iw\| \\ &\leqslant \|x_i - y_i\| + \|(p - w^*)y_ip\| \\ &\quad + \|w^*y_i(p - w)\| \\ &< \varepsilon + 2\varepsilon\|y_i\| \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon(\|x_i\| + \varepsilon), \\ &\qquad 1 \leqslant i \leqslant n.\end{aligned}$$

依定理 12.1.11，pAp 是(AF)的。 证毕。

定理 12.1.13 设 A 是有单位元的 C^*-代数，则 A 是 (UHF) 的，必须且只须，满足：1) A 是可分的；2) 对 A 的任意有限个元 $a_1, \cdots, a_n$ 及 $\varepsilon > 0$，存在 A 的有限维子因子 B 及 B 的元 $b_1, \cdots, b_n$，使得 $\|a_i - b_i\| < \varepsilon$，$1 \leqslant i \leqslant n$。这时如果写 $A = \overline{\bigcup_n A_n}$ 如定义 3.8.2，则 A_1 可以是任意给定的。

证明与引理 12.1.9 完全相似。

注 本节见参考文献 [8]，[19]，[41]。

§2. 维数与同构定理

考虑复数域上的 * 代数 A. A 的元 p 称为投影，指 $p^*=p=p^2$. 记 A 的投影全体为 $P=P(A)$. 此外，我们假定 A 满足：如果 $a\in A$, $a^*a=0$, 则 $a=0$.

定义 12.2.1 $p, q\in P$ 称为等价的，记作 $p\sim q$, 指存在 $v\in A$, 使得 $p=v^*v$, $q=vv^*$.

这时必有 $vp=v$, $v^*q=v^*$. 事实上，

$$(v-vp)^*(v-vp)=v^*v-v^*vp-pv^*v+pv^*vp$$
$$=0.$$

依所设，$v=vp$. 同证 $v^*q=v^*$.

由此，$\sim$ 是 P 中的等价关系. 对每个 $p\in P$, 有等价类 $\tilde{p}$.

定义 12.2.2 记 P 的等价类全体为 $E=E(A)$. $P(A)$ 到 $E(A)$ 上的正则映象 $d(\cdot)$ 称为 P 上的维数.

定义 12.2.3 E 的元 $\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_n$ 称为可加的，指存在 $p_i\in\tilde{p}_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, 使得 $p_ip_j=0$, $\forall i\neq j$. 这时并定义 $\tilde{p}_1+\cdots+\tilde{p}_n=(p_1+\cdots+p_n)^\sim$.

我们说这加法并不依赖于 $\{p_i\}$ 的选择. 事实上，若另有 $q_i\in\tilde{p}_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, 使得 $q_iq_j=0$, $\forall i\neq j$. 由于 $p_i\sim q_i$, 因此有 $v_i\in A$, 使得 $v_i^*v_i=p_i$, $v_iv_i^*=q_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. 令 $v=v_1+\cdots+v_n$, 由于

$$v_i^*v_j=v_i^*q_iq_jv_j=0,\quad v_jv_i^*=v_jp_jp_iv_i^*=0,$$
$$\forall i\neq j.$$

因此，

$$v^*v=\sum_{i=1}^n p_i,\qquad vv^*=\sum_{i=1}^n q_i,$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^\sim=\left(\sum_{i=1}^n q_i\right)^\sim.$$

定义 12.2.4 设 A, B 是前述的 * 代数，$E(A)$ 与 $E(B)$ 称为同构的，指存在 $E(A)$ 到 $E(B)$ 上的一一映象 Ψ，使得 $E(A)$ 的元 $\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n$ 是可加的，当且仅当，$E(B)$ 的元 $\Psi(\tilde{p}_1), \cdots, \Psi(\tilde{p}_n)$ 是可加的，并且 $\Psi(\tilde{p}_1 + \cdots + \tilde{p}_n) = \Psi(\tilde{p}_1) + \cdots + \Psi(\tilde{p}_n)$.

显然，如果 Φ 是 A 到 B 上的 * 代数同构，令 $\Psi(\tilde{p}) = \widetilde{\Phi(p)}$，则 Ψ 是 $E(A)$ 到 $E(B)$ 上的同构.

定义 12.2.5 * 代数 A 称为 (LF) 的，指 $A = \bigcup\limits_n A_n$，这里 $A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$，并且每个 A_n 是有限维的 c^*-代数.

特别地，(AF) 代数包含一个稠的 (LF) * 子代数.

引理 12.2.6 设 $A = \bigcup\limits_n A_n$ 是 (LF) 代数，又 B, C 是 A 的有限维 c^*-子代数，Φ 是 B 到 C 上的 * 同构，使得 $p \sim \Phi(p)$，$\forall p \in P \cap B$，则存在 A（如果 A 有单位元）或 $(A \dotplus C)$ 的酉元 u，使得 $ubu^* = \Phi(b)$，$\forall b \in B$.

证. 设 $\{e_{ij}^{(k)}\}$ 是 B 矩阵单位的基，于是，$\{f_{ij}^{(k)} = \Phi(e_{ij}^{(k)})\}$ 也是 C 矩阵单位的基. 依假定，有 $v_k \in A$，使得 $v_k^* v_k = e_{11}^{(k)}$，$v_k v_k^* = f_{11}^{(k)}$，$\forall k$. 令

$$w = \sum_{i,k} f_{i1}^{(k)} v_k e_{1i}^{(k)}.$$

易见 $w^* w = e$，$ww^* = \Phi(e)$，这里 $e = \sum\limits_{i,k} e_{ii}^{(k)}$ 是 B 的单位元，$\Phi(e) = \sum\limits_{i,k} f_{ii}^{(k)}$ 是 C 的单位元，并且 $wbw^* = \Phi(b)$，$\forall b \in B$.

设 n 充分大，使得 w，$w^* \in A_n$. 因此，在 A_n 中，$e \sim \Phi(e)$. 依命题 6.3.2，有 $w' \in A_n$，使得

$$w'^* w' = 1_n - e, \quad w' w'^* = 1_n - \Phi(e),$$

这里 1_n 是 A_n 的单位元. 如果 1 是 A（如果 A 有单位元）或 $(A \dotplus C)$ 的单位元，则 $u = w + w' + (1 - 1_n)$ 是 A 或 $(A \dotplus C)$ 的酉

元，并且 $ubu^*=wbw^*=\Phi(b)$，$\forall b\in B$． 证毕．

引理 12.2.7 设 A_i 是 * 代数，$E_i=E(A_i)$，$i=1,2$，Ψ 是 E_2 到 E_1 上的同构映象．如果 B_2 是 A_2 的有限维 c^*-子代数，则存在 A_1 的有限维 c^*-子代数 B_1，及 B_1 到 B_2 上的 * 同构 Φ，使得对于 B_1 的任意投影 p，有 $\Psi(\widetilde{\Phi(p)})=\tilde{p}$．

证．设 $\{f_{ij}^{(k)}\}$ 是 B_2 矩阵单位的基，依 Ψ 的性质，有 A_1 的相互直交的投影族 $\{e_{ii}^{(k)}\}$，使得

$$\Psi(\widetilde{f_{ii}^{(k)}})=\widetilde{e_{ii}^{(k)}},\quad \forall i,k.$$

由于 $f_{ii}^{(k)}\sim f_{jj}^{(k)}$，因此，$e_{ii}^{(k)}\sim e_{jj}^{(k)}$，即有 $e_{i1}^{(k)}\in A_1$ 使得

$$e_{i1}^{(k)*}e_{i1}^{(k)}=e_{11}^{(k)},\quad e_{i1}^{(k)}e_{i1}^{(k)*}=e_{ii}^{(k)},\quad \forall i,k.$$

如果命 $e_{ij}^{(k)}=e_{i1}^{(k)}e_{j1}^{(k)*}$，易见 $\{e_{ij}^{(k)}\}$ 是矩阵单位．进而令 $B_1=[e_{ij}^{(k)}]$，$\Phi(e_{ij}^{(k)})=f_{ij}^{(k)}$，$\forall i,j,k$，则 Φ 是 B_1 到 B_2 上的 * 同构．

今若 p 是 B_1 的投影，则有某些 $e_{ii}^{(k)}$，记它们的和为 $\sum' e_{ii}^{(k)}$，使得 $p\sim\sum' e_{ii}^{(k)}$．于是，依 Ψ 的可加性，$\Psi(\widetilde{\Phi(p)})=\Psi(\widetilde{\sum' f_{ii}^{(k)}})=\sum'\Psi(\widetilde{f_{ii}^{(k)}})=\sum'\widetilde{e_{ii}^{(k)}}=\tilde{p}$． 证毕．

定理 12.2.8 设 $A=\bigcup\limits_n A_n$，$A'=\bigcup\limits_n A'_n$ 是 (LF) 代数，如果 $E=E(A)$ 与 $E'=E(A')$ 是同构的，则 A 与 A' 也是 * 代数同构的．

证．设法取子列 $\{m_k\}$，$\{n_k\}$，A 的有限维 c^*-子代数列 $\{B_k\}$，使得

$$A_{m_1}\subset B_1\subset A_{m_2}\subset B_2\subset\cdots\subset A_{m_k}\subset B_k\subset\cdots$$

并有 B_k 到 A'_{n_k} 上的 * 同构 Ψ_k，使得 $\Psi_{k+1}|B_k=\Psi_k$，$\forall k$，以及有交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
B_1 & \hookrightarrow & B_2 & \hookrightarrow\cdots\hookrightarrow & B_k & \hookrightarrow\cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\Psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\Psi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\Psi_k} & \\
A'_{n_1} & \hookrightarrow & A'_{n_2} & \hookrightarrow\cdots\hookrightarrow & A_{n_k} & \hookrightarrow\cdots
\end{array}$$

这里"$\hookrightarrow$"表示嵌入映象．由此即见 A 与 A' * 同构．

作法的步骤与原则如下：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_1 = A_{m_1} & \hookrightarrow & B_1 & \hookrightarrow & A_{m_2} & \hookrightarrow & B_2 & \hookrightarrow & A_{m_3} & \hookrightarrow & \cdots \\
\Big\downarrow \Phi_1 & & u_1 \big\downarrow & & G_2 \big\downarrow & & u_2 \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
 & & C_1 & & C_2' & & C_2 & & C_3' & & \\
 & & F_1 \big\downarrow & & u_2' \big\downarrow & & F_2 \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
B_1' & \hookrightarrow & A_{n_1}' & \hookrightarrow & B_2' & \hookrightarrow & A_{n_2}' & \hookrightarrow & B_3' & \hookrightarrow & \cdots
\end{array}$$

具体说来是这样的.

设 Ψ 是 E 到 E' 上的同构，$m_1 = 1$. 依引理 12.2.7，有 A' 的 $*$ 子代数 B_1'，及 A_{m_1} 到 B_1' 上的 $*$ 同构 Φ_1，使得对 A_{m_1} 的任意投影 p_1，有

$$\Psi(\tilde{p}_1) = \widetilde{\Phi_1(p_1)}. \tag{1}$$

自然可选 n_1，使得 $B_1' \subset A_{n_1}'$. 同样用引理 12.2.7，将有 A 的 $*$ 子代数 C_1 及 C_1 到 A_{n_1}' 上的 $*$ 同构 F_1，使得对 C_1 的任意投影 q_1，有

$$\Psi(\tilde{q}_1) = \widetilde{F_1(q_1)} \tag{2}$$

于是，有交换图

$$\begin{array}{ccc}
A_{m_1} & \xrightarrow{F_1^{-1}\circ\Phi_1} & C_1 \\
\Phi_1 \big\downarrow & & F_1 \big\downarrow \\
B_1' & \hookrightarrow & A_{n_1}'
\end{array}$$

且对 A_{m_1} 的任意投影 p_1，依(1)，(2)，

$$\widetilde{F_1^{-1}\circ\Phi_1(p_1)} = \Psi^{-1}(\widetilde{\Phi_1(p_1)}) = \tilde{p}_1.$$

用引理 12.2.6 于 A，A_{m_1}，$F_1^{-1}\circ\Phi_1(A_{m_1})$，则有 $(A \dotplus \mathbb{C})$ 的酉元 u_1，使得

$$u_1 a u_1^* = F_1^{-1}\circ\Phi_1(a), \quad \forall a \in A_{m_1}.$$

令 $B_1 = u_1^* C_1 u_1$，则 $B_1 \supset u_1^*(F_1^{-1}\circ\Phi_1(A_{m_1}))u_1 = A_{m_1}$. 因此得到 B_1 到 A_{n_1}' 上的 $*$ 同构 $\Psi_1(\cdot) = F_1(u_1 \cdot u_1^*)$，并且对 B_1 的任意投影 r_1，依(2)有

$$\Psi(\tilde{r}_1) = \Psi(\widetilde{u_1 r_1 u_1^*}) = \widetilde{F_1(u_1 r_1 u_1^*)} = \widetilde{\Psi_1(r_1)} \tag{3}$$

取 $m_2(>m_1)$，使得 $B_1\subset A_{m_2}$。依引理 12.2.7，有 A' 的 * 子代数 C'_2，及 A_{m_2} 到 C'_2 上的 * 同构 G_2，使得对 A_{m_2} 的任意投影 p_2，有

$$\Psi(\tilde{p}_2)=\widetilde{G_2(p_2)}. \tag{4}$$

于是有交换图

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \hookrightarrow & A_{m_2} \\ \Psi_1\downarrow & & G_2\downarrow \\ A'_{n_1} & \xrightarrow{G_2\circ\Psi_1^{-1}} & C'_2 \end{array}$$

并且对 A'_{n_1} 的任意投影 p'_1，依(3)，(4)，

$$\widetilde{G_2\circ\Psi_1^{-1}(p'_1)}=\Psi(\widetilde{\Psi_1^{-1}(p'_1)})=\tilde{p}'_1,$$

用引理 12.2.6 于 A'，A'_{n_1}，$G_2\circ\Psi_1^{-1}(A'_{n_1})$，则有 $(A'\dotplus\mathbb{C})$ 的酉元 u'_2，使得 $G_2\circ\Psi_1^{-1}(a')=u'_2a'u'^*_2$，$\forall a'\in A'_{n_1}$。令 $B'_2=u'^*_2C'_2u'_2$，则 $B'_2\supset u'^*_2(G_2\circ\Psi_1^{-1}(A'_{n_1}))u'_2=A'_{n_1}$。因此得到

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \hookrightarrow & A_{m_2} \\ \Psi_1\downarrow & & \Phi_2\downarrow \\ A'_{n_1} & \hookrightarrow & B'_2 \end{array},$$

这里 $\Phi_2(a)=u'^*_2G_2(a)u'_2$，$\forall a\in A_{m_2}$，并且对 A_{m_2} 的任意投影 p_2，依(4)，

$$\widetilde{\Phi_2(p_2)}=\widetilde{G_2(p_2)}=\Psi(\tilde{p}_2). \tag{5}$$

取 $n_2(>n_1)$，使得 $B'_2\subset A'_{n_2}$。依引理 12.2.7，有 A 的 * 子代数 C_2，及 C_2 到 A'_{n_2} 上的 * 同构 F_2，使得对 C_2 的任意投影 q_2，有

$$\Psi(\tilde{q}_2)=\widetilde{F_2(q_2)}. \tag{6}$$

重复前面的讨论，有 $(A\dotplus\mathbb{C})$ 的酉元 u_2，使得

$$F_2^{-1}\circ\Phi_2(a)=u_2au_2^*,\quad \forall a\in A_{m_2},$$

令 $B_2=u_2^*C_2u_2$，则 $B_2\supset A_{m_2}$，并且 $\Psi_2(\cdot)=F_2(u_2\cdot u_2^*)$ 是 B_2 到 A'_{n_2} 上的 * 同构，及对于 B_2 的任意投影 r_2，依(6)有，

$$\widetilde{\Psi_2(r_2)}=\Psi(\tilde{r}_2) \tag{7}$$

以及有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A_{m_1} & \hookrightarrow & B_1 & \hookrightarrow & A_{m_2} & \hookrightarrow & B_2 \\ \Phi_1 \downarrow & & \Psi_1 \downarrow & & \Phi_2 \downarrow & & \Psi_2 \downarrow \\ B'_1 & \hookrightarrow & A'_{n_1} & \hookrightarrow & B'_2 & \hookrightarrow & A'_{n_2}. \end{array}$$

如此继续下去，即可得证.

定理 12.2.9 (AF) 代数 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$ 与 $B=\overline{\bigcup_n B_n}$ 是 * 同构的，必须且只须，(LF) 代数 $\bigcup_n A_n$ 与 $\bigcup_n B_n$ 是 * 同构的.

证. 充分性显然. 今设 A 与 B * 同构. 依定理 12.2.8，只须证明 $E=E(A)$ 与 $E_1=E\left(\bigcup_n A_n\right)$ 是同构的.

首先，E' 可以自然地嵌入 E 之中. 事实上，如果 p,q 是 $\bigcup_n A_n$ 的投影，并且有 $v\in A$，使得 $p=v^*v$，$q=vv^*$. 设 n 充分大，使得 $p,q\in A_n$，并且有 $a\in A_n$，$\|v-a\|<\delta_3\left(\frac{1}{2}\right)$，这里 $\delta_3(\cdot)$ 如引理 12.1.7，因此有 $u\in A_n$，使得 $p=u^*u$，$q=uu^*$. 即在 $\bigcup_n A_n$ 中，p 也与 q 等价.

这个嵌入也是满的. 事实上，设 p 是 A 的任意投影，依引理 12.1.3 及 12.1.6，将有投影 $q\in\bigcup_n A_n$，使得在 A 中，$p\sim q$.

对于 E' 的若干个可加的元，嵌入 E 后，显然仍然可加，并且和不变. 反之，设 $\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_m$ 是 E 的可加元，于是有 $p_i\in\tilde{p}_i$，使得 $p_ip_j=0$，$\forall i\neq j$. 依引理 12.1.3，12.1.4 及 12.1.6，将有相互直交的投影 $q_1,\cdots,q_m\in\bigcup_n A_n$，并且 $q_i\sim p_i$，$1\leqslant i\leqslant m$. 因此，$\{\tilde{q}_i\}$ 在 E' 中是可加的，嵌入 E 后，即为 $\{\tilde{p}_i\}$.

以上说明，E 与 E' 是同构的. 证毕.

定理 12.2.10 (AF) 代数 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$ 与 $B=\overline{\bigcup_n B_n}$ 是 *

同构的，必须且只须，$\{A_n\}$有子列$\{A_{n_k}\}$，每个 A_{n_k} 包含 * 子代数 B'_k，使得：

1）$B'_1\subset\cdots\subset B'_k\subset\cdots$，并且有 $\bigcup_k B'_k$ 到 $\bigcup_k B_k$ 上的 * 同构 Φ；$\Phi(B'_k)=B_k$，$\forall k$；

2）对每个正整 n，有 k，而 $A_n\subset B'_k$.

证．充分性由定理 12.2.9 立见．今设 A 与 B * 同构，依定理 12.2.9，有 $\bigcup_n A_n$ 到 $\bigcup_n B_n$ 上的 * 同构 Φ．对任意的 k，令 $B'_k=\Phi^{-1}(B_k)$，显然 $B'_1\subset\cdots\subset B'_k\subset\cdots$．也自然对每个 k，可找到 n_k，使得 $B'_k\subset A_{n_k}$，及 $n_1<n_2<\cdots$．最后对每个 n，由于 $\bigcup_j B'_j=\Phi^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right)=\bigcup_j A_j$，因此有 k，使得 $A_n\subset B'_k$.　证毕．

定义 12.2.11　设 $\{p_n\}$ 是正整数列，并且 $p_n|p_{n+1}$，$\forall n$．素数列 $\{r_n\}$ 称为由 $\{p_n\}$ 决定的，指

$$\{\underbrace{r_1,\cdots,r_{t_1}}_{\text{积为}m_1},\underbrace{\cdots,r_{t_2}}_{\text{积为}m_2},\underbrace{\cdots,r_{t_3}}_{\text{积为}m_3},\cdots\}$$

这里 $m_1=p_1$，$m_n=p_{n-1}^{-1}p_n$，$\forall n\geqslant 2$.

定理 12.2.12　设 A_i 是 $\{p_n^{(i)}\}$ 型的（UHF）代数，$\{r_n^{(i)}\}$是由$\{p_n^{(i)}\}$决定的素数列，$i=1,2$，则 A_1 与 A_2 * 同构，必须且只须，对任何的素数 r，r 在 $\{r_n^{(1)}\}$ 中出现的次数（包括无穷次）等于 r 在$\{r_n^{(2)}\}$中出现的次数．

证．依命题 3.8.3，只须证明必要性．设 A_1 与 A_2 * 同构．依定理 12.2.10，可以找到 A_1 的子因子列：$B'_{k_1}\subset A_{n_{k_1}}\subset B'_{k_2}\subset A_{n_{k_2}}\subset\cdots\subset B_{k_i}\subset A_{n_{k_i}}\subset\cdots$，及 $\bigcup_i B'_{k_i}$ 到 $\bigcup_i B_{k_i}$ 上的 * 同构 Φ，使得 $A_1=\overline{\bigcup_n A_n}$，$A_2=\overline{\bigcup_n B_n}$，$\Phi(B'_{k_i})=B_{k_i}$，$\forall i$ 以及 A_n，B_n 分别是 $p_n^{(1)}$，$p_n^{(2)}$ 阶的矩阵代数，$\forall n$．今依命题 3.8.3，对每个 i 将有 $p_{k_i}^{(2)}|p_{n_{k_i}}^{(1)}$，$p_{n_{k_i}}^{(1)}|p_{k_{i+1}}^{(2)}$，由此即得证．

注　本节见参考文献［8］，［32］，［41］．

§3. (AF) 代数的图

设 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$ 是 (AF) 代数，A 可以看作为有限维 c^*-代数递增列 $\{A_n\}$ 的诱导极限. 事实上，命 A_n 到 A_{n+1} 中的嵌入映象为 Φ_n，并记 $\Phi_{mn}=\Phi_{m-1}\circ\cdots\circ\Phi_n$ $(m\geqslant n)$，依系 3.7.4，A * 同构于 $\varinjlim_n\{A_n,\ \Phi_{mn}|m\geqslant n\}$. 我们也把这个诱导极限简单记作 $\varinjlim_n\{A_n,\ \Phi_n\}$. 反过来，设 $\{A_n\}$ 是有限维 c^*-代数的列，并设 Φ_n 是 A_n 到 A_{n+1} 中的 * 同构，$\forall n$，则诱导极限是 (AF) 代数.

由此看来，研究有限维 c^*-代数到有限维 c^*-代数中的 * 同构是重要的.

设 $A=\bigoplus_{j=1}^n A_j$，$B=\bigoplus_{i=1}^m B_i$ 是有限维的 c^*-代数，这里 A_j，B_i 都同构于矩阵代数，又设 Φ 是 A 到 B 中的 * 同构. 如果 p 是 A_j 的极小投影，z_i 是 B 的中心投影，使得 $B_i=Bz_i$. 于是 $\Phi(p)z_i$ 是 B_i 的投影，它应当是 B_i 的 s_{ij} 个相互直交的极小投影的和. 我们说非负整数 s_{ij} 并不随 p 的选择而异. 事实上，若 q 是 A_j 的另一个极小投影，则有 $v\in A_j$，使得 $v^*v=p$，$vv^*=q$. 于是，

$$\Phi(p)z_i=(\Phi(v)z_i)^*\cdot(\Phi(v)z_i),$$
$$\Phi(q)z_i=(\Phi(v)z_i)\cdot(\Phi(v)z_i)^*.$$

因此，$\Phi(q)z_i$ 也应当是 B_i 的 s_{ij} 个相互直交的极小投影的和. 这样，由 Φ 唯一决定非负整数为阵元的 $m\times n$ 矩阵 $(s_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$. 从它的几何意义，我们显然有

$$(\dim B_i)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sum_{j=1}^n s_{ij}(\dim A_j)^{\frac{1}{2}},\quad 1\leqslant i\leqslant m. \tag{1}$$

此外，(1)的等号成立，当且仅当，$\Phi(1_A)=1_B$. 由于 $\Phi(p)\neq 0$，

我们也有

$$\sum_{i=1}^{m} s_{ij} > 0,\quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2}$$

反之，如果给出非负整数的矩阵 (s_{ij}) 并满足(1)，(2)，我们可以构作 A 到 B 中的 * 同构 Φ，使之决定的矩阵正是(s_{ij}). 事实上，设 $\{e_{ri}^{(j)}\}$，$\{f_{i'r'}^{(i)}\}$ 分别是 A，B 的矩阵单位的基，令

$$\Phi(e_{11}^{(j)})z_i = f_{11}^{(i)} + \cdots + f_{kk}^{(i)},\ \text{这里}\ k = s_{ij} > 0$$

$$\Phi(e_{22}^{(j)})z_i = f_{k+1,k+1}^{(i)} + \cdots + f_{2k,2k}^{(i)},\ \cdots$$

$$\Phi(e_{21}^{(j)})z_i = f_{k+1,1}^{(i)} + \cdots + f_{2k,k}^{(i)},\ \cdots\cdots.$$

引理 12.3.1 设 Φ，Ψ 是 A 到 B 中的 * 同构，它们决定的矩阵相同，则存在 B 的酉元 u，使得

$$u^*\Phi(a)u = \Psi(a),\quad \forall a \in A.$$

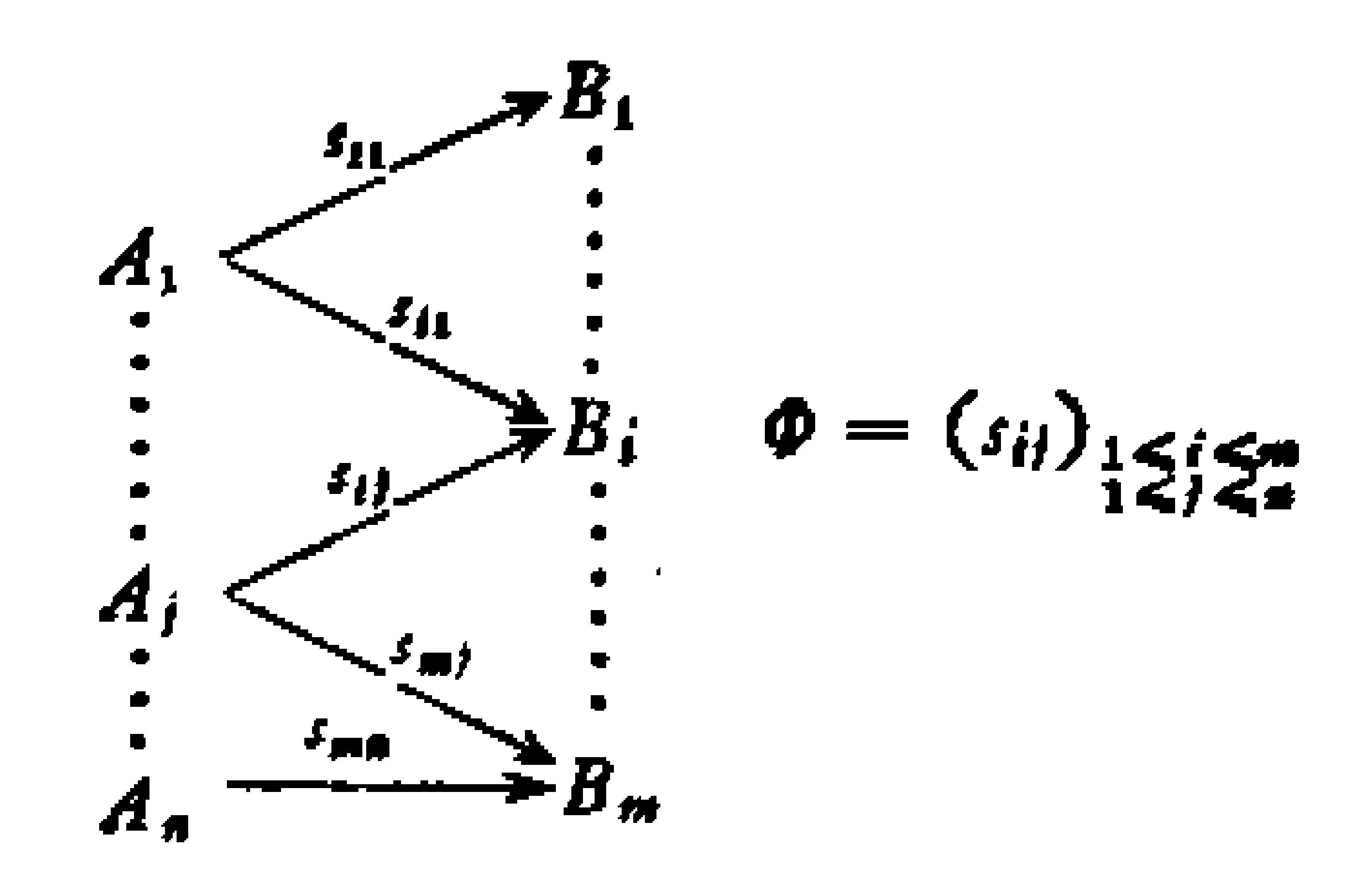
证. 代以考虑 $\Phi_i(\cdot) = \Phi(\cdot)z_i$, $\Psi_i(\cdot) = \Psi(\cdot)z_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$，可以认为 $B = B(\mathscr{H})$，这里$\mathscr{H}$是有限维的.

任意固定 $j(1 \leqslant j \leqslant n)$. 设 $\{e_{ri}^{(j)}\}$ 是 A_j 的矩阵单位的基，依假定 $\dim\Phi(e_{11}^{(j)})\mathscr{H} = \dim\Psi(e_{11}^{(j)})\mathscr{H}$. 分别设 $\{\xi_1^{(j)}, \cdots, \xi_k^{(j)}\}$，$\{\eta_1^{(j)}, \cdots, \eta_k^{(j)}\}$ 为 $\Phi(e_{11}^{(j)})\mathscr{H}$，$\Psi(e_{11}^{(j)})\mathscr{H}$ 的直交规范基，由于 $e_{11}^{(j)} = e_{s1}^{(j)*}e_{s1}^{(j)}$，$e_{ss}^{(j)} = e_{s1}^{(j)}e_{s1}^{(j)*}$，因此 $\Phi(e_{ss}^{(j)})\mathscr{H}$，$\Psi(e_{ss}^{(j)})\mathscr{H}$ 分别有直交规范基：

$$\{\Phi(e_{s1}^{(j)})\xi_i^{(j)} | 1 \leqslant i \leqslant k\},\quad \{\Psi(e_{s1}^{(j)})\eta_i^{(j)} | 1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

显然 $\{\Phi(e_{s1}^{(j)})\xi_i^{(j)} | j, s, i\}$，$\{\Psi(e_{s1}^{(j)})\eta_i^{(j)} | j, s, i\}$ 都是$\mathscr{H}$的直交规范系，于是可取 $\mathscr{H}$ 中的酉算子 $u(\in B)$，使得 $u\Psi(e_{s1}^{(j)})\eta_i^{(j)} = \Phi(e_{s1}^{(j)})\xi_i^{(j)}$，$\forall s, i, j$. 注意 $u^*\Phi(e_{st}^{(j)})u\Psi(e_{r1}^{(j)})\eta_i^{(j)} = \delta_{tr}\Psi(e_{s1}^{(j)})\eta_i^{(j)} = \Psi(e_{st}^{(j)})\Psi(e_{r1}^{(j)})\eta_i^{(j)}$ $\forall s, t, i, r, j$，所以，$u^*\Phi(a)u = \Psi(a)$，$\forall a \in A$. 证毕.

依此引理，A 到 B 中的 * 同构 Φ 完全为 (s_{ij}) 所决定，因此我们有理由把它们等同起来，即 $\Phi = (s_{ij})$. 更为形象地可用下面的图来表示：



引理 12.3.2 设 A_i, B_i 是有限维的 c^*-代数，θ_i 是 A_i 到 B_i 上的 * 同构，$i=1,2$，并设 Φ, Ψ 分别是 A_1 到 A_2 中，B_1 到 B_2 中的 * 同构，以及相应于 Φ, Ψ 的矩阵是相同的，则存在 A_2 到 B_2 中的 * 同构 $\tilde{\theta}_2$，使得下面的图是交换的：

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\Phi} & A_2 \\ \theta_1\downarrow & & \downarrow\tilde{\theta}_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\Psi} & B_2. \end{array}$$

证. 考虑 A_1 到 A_2 中的 * 同构 Φ, $\theta_2^{-1}\circ\Psi\circ\theta_1$，依引理 12.3.1，有 A_2 的酉元 u，使得 $u^*\Phi(\cdot)u=(\theta_2^{-1}\circ\Psi\circ\theta_1)(\cdot)$. 令命 $\tilde{\theta}_2(\cdot)=\theta_2(u^*\cdot u)$ 即满足要求. 证毕.

定义 12.3.3 设 A 是 (AF) 代数，$\{A_n\}$ 是 A 的有限维 * 子代数的递增列，并且 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$. 那么 A 相应于 $\{A_n\}$ 的图 $\mathscr{D}(A,\{A_n\})=\mathscr{D}=\{D, d, \mathscr{U}\}$ 指：$D=\{(n,m)\mid 1\leqslant m\leqslant r(n), n=1,2,\cdots\}$，这里 $r(n)$ 是 A_n 的极小中心投影的个数，$\forall n$；d: $D\to\mathbb{N}$, $d(n,m)=(\dim(A_n z_m^{(n)}))^{\frac{1}{2}}$，这里 $\{z_1^{(n)},\cdots,z_{r(n)}^{(n)}\}$ 是 A_n 的极小中心投影的全体，$\forall m, n$；$\mathscr{U}=\{\Phi_1,\cdots,\Phi_n,\cdots\}$，这里 Φ_n 是 A_n 到 A_{n+1} 中嵌入映象决定的阵，$\forall n$.

例 1 $\{p_n\}$ 型 (UHF) 代数的图. 这时 $r(n)=1$, $d(n,1)=p_n$, $\Phi_n=(m_n)$，这里 $m_n=p_n^{-1}p_{n+1}$, $\forall n$. 形象地有下面的图

$$\underset{p_1}{\cdot}\xrightarrow{m_1}\underset{p_2}{\cdot}\xrightarrow{m_2}\underset{p_3}{\cdot}\cdots\cdots\underset{p_n}{\cdot}\xrightarrow{m_n}\underset{p_{n+1}.}{\cdot}\cdots$$

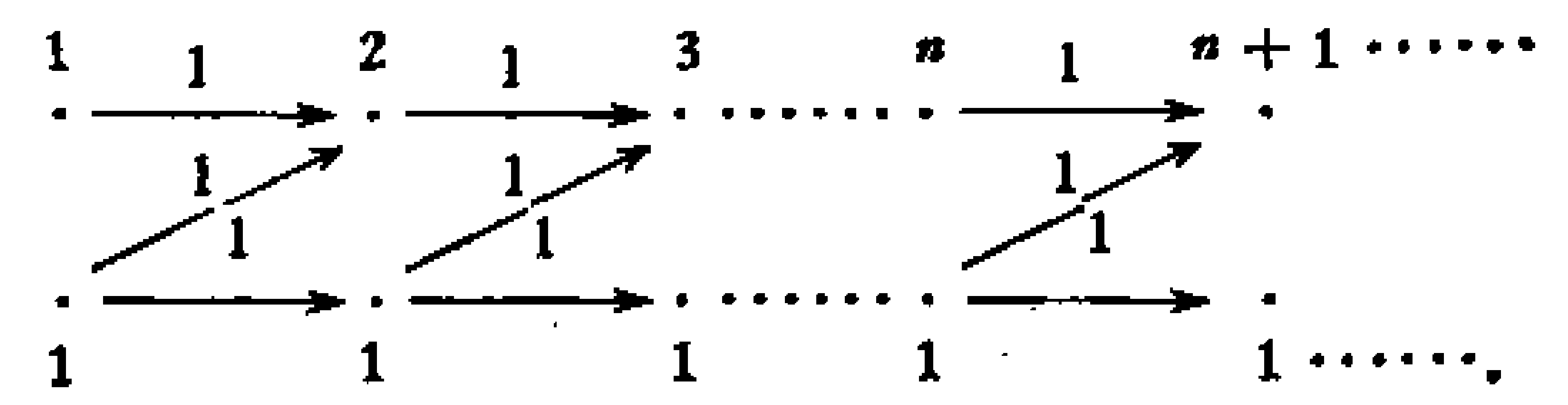
例 2. 设$\mathscr{H}$是可数无穷维的 Hilbert 空间，$K = C(\mathscr{H})$ 是$\mathscr{H}$中全连续算子的全体，令

$$A = K \dotplus \mathbb{C}.$$

如果 $\{\xi_n\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的直交规范基，p_n, q_n, r_n 分别表示 $\mathscr{H}$ 到 $[\xi_1, \cdots, \xi_n]$, $[\xi_1, \cdots, \xi_n]^{\perp}$, $[\xi_n]$ 上的投影，$\forall n$，则可写 $A = \overline{\bigcup_n A_n}$，这里

$$A_n = p_n B(\mathscr{H}) p_n \dotplus \mathbb{C} = p_n B(\mathscr{H}) p_n \oplus \mathbb{C} q_n.$$

显然 $p_n B(\mathscr{H}) p_n$ 的任意极小投影仍然是 $p_{n+1} B(\mathscr{H}) p_{n+1}$ 的极小投影，$q_n = q_{n+1} + r_{n+1}$，而 r_{n+1} 又是 $p_{n+1} B(\mathscr{H}) p_{n+1}$ 的极小投影，$\forall n$. 因此相应的图中：$r(n) = 2$, $d(n, 1) = n$, $d(n, 2) = 1$, $\Phi_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n$. 形象地有



命题 12.3.4 设 $A = \overline{\bigcup_n A_n}$, $B = \overline{\bigcup_n B_n}$ 是(AF)代数，并且 $\mathscr{D}(A, \{A_n\}) = \mathscr{D}(B, \{B_n\})$，则$A$与$B$是$*$同构的.

证. 设 Φ_n, Ψ_n 分别是 A_n 到 A_{n+1}, B_n 到 B_{n+1} 中的嵌入映象，依条件及引理 12.3.2，我们可以递归地构作 A_n 到 B_n 上的$*$同构 θ_n，使得下面的图是交换的:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\Phi_1} & A_2 & \xrightarrow{\Phi_2} & A_3 & \cdots\cdots & A_n & \xrightarrow{\Phi_n} & A_{n+1} \cdots \\
\downarrow \theta_1 & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \theta_3 & & \downarrow \theta_n & & \downarrow \theta_{n+1} \\
B_1 & \xrightarrow{\Psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\Psi_2} & B_3 & \cdots\cdots & B_n & \xrightarrow{\Psi_n} & B_{n+1} \cdots
\end{array}$$

由此可以构作 $\bigcup_n A_n$ 到 $\bigcup_n B_n$ 上的$*$同构θ，使得 $\theta | A_n = \theta_n$, $\forall n$. 今依定理 12.2.9，A与B是$*$同构的. 证毕.

任意的(AF)代数至少有一个图．反之，给出一个图 $\mathscr{D}=\{D, d, \mathscr{U}\}$，如果 $\mathscr{U}=\{\Phi_n=(s_{ij}^{(n)})\}$，自然要求满足不等式(1),(2),即

$$d(n+1,i) \geqslant \sum_{j=1}^{r(n)} s_{ij}^{(n)} d(n, j),\ 1 \leqslant i \leqslant r(n+1)$$

及 $\sum_{i=1}^{r(n+1)} s_{ij}^{(n)}>0,\ 1 \leqslant j \leqslant r(n),\ \forall n$．依照前面的讨论，这时也可构造出(AF)代数 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$，使得 $\mathscr{D}=\mathscr{D}(A,\{A_n\})$；并且依命题 12.3.4，在 * 同构的意义下，这样的(AF)代数 A 是唯一的．

但是，(AF)代数的图，不仅依赖于代数的本身，而且依赖于有限维 * 子代数递增列的选择，因此，* 同构的(AF)代数，相应的图可能极不相同．

注　本节见参考文献 [8]，[66]．

§4. (AF) 代数的理想

引理 12.4.1　设 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$ 是(AF)代数，J 是 A 的闭双侧理想，则 $J=\overline{\bigcup_n (J \cap A_n)}$．

证．记 $J_n=J \cap A_n$，它是 A_n 的双侧理想．显然 $\overline{\bigcup_n J_n} \subset J$．今若 $x \notin \overline{\bigcup_n J_n}$，必须证明 $x \notin J$．

设 $\varepsilon=\inf\left\{\|x-y\| \,\middle|\, y \in \bigcup_n J_n\right\}$，则 $\varepsilon>0$．取 $x_n \in A_n$，使得 $x_n \to x$．于是有 n_0，使得

$$\|x_n-x\|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall n \geqslant n_0.$$

因此，当 $n \geqslant n_0$，$y \in J_n$，$\|x_n - y\| \geqslant \|x - y\| - \|x_n - x\| > \frac{\varepsilon}{2}$。

设 $a \to \tilde{a}$ 是 A 到 A/J 上的正则映象，注意 A_n/J_n 可以自然地嵌入 A/J 之中，因此

$$\|\tilde{x}_n\| = \inf\{\|x_n - y\| \mid y \in J_n\} \geqslant \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geqslant n_0.$$

从而，$\|\tilde{x}\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$，即 $x \notin J$。　证毕。

定义 12.4.2　设 $\mathscr{D} = \{D, d, \mathscr{U}\}$ 是 (AF) 代数的图，$D = \bigcup_n D_n$，$D_n = \{(n, m) \mid 1 \leqslant m \leqslant r(n)\}$，$\mathscr{U} = \{\Phi_n = (s_{ij}^{(n)})\}$。点 $(n+1, i)$ 称为点 (n, j) 的后裔，指 $s_{ij}^{(n)} > 0$。更一般地点 $y \in D_m$ 称为点 $x \in D_n$ 的后裔，记作 $x \to y$，这里 $m > n$，指存在 $x_k \in D_k$，$n \leqslant k \leqslant m$，$x_n = x$，$x_m = y$，并且 x_{k+1} 是 x_k 的后裔，$k = n, \cdots, m-1$。

如果 $x = (n, j)$，$y = (m, i)$，那么 $x \to y$，相当于 $(\Phi_{m-1} \cdots \Phi_n)$ 的 (i, j) 阵元 $\neq 0$。

定义 12.4.3　设 $\mathscr{D} = \{D, d, \mathscr{U}\}$ 是 (AF) 代数的图，D 的子集 E 称为理想的，指：1) 如果 $x \in E$，则 x 的所有后裔也 $\in E$；2) 设 $x \in D_n$，如果 $\{y \in D_{n+1} \mid y$ 是 x 的后裔$\} \subset E$，则 $x \in E$。

引理 12.4.4　设 $A = \overline{\bigcup_n A_n}$ 是(AF)代数，相应的图是 $\mathscr{D} = \{D, d, \mathscr{U}\}$。如果 J 是 $\bigcup_n A_n$ 的双侧理想，则 J 必有形式

$$J = \bigcup_n (\oplus\{A_{n,k} \mid (n, k) \in E\}), \tag{1}$$

这里 E 是 D 的理想子集，而 $A_{n,k}$ 同构于矩阵代数，使得 $A_n = \bigoplus_{k=1}^{r(n)} A_{n,k}$，$\forall n$。

反之，如果 E 是 D 的理想子集，则(1)决定 $\bigcup_n A_n$ 的双侧理想，并且 $J \cap A_n = \oplus\{A_{n,k} \mid (n,k) \in E\}$，$\forall n$。

证. 设 J 是 $\bigcup_n A_n$ 的双侧理想，由于 $J=\bigcup_n (J\cap A_n)$，因此必有D的子集 E，使得(1)成立. 我们尚须证明 E 是理想的.

设 $(n,k)\in E$，并且 $(n,k)\to(n+1,q)$. 这说明如果 p 是 $A_{n,k}$ 的极小投影，则 $pz\neq 0$，这里 z 是 A_{n+1} 的中心投影，使得 $A_{n+1,q}=A_{n+1}z$. 自然 $pz\in J$. 另一方面，$pz\in A_n z\subset A_{n+1,q}$. 因此，$J\cap A_{n+1,q}\neq\{0\}$. 但 $A_{n+1,q}$ 是矩阵代数，因此，$A_{n+1,q}\subset J$，即 $(n+1,q)\in E$.

今设 $(n,k)\in D$，并且(n,k)在 D_{n+1} 中的所有后裔都$\in E$，即

$$A_{n,k}\subset\oplus\{A_{n+1,q}|(n,k)\to(n+1,q)\}\subset J.$$

所以，$(n,k)\in E$. 以上说明 E 是理想的.

反之，设 E 是 D 的理想子集，J 由(1)所定义. 记 $J_n=\oplus\{A_{n,k}|(n,k)\in E\}$，$\forall n$. 如果 $(n,k)\in E$，则 $A_{n,k}\subset\oplus\{A_{n+1,q}|(n,k)\to(n+1,q)\}\subset J_{n+1}$，因此，$J_n\subset J_{n+1}$，$\forall n$. 所以，$J=\bigcup_n J_n$ 是 $\bigcup_n A_n$ 的双侧理想.

尚须证明 $J\cap A_n=J_n$，$\forall n$. 显然 $J_n\subset J\cap A_n$，$\forall n$. 因此只须证明：如果 $A_{n,k}\subset J$，则 $(n,k)\in E$. 事实上，取 $m(>n)$，使得 $A_{n,k}\subset J_m$. 如果 $(n,k)\notin E$，由于 E 是理想的，因此必有(n,k)的后裔 (m,r)，使得 $(m,r)\notin E$. 于是，$A_{m,r}\cap J_m=\{0\}$. 这将与 $A_{n,k}\subset J_m$ 相矛盾. 所以，$(n,k)\in E$. 证毕.

定理 12.4.5 设 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$，$\mathscr{D}(A,\{A_n\})=\{D,d,\mathscr{U}\}$，下面的集合是相互一一对应的：

1) A的闭双侧理想的全体；

2) $\bigcup_n A_n$ 的双侧理想的全体；

3) D的理想子集的全体.

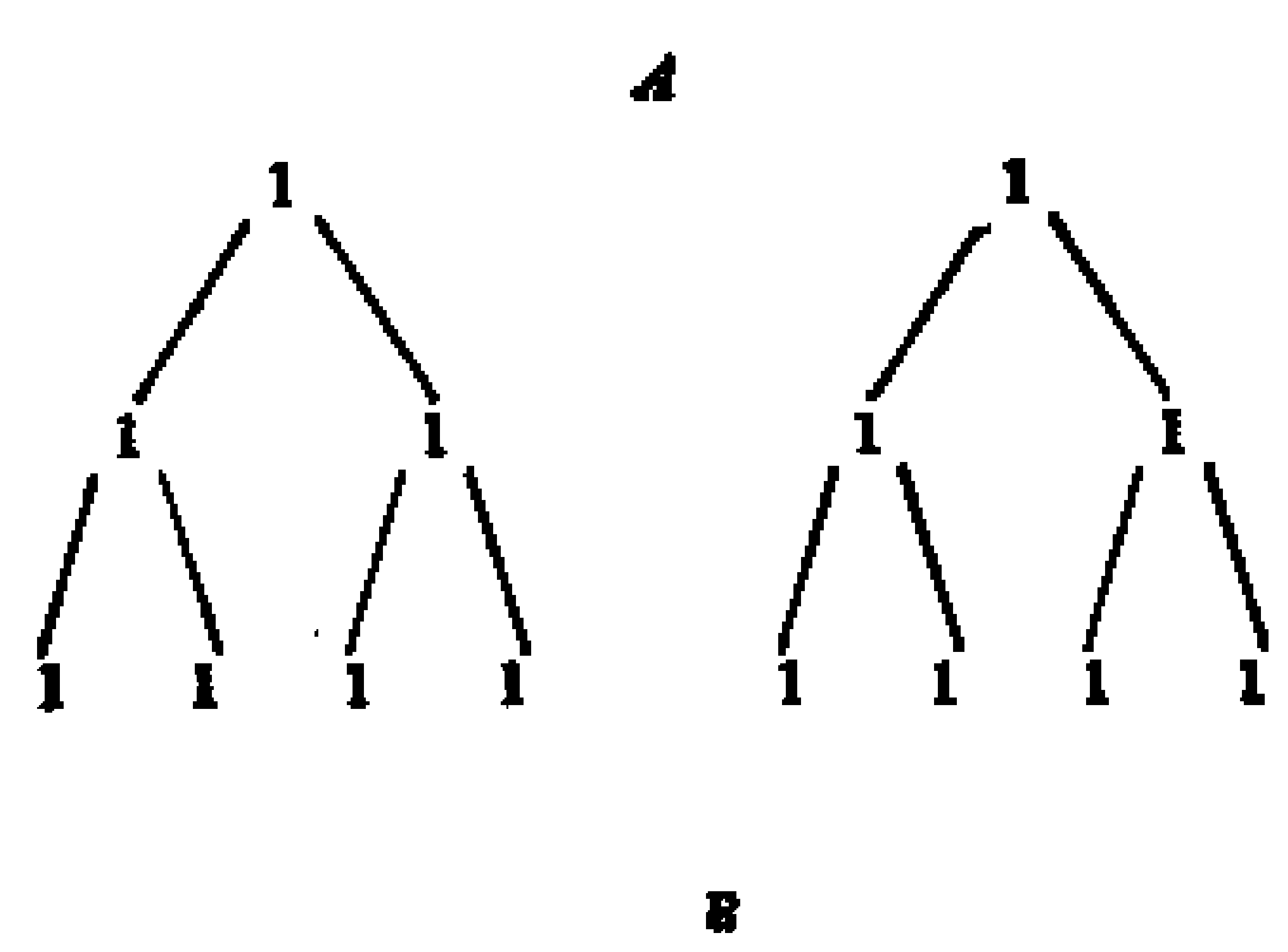
证. 由引理 12.4.4，2) 与 3) 是一一对应的. 引理 12.4.1 说明 $J\to\bar{J}$ 是 2) 到 1) 上的对应. 今设 J_1，J_2 是 $\bigcup_n A_n$ 不同的

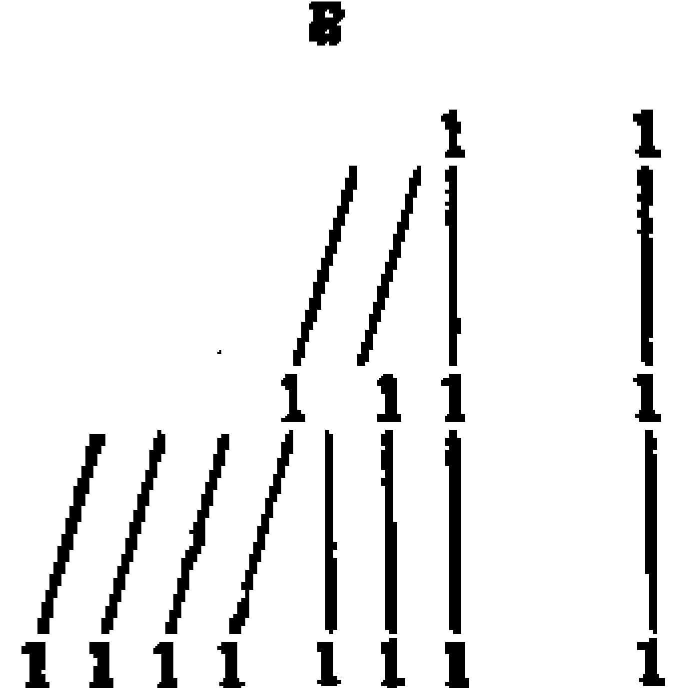
双侧理想，需要证明 $\bar{J}_1 \neq \bar{J}_2$. 依引理 12.4.4，无妨设有 $A_{n,k} \subset J_1$，但 $A_{n,k} \not\subset J_2$. 于是，$z \not\in J_2$，这里 z 是 A_n 的中心投影，使得 $A_{n,k} = A_n z$. 从而在 $A_m \to A_m/(J_2 \cap A_m)$ 的正则映象下，z 将变为非零投影，即

$$\inf\{\|z-y\| \mid y \in J_2 \cap A_m\} = 1, \quad \forall m \geqslant n,$$

但 $J_2 = \bigcup\limits_{m \geqslant n} (J_2 \cap A_m)$，因此，$\inf\{\|z-y\| \mid y \in J_2\} = 1$，即 $z \not\in \bar{J}_2$. 所以，$\bar{J}_1 \neq \bar{J}_2$. 证毕.

例. $A = \overline{\bigcup\limits_n A_n}$，$B = \overline{\bigcup\limits_n B_n}$，这里 $A_n = B_n = \bigoplus\limits_{2^n} \mathbb{C}$，但有不同的图：





显然，B 包含一个维数为 1 的闭双侧理想，但 A 的闭双侧理想都是无穷维的，因此，A 与 B 不能 $*$ 同构.

这个例说明，(AF)代数 $A = \overline{\bigcup\limits_n A_n}$ 不仅与诸 A_n 的构造有关，而且也依赖于 A_n 到 A_{n+1} 中的嵌入方式.

命题 12.4.6 设 $A = \overline{\bigcup\limits_n A_n}$ 是(AF)代数，$\mathscr{D} = \{D, d, \mathscr{U}\}$

是相应的图. 如果 J 是 A 的闭双侧理想，则 J 与 A/J 也都是(AF)代数，并且分别有图

$$\{E,\ d|E,\ \mathscr{U}|E\},\ \{D\backslash E,\ d|D\backslash E,\ \mathscr{U}|D\backslash E\},$$

这里 E 是相应于 J 的 D 的理想子集. 此外，如果 $\mathscr{U}=\{U_n=(s_{ij}^{(n)})_{1\leqslant i\leqslant r(n+1),1\leqslant j\leqslant r(n)}\}_n$，则

$$\mathscr{U}|E=\{V_n=(s_{ij}^{(n)})_{(n+1,i)\in E,(n,j)\in E}\}_n,$$

$$\mathscr{U}|D\backslash E=\{W_n=(s_{ij}^{(n)})_{(n+1,i)\notin E,(n,j)\notin E}\}_n.$$

证. 关于 J 的论述由引理 12.4.1，12.4.4 立见.

由于 $A=\overline{\bigcup\limits_n A_n}$，因此，$A/J=\overline{\bigcup\limits_n (A_n/J)}$ 也是(AF)代数. 注意对每个 n，

$$A_n/J=\oplus\{A_{n,k}/J|(n,k)\notin E\}\subset A_{n+1}/J$$
$$=\oplus\{A_{n+1,j}/J|(n+1,j)\notin E\}.$$

因此，$A_{n,k}/J(\cong A_{n,k})$ 的极小投影嵌入到 $A_{n+1,j}/J(\cong A_{n+1,j})$ 中保持几何意义，$\forall(n,k)\notin E$，$(n+1,j)\notin E$. 这就说明 $A/J=\overline{\bigcup\limits_n (A_n/J)}$ 的图为 $\{D\backslash E,d|D\backslash E,\mathscr{U}|D\backslash E\}$. 证毕.

定义 12.4.7 设 $\mathscr{D}=\{D,d,\mathscr{U}\}$ 是(AF)代数的图，D 的理想子集 E 称为素的，指如果 $x,y\notin E$，则存在 $z\notin E$，使得 $x\to z$，$y\to z$.

定理 12.4.8 设 $A=\overline{\bigcup\limits_n A_n}$ 是(AF)代数，$\mathscr{D}=\{D,d,\mathscr{U}\}$ 是相应的图，则下列相互等价：

1) J 是素理想；

2) 如果 J_1，J_2 是 A 的闭双侧理想，使得 $J=J_1\cap J_2$，则 J_1 或者 $J_2=J$；

3) J 是闭双侧理想，则 J 所对应 D 的理想子集 E 是素的.

证. 由命题 12.4.6，代以考虑 A/J，从而可以设 $J=\{0\}$，$E=\varnothing$.

1) 推导 2)：由引理 2.8.6 立见.

2) 推导 3)：对 D 的任意点 $x=(n,k)$，$y=(m,q)$，令

$$J_1=\bigcup_{p\geqslant n}(\oplus\{A_{p,r}|x\to(p,r)\}),$$

$$J_2=\bigcup_{p\geqslant m}(\oplus\{A_{p,r}|y\to(p,r)\}).$$

由 2)，$\bar{J}_1\cap\bar{J}_2\neq\{0\}$. 但 $\bar{J}_1\cap\bar{J}_2$ 仍然是 A 的闭双侧理想，依引理 12.4.1，

$$J_1\cap J_2=\bar{J}_1\cap\bar{J}_2\cap\left(\bigcup_p A_p\right)\neq\{0\},$$

但 $J_1\cap J_2$ 也是 $\bigcup_p A_p$ 的双侧理想，因此 p 充分大 $(>m,n)$，有 $A_{p,r}\subset J_1\cap J_2$，即 $x\to z$，$y\to z$，这里 $z=(p,r)$.

3) 推导 1)：依 3)，对 D 的任意有限个点必有共同的后裔，因此，可以找到子列 $\{n_k\}$，及对每个 k，有正整数 $j(k)$，$1\leqslant j(k)\leqslant r(n_{k+1})$，使得

$$(n_k,i)\to(n_{k+1},j(k)),\ 1\leqslant i\leqslant r(n_k).$$

我们的目的是要证明 $\{0\}$ 是 A 的素理想，因此，对图作必要的缩并与调整，可以假定

$$(n,k)\to(n+1,1),\quad 1\leqslant k\leqslant r(n),\ \forall n.$$

于是，我们可以归纳地选择 A_n 的矩阵单位的基 $\{e_{ij}^{(n,k)}\}$，使得 $e_{11}^{(n,1)}\geqslant e_{11}^{(n+1,1)}$，$\forall n$. 对每个 n，令

$$\rho_n(e_{ij}^{(n,k)})=\begin{cases}1, & \text{如果 } i=j=k=1,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

不难见 ρ_n 是 A_n 上的纯态. 并且由 $\rho_n(x)=\rho_n(e_{11}^{(n,1)}xe_{11}^{(n,1)})$ 及 $e_{11}^{(n,1)}xe_{11}^{(n,1)}=\lambda(x)e_{11}^{(n,1)}$，$\forall x\in A_n$，$e_{11}^{(n,1)}\geqslant e_{11}^{(n+1,1)}$ 可见

$$\rho_{n+1}(x)=\lambda(x)\rho_{n+1}(e_{11}^{(n,1)})=\lambda(x)=\rho_n(x),\ \forall x\in A_n.$$

因此，$\rho_{n+1}|A_n=\rho_n$，$\forall n$. 从而可定义 $\bigcup_n A_n$ 上的泛函 ρ，使得 $\rho|A_n=\rho_n$，$\forall n$. 显然 ρ 可以唯一开拓为 A 上的态，仍记以 ρ. 由于 $\rho|A_n=\rho_n$ 是纯的，$\forall n$，不难见 ρ 也是纯的.

设 π_ρ 是 ρ 所产生的不可约 * 表示，令只须证明 $\ker\pi_\rho=\{0\}$. 依引理 12.4.1，要证 $\ker\pi_\rho\cap A_n=\{0\}$，$\forall n$. 或者对于每个 A_n 的

每个极小中心投影 z，指出有 $x\in A_{n+1}$，使得 $\rho(xzx^*)\neq 0$（由此，$z\notin \ker\pi_\rho$，即 $\ker\pi_\rho\cap A_n=\{0\}$）。由于 $(n,k)\to(n+1,1)$，$\forall k$，及 $e_{11}^{(n+1,1)}$ 是 A_{n+1} 的极小投影，因此有 $x\in A_{n+1}$，使得 $xx^*=e_{11}^{(n+1,1)}$，$x^*x\leqslant z$。从而

$$\rho(xzx^*)\geqslant\rho(xx^*xx^*)=\rho(e_{11}^{(n+1,1)})=1.$$ 证毕。

注 本节见参考文献 [8]，[66]。

§5. 维 数 群

设 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$ 是(AF)代数，$\mathscr{D}=\{D,d,\mathscr{U}\}$ 是相应的图，如果忽略 d 的因素来考虑，由于 $\mathscr{U}$ 中每个矩阵由非负整数构成，从而我们需要研究维数群。

定义 12.5.1 形如

$$G=\varinjlim_n\{\mathbf{Z}^{r(n)},\Phi_n\}$$

的群称为维数群，这里 $\mathbf{Z}$ 是整数的加法群，Φ_n 是 $r(n+1)\times r(n)$ 的非负整数矩阵，$\forall n$。

确切说来，G 是序交换群，它的任意元有这样的形式：$\tilde{a}=(0,\cdots,0,t_n,t_{n+1},\cdots)+\vartheta$，其中 $t_s\in\mathbf{Z}^{r(s)}$，$t_{s+1}=\Phi_s(t_s)$，$\forall s\geqslant n$，而

$$\vartheta=\{(t_1,\cdots,t_m,0\cdots)|t_i\in\mathbf{Z}^{r(i)},\ m\text{ 任意}\}.$$

自然地定义 G 中的加法，G 成为交换群。又定义 G 的正部分 G_+，$\tilde{a}\in G_+$，指有 $(0,\cdots,0,t_n,t_{n+1},\cdots)\in\tilde{a}$，$t_s\in\mathbf{Z}^{r(s)}$，$t_{s+1}=\Phi_s(t_s)$，$\forall s\geqslant n$，并且 $t_n\geqslant 0$（指 $t_n\in\mathbf{Z}_+^{r(n)}$，即 t_n 的 $r(n)$ 个分量都是非负整数）。

命题 12.5.2 设 $G=\varinjlim_n\{\mathbf{Z}^{r(n)},\Phi_n\}$，则 G 是可数的、无挠的[1]（即若 $n\tilde{a}=0$，则 $\tilde{a}=0$），$G=G_+-G_+$，$G_+\cap(-G_+)=\{0\}$，并且 G 满足 Riesz 插入性质，即若 G 的元 $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}$，满足 $\tilde{a},\tilde{b}\leqslant\tilde{c},\tilde{d}$，则存在元 $\tilde{e}$，使得 $\tilde{a},\tilde{b}\leqslant\tilde{e}\leqslant\tilde{c},\tilde{d}$。

证. 只须注意 Φ_n 是保序的，及 $\mathbf{Z}^{r(n)}$ 满足 Riesz 插入性质，

1) torsion-free.

即可得证.

注. 反之，我们有 Shen-Effros 定理：满足 Riesz 插人性质的可数序交换群,必是维数群([107]).

定义 12.5.3 设 $G=\varinjlim_n\{Z^{r(n)},\Phi_n\}$ 是维数群，则相应的 $\{D,\mathscr{U}\}$称为G的一个图.

每个(AF)代数,至少相应一个维数群. 反之给出维数群G及其图 $(D,\mathscr{U})$,我们可以构造 (AF) 代数,使其有图$(D,d,\mathscr{U})$. 事实上,只须取

$$d(n+1,i)\geqslant\sum_{j=1}^{r(n)}s_{ij}^{(n)}d(n,j),\ \forall 1\leqslant i\leqslant r(n+1),\ 及\ n.$$

定义 12.5.4 设G是维数群,G的子群J称为序理想,指 $J=J_+-J_+$，这里 $J_+=J\cap G_+$，并且如果 $\tilde{a},\tilde{b}\in G_+$，$\tilde{a}\leqslant\tilde{b}$，及 $\tilde{b}\in J_+$，则 $\tilde{a}\in J_+$.

G_+ 的非空子集F称为面，指 $F+F\subset F$，并且如果 $\tilde{a},\tilde{b}\in G_+$，$\tilde{a}\leqslant\tilde{b}$，及 $\tilde{b}\in F$，则 $\tilde{a}\in F$.

命题 12.5.5 $J\to J_+$ 是G的序理想全体到G_+的面全体上的一一映象.

证. 如果J是序理想,显然J_+是面,并且由于 $J=J_+-J_+$，$J\to J_+$ 是一一映象. 反之,设F是面,令 $J=F-F$. 由于$F+F\subset F$，因此，J是G的子群. 今只须证明 $J\cap G_+=F$. 显然，$F\subset J\cap G_+$. 另一方面,如果 $\tilde{a},\tilde{b}\in F$，并且 $(\tilde{a}-\tilde{b})\in G_+$，由于 $0\leqslant\tilde{a}-\tilde{b}\leqslant\tilde{a}\in F$,因此,$(\tilde{a}-\tilde{b})\in F$,即 $J\cap G_+\subset F$. 证毕.

命题 12.5.6 设 $G=\varinjlim_n\{Z^{r(n)},\Phi_n\}$ 是维数群,$\{D,\mathscr{U}\}$是相应的图，则G的序理想J与D的理想子集E一一对应. 这时J也是维数群,且有图 $\{E,\mathscr{U}|E\}$.

证. 对任意的n,令 $\Phi_{n,\infty}$: $Z^{r(n)}\to G$,

$$\Phi_{n,\infty}(t_n)=(0,\cdots,0,t_n,t_{n+1},\cdots)+\vartheta,$$

$\forall t_n\in Z^{r(n)}$，其中 $t_{s+1}=\Phi_s(t_s)$，$\forall s\geqslant n$，而ϑ如定义 12.5.1 又记 $\{e_k^{(n)}|1\leqslant k\leqslant r(n)\}$ 是 $Z^{r(n)}$ 的正则基.

今设 J 是 G 的序理想，令 $E=\{(n,k)|\Phi_{n,\infty}(e_k^{(n)})\in J\}$. 如果 $(n,k)\to(m,p)$，依定义 12.4.2 及 $\Phi_{m,\infty}$ 是保序的，

$$\Phi_{n,\infty}(e_k^{(n)})=\Phi_{m,\infty}(\Phi_{m-1}\circ\cdots\circ\Phi_n(e_k^{(n)}))$$
$$\geqslant\Phi_{m\infty}(e_p^{(m)})\geqslant 0.$$

因此依 J_+ 的性质，$(m,p)\in E$. 又若 $x=(n,k)$，而 $\{y\in D_{n+1}|y$ 是 x 的后裔$\}\subset E$，由于 $J_++J_+\subset J_+$，

$$0\leqslant\Phi_{n\infty}(e_k^{(n)})=\Phi_{n+1,\infty}\left(\sum_{i=1}^{r(n+1)}s_{ik}^{(n)}e_i^{(n+1)}\right)$$
$$=\Phi_{n+1,\infty}\left(\sum_{\substack{i\text{ 使得}\\ s_{ik}^{(n)}>0}}s_{ik}^{(n)}e_i^{(n+1)}\right)$$
$$=\Phi_{n+1,\infty}\left(\sum_{\substack{i\text{ 使得}\\ (n+1,i)\in E}}s_{ik}^{(n)}e_i^{(n+1)}\right)\in J_+.$$

因此，$\Phi_{n,\infty}(e_k^{(n)})\in J_+$，即 $(n,k)=x\in E$. 从而，E 是 D 的理想子集.

命 $J(E)$ 为由 $\{\Phi_{n,\infty}(e_k^{(n)})|(n,k)\in E\}$ 生成的 G 的子群，显然 $J(E)\subset J$ 及 $J(E)$ 序同构于图为 $\{E,\mathscr{U}|E\}$ 的维数群. 如果 $\tilde{a}\in J_+$，由于 $G_+=\bigcup_n\Phi_{n,\infty}(Z_+^{r(n)})$，因此存在 n 及非负整数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{r(n)}$，使得

$$\tilde{a}=\Phi_{n,\infty}\left(\sum_k\lambda_k e_k^{(n)}\right).$$

于是，$0\leqslant\lambda_k\Phi_{n,\infty}(e_k^{(n)})\leqslant\tilde{a}\in J_+$，当 $\lambda_k>0$ 时，便有 $\Phi_{n,\infty}(e_k^{(n)})\in J_+$，即 $(n,k)\in E$. 由此，$\tilde{a}\in J(E)$，$J(E)=J$. 这样，我们便建立了 G 的序理想到 D 的理想子集的一一映象.

反之，设 E 是 D 的理想子集，如上定义 $J=J(E)$，需证它是 G 的序理想，以及 J 所决定的理想子集正是 E. 由于 E 是理想的，

$$\Phi_{n,\infty}\left(\left\{\sum_{\substack{k\\(n,k)\in E}}\lambda_k e_k^{(n)}\middle|\lambda_k\in\mathbf{Z}\right\}\right)$$

$$\subset \Phi_{n+1,\infty}\left(\left\{\sum_{(n+1,k)\in E}^{k} \lambda_k e_k^{(n+1)} \middle| \lambda_k \in \mathbf{Z}\right\}\right)$$

$\forall n$，因此，

$$J = \bigcup_n \Phi_{n,\infty}\left(\left\{\sum_{(n,k)\in E}^{k} \lambda_k e_k^{(n)} \middle| \lambda_k \in \mathbf{Z}\right\}\right),$$

$$J_+ = \bigcup_n \Phi_{n,\infty}\left(\left\{\sum_{(n,k)\in E}^{k} \lambda_k e_k^{(n)} \middle| \lambda_k \in \mathbf{Z}_+\right\}\right).$$

从而，$J = J_+ - J_+$。由于 J_+ 的表达式，也易见如果 $0 \leqslant \tilde{b} \leqslant \tilde{a} \in J$，则 $\tilde{b} \in J$。因此，J 是 G 的序理想。今若 $\Phi_{n,\infty}(e_k^{(n)}) \in J$，依 J_+ 的表达式，有 $m > n$ 及 $\lambda_j \in \mathbf{Z}_+$，使得 $\Phi_{n,\infty}(e_k^{(n)}) = \Phi_{m,\infty}\cdot\left(\sum_{j,(m,j)\in E} \lambda_j e_j^{(m)}\right)$。于是

$$\Phi_{m-1}\circ\cdots\circ\Phi_n(e_k^{(n)}) = \sum_{(m,j)\in E}^{j} \lambda_j e_j^{(m)}.$$

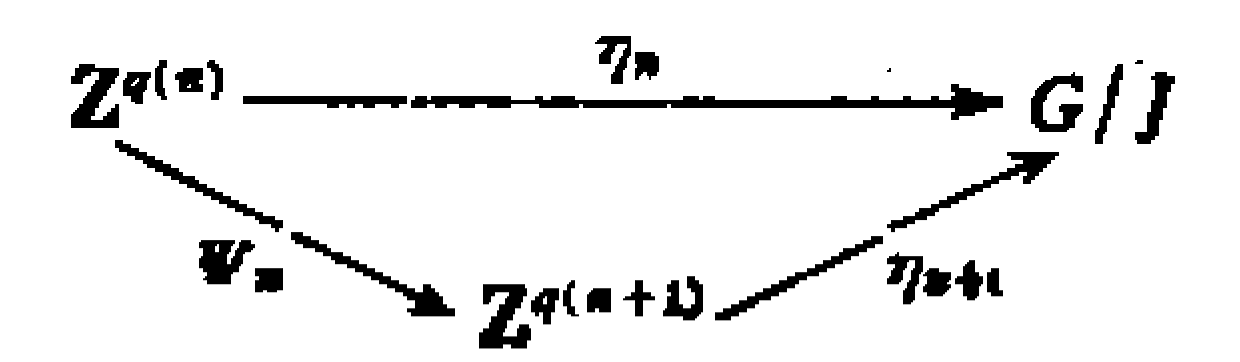
这说明 (n, k) 在 D_m 中的后裔都 $\in E$。E 是理想的，因此，$(n, k) \in E$。　证毕。

命题 12.5.7　设 $G = \varinjlim_n \{\mathbf{Z}^{r(n)}, \Phi_n\}$，图为 $\{D, \mathscr{U}\}$，$J = J(E)$ 是 G 的序理想，则 G/J 也是维数群，且序同构于 $\varinjlim_n \{\mathbf{Z}^{r(n)} | D\backslash E, \Phi_n | D\backslash E\}$，即有图 $\{D\backslash E, \mathscr{U} | D\backslash E\}$。

证。对任意的 n，命

$$\mathbf{Z}^{r(n)} = \mathbf{Z}^{p(n)} \dotplus \mathbf{Z}^{q(n)}$$

其中 $\mathbf{Z}^{p(n)} = [e_k^{(n)} | (n, k) \in E]$，$\mathbf{Z}^{q(n)} = [e_k^{(n)} | (n, k) \notin E]$。依此分解的投影分别是 P_n，Q_n。再令 $\Psi_n = Q_{n+1}(\Phi_n | \mathbf{Z}^{q(n)})$，则图为 $\{D\backslash E, \mathscr{U} | D\backslash E\}$ 的维数群是 $\varinjlim_n \{\mathbf{Z}^{q(n)}, \Psi_n\}$。我们有这样的交换图



这里 $\eta_n(t_n) = \Phi_{n,\infty}(t_n) + J$，$\forall t_n \in Z^{q(n)}$，$n$。事实上，由于$E$是理想的，因此对任意的 $t_n \in Z^{q(n)}$，

$$\begin{aligned}\eta_n(t_n) &= \Phi_{n+1,\infty}Q_{n+1}\Phi_n(t_n) + \Phi_{n+1,\infty}P_{n+1}\Phi_n(t_n) + J \\ &= \Phi_{n+1,\infty}\Psi_n(t_n) + J = \eta_{n+1}(\Psi_n(t_n)).\end{aligned}$$

于是可以定义 η: $\varinjlim_n \{Z^{q(n)}, \Psi_n\} \to G/J$,

$$\eta(\Psi_{n,\infty}(t_n)) = \Phi_{n,\infty}(t_n) + J, \quad \forall t_n \in Z^{q(n)}, \ n,$$

这里 $\Psi_{n,\infty}$ 的定义与 $\Phi_{n,\infty}$ 相仿。如果 $t_n \in Z^{q(n)}$，使得 $\Phi_{n,\infty}(t_n) \in J$，由于$E$是理想的，因此，$t_n = 0$，即$\eta$是一一的。又显然

$$\begin{aligned}G/J &= \bigcup_n (\Phi_{n,\infty}(Z^{q(n)}) + J) \\ &= \bigcup_n (\Phi_{n,\infty}(Z^{q(n)}) + J).\end{aligned}$$

因此，η是满的。此外，也易见η与η^{-1}都是保序的，因此，G/J与 $\varinjlim_n \{Z^{q(n)}, \Psi_n\}$ 序同构。　证毕。

定义 12.5.8　维数群G的序理想J称为素的，指如果J_1，J_2是G的序理想，并且 $J = J_1 \cap J_2$，则 $J = J_1$ 或者 J_2。

命题 12.5.9　设G是维数群，$\{D, \mathscr{U}\}$是它的一个图，$J = J(E)$ 是G的序理想，则J是素的，当且仅当，D的理想子集E是素的。

证。依命题 12.5.7，可代以考虑 G/J，从而可设 $J = \{0\}$ $E = \varnothing$。

如果零序理想是素的，对任意的 $x_i \in D$，令 $E_i = \{z \in D \mid z$是x_i的后裔$\}$，$J_i = J(E_i)$，$i = 1, 2$。依假定，$J_1 \cap J_2 \neq \varnothing$。从而，$E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$，即$x_1$与$x_2$有共同的后裔。因此，$D$的理想子集 $E = \varnothing$是素的。

反之，设$E = \varnothing$是素的，于是对G的任意序理想 $J_i = J(E_i)$，$i = 1, 2$，$E_1 \cap E_1 \neq \varnothing$，$J_1 \cap J_2 \neq \varnothing$，因此，零序理想是素的。证毕。

注　本节见参考文献 [28]，[33]，[35]，[107]。

§6. 稳定同构定理

定义 12.6.1 设 G 是维数群，$\Gamma(\subset G_+)$ 称为 G 的标度，指：1) Γ 生成 G_+，即 $G_+=\Gamma+\Gamma+\cdots$；2) 如果 $\tilde{a}$, $\tilde{b}\in G_+$, $\tilde{a}\leqslant\tilde{b}$, 及 $\tilde{b}\in\Gamma$，则 $\tilde{a}\in\Gamma$.

在标度 Γ 中可以定义部分的加法，即 $\tilde{a}$, $\tilde{b}\in\Gamma$ 称为可加的，指 $\tilde{a}+\tilde{b}\in\Gamma$.

引理 12.6.2 设 a_i, $b_j\in\mathbf{Z}_+$，并且 $a_1+\cdots+a_r=b_1+\cdots+b_s$，则存在 $c_{ij}\in\mathbf{Z}_+$，使得

$$a_i=\sum_{k=1}^{s}c_{ik},$$

$$b_j=\sum_{k=1}^{r}c_{kj},\quad 1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant s.$$

证. 如果 $b_1\geqslant a_1$，令 $c_{11}=a_1$, $c_{1j}=0$, $2\leqslant j\leqslant s$，于是变为要求 $\{c_{ij}|2\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant s\}$，使得

$$a_i=\sum_{k=1}^{s}c_{ik}\quad 2\leqslant i\leqslant r,$$

$$\sum_{k=2}^{r}c_{k1}=b_1-a_1,\quad \sum_{k=2}^{r}c_{kj}=b_j\quad 2\leqslant j\leqslant s.$$

如果 $a_1\geqslant b_1$，令 $c_{11}=b_1$, $c_{i1}=0$, $2\leqslant i\leqslant r$. 于是变为要求 $\{c_{ij}|1\leqslant i\leqslant r,\ 2\leqslant j\leqslant s\}$，使得

$$\sum_{k=2}^{s}c_{1k}=a_1-b_1,\quad \sum_{k=2}^{s}c_{ik}=a_i,\quad 2\leqslant i\leqslant r,$$

$$\sum_{k=1}^{r}c_{kj}=b_j,\quad 2\leqslant j\leqslant s,$$

如此递推即得证.

命题 12.6.3 设 G_i 是维数群，Γ_i 是 G_i 的标度，$i=1,2$，若 Φ 是 Γ_1 到 Γ_2 上的同构(即 Φ 一一，并且保持部分加法)，则 Φ 可以

唯一地开拓为 G_1 到 G_2 上的序同构。

证。如果 $\tilde{a}_i$，$\tilde{b}_j \in \Gamma_1$，并且

$$\tilde{a}_1 + \cdots + \tilde{a}_r = \tilde{b}_1 + \cdots + \tilde{b}_s,$$

依引理 12.6.2，有 $\tilde{c}_{ij} \in (G_1)_+$，使得

$$\tilde{a}_i = \sum_{k=1}^{s} \tilde{c}_{ik},$$

$$\tilde{b}_j = \sum_{k=1}^{r} \tilde{c}_{kj},\ 1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s$$

依 Γ_1 的性质，$\tilde{c}_{ij} \in \Gamma_1$，于是，$\{\tilde{c}_{ik}\}_k$，$\{\tilde{c}_{kj}\}_k$ 在 Γ_1 中是可加的，$\forall i, j$. Φ 是同构，从而，$\{\Phi(\tilde{c}_{ik})\}_k$，$\{\Phi(\tilde{c}_{kj})\}_k$ 在 Γ_2 中也是可加的，并且

$$\Phi(\tilde{a}_i) = \sum_{k=1}^{s} \Phi(\tilde{c}_{ik}),$$

$$\Phi(\tilde{b}_j) = \sum_{k=1}^{r} \Phi(\tilde{c}_{kj}),\ \forall i, j.$$

因此，

$$\Phi(\tilde{a}_1) + \cdots + \Phi(\tilde{a}_r) = \Phi(\tilde{b}_1) + \cdots + \Phi(\tilde{b}_s).$$

此外，Γ_1 生成 $(G_1)_+$，因此，Φ 可唯一开拓到 $(G_1)_+$ 上，即对任意的 $\tilde{a} \in (G_1)_+$，如果 $\tilde{a} = \tilde{a}_1 + \cdots + \tilde{a}_r$，这里 $\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_r \in \Gamma_1$，则命 $\Phi(\tilde{a}) = \Phi(\tilde{a}_1) + \cdots + \Phi(\tilde{a}_r)$. 进而，由于 $G_1 = (G_1)_+ - (G_1)_+$，于是，Φ 可唯一地开拓为 G_1 到 G_2 的保持加法的映象，仍记以 Φ.

由于 Γ_2 生成 $(G_2)_+$，$\Phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$，因此，$\Phi(G_1) = G_2$.

显然 $\Phi((G_1)_+) = (G_2)_+$，因此，只须证明 Φ 是一一的. 设 $\tilde{a}$，$\tilde{b} \in (G_1)_+$，并且 $\Phi(\tilde{a}) = \Phi(\tilde{b})$. 如果 $\tilde{a} = \tilde{a}_1 + \cdots + \tilde{a}_r$，$\tilde{b} = \tilde{b}_1 + \cdots + \tilde{b}_s$，这里 $\tilde{a}_i$，$\tilde{b}_j \in \Gamma_1$，则

$$\Phi(\tilde{a}_1) + \cdots + \Phi(\tilde{a}_r) = \Phi(\tilde{b}_1) + \cdots + \Phi(\tilde{b}_s).$$

依引理 12.6.2，存在 $\tilde{d}_{ij} \in (G_2)_+$，使得

$$\Phi(\tilde{a}_i) = \sum_{k=1}^{s} \tilde{d}_{ik},$$

$$\Phi(b_j)=\sum_{k=1}^{r}\tilde{d}_{kj},\quad \forall i,\ j,$$

由于 $\Phi(\tilde{a}_i)$, $\Phi(\tilde{b}_j)\in\Gamma_2$ 及依 Γ_2 的性质，$\tilde{d}_{ij}\in\Gamma_2$, $\forall i,\ j$，因此，$\{\tilde{d}_{ik}\}_k$, $\{\tilde{d}_{kj}\}_k$ 在 Γ_2 中是可加的，$\forall i,\ j$. 设 $\tilde{c}_{ij}\in\Gamma_1$，使得 $\Phi(\tilde{c}_{ij})=\tilde{d}_{ij}$, $\forall i,j$. 由于 Φ 是同构，因此，$\{\tilde{c}_{ik}\}$，$\{\tilde{c}_{kj}\}$ 在 Γ_1 中也是可加的，并且

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{s}\tilde{c}_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{s}\Phi(\tilde{c}_{ik})=\Phi(\tilde{a}_i),$$

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{r}c_{kj}\right)=\Phi(\tilde{b}_j).$$

由此，$\tilde{a}_i=\sum_{k=1}^{r}\tilde{c}_{ik}$, $\tilde{b}_j=\sum_{k=1}^{r}\tilde{c}_{kj}$, $\forall i,\ j$. 所以，

$$\tilde{a}=\tilde{a}_1+\cdots+\tilde{a}_r=\tilde{b}_1+\cdots+\tilde{b}_s=\tilde{b}.$$ 证毕。

命题 12.6.4 设 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$ 是(AF)代数，相应的图为 $\{D,\ d,\ \mathscr{U}\}$，维数群为 $G=\varinjlim_n\{\mathrm{Z}^{r(n)},\ \Phi_n\}$. 对每个 n，令 $t_n=(d(n,1),\cdots,d(n,\ r(n)))$，$[0,\ t_n]=\{t_n'\in\mathrm{Z}_+^{r(n)}|t_n'\leqslant t_n\}$，$\Phi_{n,\infty}$: $\mathrm{Z}^{r(n)}\to G$ 如 §5，以及

$$\Gamma=\bigcup_n\Phi_{n,\infty}([0,\ t_n]),$$

则 Γ 是 G 的标度. 此外，如果 E 是 A 的维数值域（见定义 12.2.2），对任意的 $\tilde{p}\in E$，可取 $p\in\tilde{p}\cap A_n$（见定理 12.2.9 的证明），相应于 $A_n=\bigoplus_{k=1}^{r(n)}A_{n,k}$，可写 $p=p_1+\cdots+p_{r(n)}$，设 p_k 是 $A_{n,k}$ 的 λ_k 个相互直交的极小投影的直和，命 $\Phi(\tilde{p})=\Phi_{n,\infty}((\lambda_1,\cdots,\lambda_{r(n)}))$，则 Φ 是 E 到 Γ 上的一一映象，并且保持部分加法.

证明易见，从略.

定理 12.6.5 *同构的 (AF) 代数的维数群是序同构的. 特别，(AF)代数的维数群在序同构的意义下是唯一的.

证. 由定理 12.2.9，12.2.8，命题 12.6.4，12.6.3 立见.

现在分析一下，可数无穷维 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中全连续算子全

体的 c^*-代数 $K=C(\mathscr{H})$. 设 $\{\xi_n\}$ 是 $\mathscr{H}$ 的直交规范基，p_n 是 $\mathscr{H}$ 到 $[\xi_1,\cdots,\xi_n]$ 上的投影，则 $K_n=p_nKp_n$ 是 n 阶的矩阵代数，$K_n\subset K_{n+1}$，$\forall n$，及 $K=\overline{\bigcup_n K_n}$. 此外，$K_n$ 的极小投影也是 K_{n+1} 的极小投影，$\forall n$，因此，相应的图为

$$\underset{1}{\cdot}\xrightarrow{\ 1\ }\underset{2}{\cdot}\xrightarrow{\ 1\ }\underset{3}{\cdot}\cdots\underset{n}{\cdot}\xrightarrow{\ 1\ }\underset{n+1}{\cdot}\cdots.$$

当然对任何的正整数列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，我们也可写 $K=\overline{\bigcup_k K_{n_k}}$，相应的图便为

$$\underset{n_1}{\cdot}\xrightarrow{\ 1\ }\underset{n_2}{\cdot}\xrightarrow{\ 1\ }\underset{n_3}{\cdot}\cdots\underset{n_k}{\cdot}\xrightarrow{\ 1\ }\underset{n_{k+1}}{\cdot}\cdots.$$

此外，对于任意的 c^*-代数 A，依引理 3.6.1，$A\otimes K_n$ 上仅有空间的 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$，并且 $A\otimes_{\alpha_0}K_n=A\otimes K_n$，$\forall n$，因此，$A\otimes K$ 上也仅有空间的 c^*-范 $\alpha_0(\cdot)$.

引理 12.6.6 设 $A=\overline{\bigcup_n A_n}$ 是(AF)代数，$G(A)$ 是它的维数群，则存在正整数列 $n_1<\cdots<n_k<\cdots$，当写 $A\otimes_{\alpha_0}K=\overline{\bigcup_k(A_k\otimes K_{n_k})}$ 时，相应的 Γ (见命题 12.6.4)即为 $G(A)_+$. 此外，$A\otimes_{\alpha_0}K$ 的维数群序同构于 $G(A)$.

证. 对任意的正整数列 $n_1<\cdots<n_k<\cdots$，显然 $A\otimes_{\alpha_0}K=\overline{\bigcup_k(A_k\otimes K_{n_k})}$. 由于 K_{n_k} 的极小投影仍然是 $K_{n_{k+1}}$ 的极小投影，因此，$A_k\otimes K_{n_k}$ 到 $A_{k+1}\otimes K_{n_{k+1}}$ 中的嵌入方式与 A_k 到 A_{k+1} 中的嵌入方式一样，$\forall k$，从而，$A\otimes_{\alpha_0}K$ 的维数群 $G(A\otimes_{\alpha_0}K)=G(A)$.

设 $A=\overline{\bigcup_k A_k}$ 的图为 $\{D,d,\mathscr{U}\}$，则 $A\otimes_{\alpha_0}K=\overline{\bigcup_k(A_k\otimes K_{n_k})}$ 的图为 $(D,d',\mathscr{U})$，其中 $d'(k,i)=n_kd(k,i)$，$1\leqslant i\leqslant r(k)$，$\forall k$. 因此，相应的

$$\Gamma = \bigcup_k \Phi_{k,\infty}([0, n_k t_k]),$$

这里 $t_k = (d(k, 1), \cdots, d(k, r(k)))$, $\forall k$. 今只须证明可取 $\{n_k\}$,使得 $\Gamma = G(A)_+$.

设 $\mathscr{U} = \{\Phi_k\}$, $\Phi_k = (s_{ij}^{(k)})$, 令 $s_k = \sum_{i,j} s_{ij}^{(k)}$ 及 $n_1 = 1$, $n_k = 2^{k-1}s_1\cdots s_{k-1}$, $\forall k > 1$. 此外, 记 $1_k = (1, \cdots, 1) \in Z^{r(k)}$, 于是 $t_k \geqslant 1_k$, $\forall k$.

对任意的 $\tilde{a} \in G(A)_+$,必存在正整数 N, n,使得 $\Phi_{n,\infty}(N1_n) \geqslant \tilde{a}$. 取充分大的 $m(>n)$, 使得 $2^{m-1} \geqslant N$, 于是, $n_m = 2^{m-1}s_1\cdots s_{m-1} \geqslant Ns_n\cdots s_{m-1}$. 由于 $\Phi_k(1_k) \leqslant s_k 1_{k+1}$, $\forall k$, 从而

$$n_m t_m \geqslant n_m 1_m \geqslant \Phi_{m-1}\circ\cdots\circ\Phi_n(N1_n).$$

由此, $\tilde{a} \leqslant \Phi_{n,\infty}(N1_n) \leqslant \Phi_{m,\infty}(n_m t_m) \in \Gamma$. 依 Γ 的性质, $\tilde{a} \in \Gamma$ 所以, $\Gamma = G(A)_+$. 证毕.

定理 12.6.7 设 $A = \overline{\bigcup_n A_n}$, $B = \overline{\bigcup_n B_n}$ 是(AF)代数,相应的维数群是 $G(A)$, $G(B)$, 则 $G(A)$ 与 $G(B)$ 是序同构的, 必须且只须, $(A\otimes_{\alpha_0}K)$ 与 $(B\otimes_{\alpha_0}K)$ 是$*$同构的, 这里K 是可数无穷维 Hilbert 空间中全连续算子全体的 c^*-代数.

证. 充分性. 由 $G(A)=G(A\otimes_{\alpha_0}K)$, $G(B)=G(B\otimes_{\alpha_0}K)$, 及定理 12.6.5 立见.

今设 $G(A)$ 与 $G(B)$ 是序同构的, 取严格递增的正整数列 $\{n_k\}$, $\{m_k\}$, 使得当写 $A\otimes_{\alpha_0}K = \overline{\bigcup_k (A_k\otimes K_{n_k})}$, $B\otimes_{\alpha_0}K = \overline{\bigcup_k (A_k\otimes K_{m_k})}$ 时,有

$$\Gamma(A\otimes_{\alpha_0}K) = G(A)_+,\quad \Gamma(B\otimes_{\alpha_0}K) = G(B)_+.$$

于是, 依命题 12.6.4, $E(A\otimes_{\alpha_0}K)$ 与 $E(B\otimes_{\alpha_0}K)$ 同构. 再依定理 12.2.8, 12.2.9, 可见 $(A\otimes_{\alpha_0}K)$ 与 $(B\otimes_{\alpha_0}K)$ 是$*$同构的. 证毕.

注 本节见参考文献 [30], [107].

参 考 文 献

[1] Akemann, C. A., The dual space of an operator algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 126 (1967), 268—302.

[2] Akemann, C. A., Sequential convergence in the dual of a w^*-algebra, *Comm. Math. Phys.*, 7 (1968), 222—224.

[3] Araki, H., and Elliott, G. A., On the definition of c^*-algebras, *Pub. R. I. M. S., Kyoto Univ.*, 9 (1973), 93—112.

[4] Arens, R., Representations of $*$-algebras, *Duke Math. J.*, 14 (1947), 269—282.

[5] Arveson, W., An invitation to c^*-algebras, Springer-Verlag, New York, 1976.

[6] Bourbaki, N., Intégration, Act. Sc. Ind. nos. 1175, 1244 and 1281, Paris, Hermann, 1965, 1967 and 1959.

[7] Bourbaki, N., Elements of Mathematics, General topology, Part 2, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1966.

[8] Bratteli, O., Inductive limits of finite dimensional c^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 171 (1972), 195—234.

[9] Bratteli, O., and Robinson, D. W., Operator algebras and quantum statistical mechanics, I, Springer-Verlag, New York, 1979.

[10] Cuculescu, I., A proof of $(A\otimes B)'=A'\otimes B'$ for von Neumann algebras, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 16 (1971), 665—670.

[11] Connes, A., Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., Paris* (4), 6 (1973), 133—252.

[12] Dixmier, J., Les anneaux d'operateurs de classe finie, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 66 (1949), 209—261.

[13] Dixmier, J., Les fonctionelles lineaires sur l'ensemble des operateurs bornes d'un espace de Hilbert, *Ann. Math.*, 51 (1950), 387—408.

[14] Dixmier, J., Sur certains espaces consideres par M. H. Stone, *Summa Brasil. Math.* (2), 11 (1951), 151—182.

[15] Dixmier, J., Sur la reduction des anneaux d'operateurs, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 68 (1951), 185—202.

[16] Dixmier, J., Forms lineaires sur un anneau d'operateurs, *Bull. Soc. Math. France*, 81 (1953), 9—39.

[17] Dixmier, J., Dual et quasi-dual d'une algebre de Banach involutive, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104 (1962), 278—283.

[18] Dixmier, J., Traces sur les c^*-algebres, *Ann. Inst. Fourier*, 13 (1963), 219—262.

[19] Dixmier, J., On some c^*-algebres, consideded by Glimm, *J. Functional Analysis*, 1 (1967), 182—203.

[20] Dixmier, J., c^*-Algebras, North-Holland, 1977.

[21] Dixmier, J., Von Neumann algebras, North-Holland, 1981.

[22] Dunford, N., and Schwartz, J. T., Linear operators, Vol. I, N. Y.,

Interscience, 1958.
[23] Dye, H. A., The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 243—280.
[24] Effros, E. G., Order ideals in a c^*-algebra, *Duke Math. J.*, **30** (1963), 391—412.
[25] Effros, E. G., Convergence of closed subsets in a topological space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 929—931.
[26] Effros, E. G., The Borel space of von Neumann algebras on a separable Hilbert space, *Pacific J. Math.*, **15** (1965), 1153—1164.
[27] Effros, E. G., Global structure in von Neumann algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121** (1966), 434—454.
[28] Effros, E. G., Handelman, D., and Shen, C. L., Dimension groups and their a affine representations, *Amer. J. of Math.*, **102** (1980), 385—407.
[29] Effros, E. G., and Lance, C., Tensor products of operator algebras, *Adv. Math.*, **25** (1977), 1—34.
[30] Effros, E. G., and Rosenberg, J., c^*-Algebras with approximate inner flip, *Pacific J. of Math.*, 77 (1978), 417—443.
[31] Elliott, G. A., A weakening of the axioms for a c^*-algebra, *Math. Ann.*, **189** (1970), 257—260.
[32] Elliott, G. A., On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite dimensional algebras, *J. Alg.*, **38** (1976), 29—44.
[33] Elliott, G. A., On totally ordered groups and K_0, Ring theory, Springer, Lecture Notes, No. 734, 1979.
[34] Feldman, J., Borel sets of states and of representations, *Michigan Math. J.*, **12** (1965), 363—365.
[35] Fuchs, L., Riesz groups, *Annali della Scuola Norm. Sup., Pisa*, **19** (1965), 1—34.
[36] Fuglede, B., and Kadison, R. V., On a conjecture of Murry and von Neumann, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, **37** (1951), 420—425.
[37] Fukamiya, M., On a theorem of Gelfand and Neumark and the B^*-algebra, *Kumamoto J. Sci.*, **1** (1952), 17—22.
[38] Gelfand, I. M., On normed rings, *Dokl. Akad. Nauk SSSR.*, **23** (1939), 430—432.
[39] Gelfand, I. M., and Naimark, M. A., On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, *Mat. Sb.*, **12** (1943), 197—213.
[40] Glickfeld, B. W., A metric characterization of C(X) and its generalization to c^*-algebras, *Illinois J. Math.*, **10** (1966), 547—556
[41] Glimm, J., On a certain class of operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 216—244.
[42] Glimm, J. G., and Kadison, R. V., Unitary operators in c^*-algebras, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 547—556.
[43] Grothendieck, A., Sur les applications lineaires faiblement compactes

d'espaces du type C(K), *Canad J. Math.*, 5(1953), 129—173.
[44] Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espace nucleaires, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 16 (1955).
[45] Grothendieck, A., Un résultat sur le dual d'une c^*-algèbre, *J. Math. Pures Appl.*, 36 (1957), 97—108.
[46] Guichardel, A., Tensor products of c^*-algebras, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 160 (1965), 986—989.
[47] Halmos, P. R., Measure theory, New York, Springer, 1950.
[48] Halmos, P. R., and von Neumann, J., Operator methods in classical mechanics, II, *Ann. Math.*, 43 (1942), 332—350.
[49] Herman, R., and Takesaki, M., The comparability theorem for cyclic projections, *Bull. London Math. Soc.*, 9 (1977), 186—187.
[50] Ingelstam, L., Real Banach algebras, *Ark. Math.*, 5 (1964), 239—270.
[51] Kadison, R. V., Isometries of operator algebras, *Ann. of Math.*, 54 (1951), 325—338.
[52] Kadison, R. V., On the additivity of the trace in finite factors, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 41 (1955), 385—387.
[53] Kadison, R. V., Irreducible operator algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, (1957), 273—276.
[54] Kaplansky, I., Normed algebras, *Duke Math. J.*, 16 (1949), 399—418.
[55] Kaplansky, I., Projections in Banach algebras, *Ann. Math.*, 53 (1951), 235—249.
[56] Kaplansky, I., A theorem on rings of operators, *Pacific J. Math.*, 1 (1951), 227—232.
[57] Kaplansky, I., Algebras of type I, *Ann. of Math.*, 56 (1952), 460—472.
[58] Kaplansky, I., *Math. Rev.*, 14 (1953), 884.
[59] Kaplansky, I., Modules over operator algebras, *Amer. J. Math.*, 75 (1953), 839—853.
[60] Kelley, J. L., and others, Linear topological spaces, Princeton, N. J., Van Nostrand, 1963.
[61] Kelley, J. L., and Vaught, R. L., The positive cone in Banach algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74 (1953), 44—45.
[62] Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Berlin, Springer, 1976.
[63] Kuratowski, K., Topology, Vol. I, New York, Academic Press, 1966.
[64] Lance, C., On nuclear c^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, 12 (1973), 157—176.
[65] Lance, C., Tensor products of non-unital c^*-algebras, *J. London Math. Soc.*, (2) 12 (1976), 160—168.
[66] Lazar, A. J., and Taylor, D. C., Approximately finite dimensional c^*-algebras and Bratteli diagrams, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 259 (1980), 599—619.
[67] Li Bingren, Real c^*-algebras (in Chinese), *Acta Math. Sinica*, 18 (1975), 216—218.

[68] Li Bingren, Real operator algebras, *Scientia Sinica*, **22** (1979), 733—746.

[69] Mackey, G. W., Induced representations of locally compact groups, II; The Frobenius reciprocity theorem Ann, Math., 58 (1953), 193—221.

[70] Mackey, G. W., The theory of group representations, Mimeographed Notes, Univ. of Chicago, Chicago, Ill. (1955).

[71] Mackey, G. W., Borel structures in groups and their duals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 134—165.

[72] Misonou, Y., On the direct product of w^*-algebras, *Tohoku Math. J.*, 6 (1954), 189—204.

[73] Misonou, Y., Generalized approximately finite operator algebras, *Tohoku Math. J.*, 7 (1954), 192—205.

[74] Murray, F. J., and Von Neumann, J., On rings of operators, *Ann. Math.*, 37 (1936), 116—229.

[75] Murray, F. J., and Von Neumann,J., On rings of operators, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 208—248.

[76] Murray, F. J., and Von Neumann, J., On rings of operators, IV, *Ann. Math.*, **44** (1943), 716—808.

[77] Naimark, M. A., Normed rings, (English translation by Boron, L. F.) P. Noord-hoff, Groningen, 1964.

[78] Von Neumann, J., Zur algebra der funktionaloperationen und theorie der normalen operatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929), 370—427.

[79] Von Neumann, J., On a certain topology for rings of operators, *Ann. Math.*, 37 (1936), 111—115.

[80] Von Neumann, J., On infinite direct products, *Compisitio Math.*, **6** (1938), 1—77.

[81] Von Neumann, J., On rings of operators, III, *Ann. Math.*, **41** (1940), 94—161.

[82] Von Neumann, J., On some algebraical properties of operator rings, *Ann. of Math.*, **44** (1943), 709—715.

[83] Von Neumann, J., On rings of operators: Reduction theory, *Ann. Math.*, **50** (1949), 401—485.

[84] Nielsen, O., Borel sets of von Neumann algebras, *Amer. J. Math.*, **95** (1973), 145—164.

[85] Palmer, T. W., Real c^*-algebras, *Pacific J. Math.*, **35** (1970), 195—204.

[86] Pedersen, G. K., c^*-Algebras and their automorphism groups, Academic Press, 1979.

[87] Pukanszky, L., Some examples of factors, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1958), 135—156.

[88] Rieffel, M. A., and Van Dale, A., The commutation theorem for tensor products of von Neumann algebras, *Bull. London Math. Soc.*, **7** (1975), 257—260.

[89] Rieffel, M. A., and Van Dale, A., A bounded operator approach to Tomita-Takesakitheory, Pacific T. Math., 69 (1977), 187—221.

[90] Sakai, S., A characterization of w^*-algebras, *Pacific J. Math.*, 6 (1956), 763—773.
[91] Sakai, S., On topological properties of w^*-algebras, *Proc. Japan Acad.*, 33 (1957), 439—444.
[92] Sakai, S., On linear functionals of w^*-algebras, *Proc. Japan Acad.*, 34 (1958), 571—574.
[93] Sakai, S., On topologies of finite w^*-algebras, *Illinois J. Math.*, 9 (1965), 236—241.
[94] Sakai, S., A Radon-Nikodym theorem in w^*-algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71 (1965), 149—151.
[95] Sakai, S., On the central decomposition for positive functionals on c^*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 118 (1965), 406—419.
[96] Sakai, S., On the tensor product of w^*-algebras, *Amer. J. Math.*, 90 (1968), 335—341.
[97] Sakai, S., c^*-Algebras and w^*-algebras, Springer-Verlag, New York, 1971.
[98] Schatten, R., A theory of cross-space, Ann. Math. Studies, No. 26, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1950.
[99] Schatten, R., Norm ideals of completely continuous operators, Ergebnisse der Mathematik, No. 27, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.
[100] Schwartz, J. T., Type II factors in a central decomposition, *Comm. Pure Appl. Math.*, 16 (1963), 247—252.
[101] Schwartz, J. T., w^*-Algebras, Gordon and Breach, New York, 1967.
[102] Segal, I. E., Irreducible representations of operator algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 61 (1947) ,69—105.
[103] Segal, I. E., Two-sided ideals in operator algebras, *Ann. Math.*, 50 (1949), 856—865.
[104] Segal, I. E., Equivalence of measure spaces, *Amer. J. Math.*, 73 (1951), 275—313.
[105] Segal, I. E., Decomposition of operator algebras, I and II, Momoirs of the Amer. Math. Soc., 9 (1951), 1—67.
[106] Segal, I. E., A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. of Math.*, 57 (1953), 401—457.
[107] Shen, C. L., On the classification of the ordered groups associated with the approximately finite dimensional c^*-algebras, *Duke Math J.*, 46 (1979), 613—633.
[108] Sherman, S., The second adjoint of a c^*-algebra, *Proc. Intern. Congr. Math., Cambridge*, 1 (1950), 470.
[109] Stinespring, W. F., Positive functions on c^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), 211—216.
[110] Stone, M. H., Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41 (1937), 375—481.
[111] Takeda, Z., Inductive limit and infinite direct product of operator algebras, *Tohoku Math. J.*, 7 (1955), 67—86.

[112] Takedà, Z., Conjugate spaces of operator algebras, *Proc. Japan Acad.*. 28 (1954), 90—95.
[113] Takesaki, M., On the conjugate space of an operator algebra, *Tohoku Math. J.*, 10 (1958), 194—203.
[114] Takesaki, M., On the singularity of a positive linear functional on operator algebra, *Proc. Japan Acad.*, 35 (1959), 365—366.
[115] Takesaki, M., On the cross-norm of the direct product of c^*-algebras, *Tohoku Math. J.*, 16 (1964), 111—122.
[116] Takesaki, M., Remarks on the reduction theory of von Neumann algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20 (1969), 434—438.
[117] Takesaki, M., Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture Notes in Math. No. 128, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
[118] Takesaki, M., A short proof for the commutation theorem $(M_1 \overline{\otimes} M_2)' = M_1' \overline{\otimes} M_2'$, Lecture Notes in Math., No. 247, 1971, Springer-Verlag, Berlin, and New York, 780—786.
[119] Takesaki, M., Theory of operator algebras, I, Springer-Verlag, New York, 1979.
[120] Taylor, A. E., Introduction to functional analysis, 1963.
[121] Tomita, M., Spectral theory of operator algebras, I, *Math. Okayama Univ.*, 9 (1959), 63—98.
[122] Tomita, M., Quasi-standard von Neumann algebras, Mimeographed Notes, Kyushu Univ. 1967.
[123] Tomita, M., Standard forms of von Neumann algebras, The Vth functional analysis symposium of the Math. Soc. of Japan, Sendai, 1967.
[124] Tomiyama, J., On the projection of norm one in w^*-algebras, *Proc. Japan Acad.*, 33 (1957), 608—612.
[125] Tomiyama, J., Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Lecture Notes, Univ. of Copenhagen (1970).
[126] Turumaru, T., On the direct product of operator algebras, *Tohoku Math. J.*, 4 (1952), 242—251; II, *Tohoku Math. J.*, 5 (1953), 1—7; III, *Tohoku Math. J.*, 6 (1954), 208—211; IV, *Tohoku Math. J.*, 8 (1956), 281—285.
[127] Umegaki, H., Conditional expectations in an operator algebra, I, *Tohoku Math. J.*, 6 (1954), 177—181.
[128] Umegaki, H., Weak compactness in an operator space *Kodai Math. Sem. Rep.*, 8 (1956), 145—151.
[129] Vasilescu, F. H., et al., Theoria operatorilor si algebre de operatori, Bucuresti, 1973.
[130] Vowden, B. J., On the Gelfand-Neumark theorem, *J. London Math. Soc.*, 42 (1967), 725—731.
[131] Vowden, B. J., A new proof in the spatial theory of von Neumann algebras, *J. London Math. Soc.*, 44 (1969), 429—432.
[132] Vowden, B. J., c^*-Norm and tensor product of c^*-algebras, *J. London*

Math. Soc., (2), 7 (1974), 595—596.
[133] Widom, H., Approximately finite algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 83 (1956), 170—178.
[134] Wolfsohn, W., Le produit tensoriel de c^*-algebras, *Bull. Sci. Math.*, 87 (1963), 13—27.
[135] Yeadon, F. J., A note on the Mackey topology of a von Neumann algebra, *J. Math. Anal. Appl.*, 45 (1974), 721—722.
[136] Yood, B., Faithful * representations of normed algebras, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 345—363.
[137] Yood, B., On axioms for B^*-algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76 (1970), 80—82.

索　　引

一　画

一致(算子)拓扑　9
一致超有限（UHF）代数　196

二　画

二次交换子定理　21

四　画

中心覆盖　37
中心值的迹　272
分解的算子　412
分解的 vN 代数　418
分离矢　72
无限共轭类 (I. C. C) 群　328
无限的投影　255
无限的 vN 代数　255
厄米泛函　53
厄米泛函的直交分解　55
不可约的*表示　104
双侧理想　2

五　画

对角算子　413
对角算子代数　413
可测算子场的直接积分　411
可传锥　118
可传的 c^*-子代数　119
可测算子场　410
可测矢场　403
左理想　42
左核　92
正規元　81
正规态　45
正规迹　270
正规*同态　65
正元　82
正泛函　44
正则左理想　110
正泛函的支持　47
右理想　42
半有限的正规迹　278
半有限的 vN 代数　256

六　画

交换投影　244
交换子　16
交叉范　146
交叉积　318
全可加泛函　45
全可加的*同态　65
全连续算子　2
全正映象　181
协变系统　317
后裔　474
因子　20
因子态　199
因子的*表示　122
有限的投影　255
有限的 vN 代数　255
有限秩算子　2
约化理论　402
自伴元　79
迁移定理　104

七　画

泛函的绝对值　52
泛函的极分解　52
泛表示　125
投影的比较　33
投影的等价性　33
条件期望　201
连续的 vN 代数　257
极大正则左理想　110
极大交换的 vN 代数　241
序理想　480
序同构　481
纯态　88
纯态空间　88
纯无限的投影　255
纯无限的 vN 代数　255
严格正元　131
酉元　81
酉对合　333
酉等价的*表示　91
张量积　145

八　画

忠实的正泛函　45
忠实的半有限正规迹　278
忠实的*表示　49
非退化的*表示　97
范数为 1 的投影映象　201
奇异泛函　213
空间的*同构　66
空间的 c^*-范　156
态　85
态空间　85

九　画

迹的定义理想　278
迹类算子　5

面 480
重数函数 253
标准的 Borel 空间 365
标度 484

十 画

离散的 vN 代数 256
矩阵单位 311
乘法代数 241
预对偶 208
真无限的投影 256
真无限的 vN 代数 256
素理想 114
弱算子拓扑 9

十一画

维数 462
维数函数 307
维数群 479
商 C^*-代数 99
强算子拓扑 9
强*算子拓扑 9

十二画

逼近单位元 97
逼近有限维的 C^*-代数 451
循环投影 469
循环矢 49
循环*表示 91
遍历型定理 258
最大的交叉范 147
最大的 C^*-范 157
超有限的 vN 代数 315
超 Stonean 空间 235

十三画

稠密性定理 39
群测度空间 322

十四画

算子的定常场 432
模自同构群 342
模算子 333
稳定同构定理 484

其 它

Arens 乘积 126
(AF) 代数 451
(AF) 代数的图 471
Banach 空间的代数张量积 146
Banach*代数 132
Borel 空间 364
Borel 子集 364
Borel 映象 364
Borel 同构 346
Borel 截面 373
C^*-代数 78
C^*-代数的包络 vN 代数 125
C^*-范 149
C^*-代数的诱导极限 190
C^*-等价的代数 138
Effros Borel 构造 390
GNS 构造 49
Hilbert-Schmidt 算子 3
Hilbert 空间的可测场 403
Hilbert 空间的定常场 405
Hilbert 空间可测场的直接积分 407
KMS 条件 334
(LF) 代数 463
Mackey 拓扑 9
n-齐次的 vN 代数 295
n-正映象 181
Polish 空间 353
Radon-Nikodym 定理 55
Riesz 插入性质 479
Sousline 子集 359
Sousline 准则 362
Stonean 空间 230
vN 代数 16
vN 代数的中心 20
vN 代数的 Borel 空间 388
vN 代数的可测场 416
vN 代数的定常场 432
vN 代数可测场的直接积分 418
(I)型 vN 代数 257
(I_n)型 vN 代数 295
(II)型 vN 代数 257
(II_1)型 vN 代数 257
(II_∞)型 vN 代数 257
(III)型 vN 代数 257
$\frac{1}{2}$-标准的 Borel 空间 366
W^*-代数 205
σ-有限的投影 74
σ-有限的 vN 代数 71
*表示 48
*表示的循环矢 49
*表示的本质子空间 97
*表示的分离性 121
*表示的拟等价性 123

现代数学基础丛书



